А.Д.Полянин, В.Ф.Зайцев

СПРАВОЧНИК ПО НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

М: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 432 с.

Книга содержит точные решения около 1200 нелинейных уравнений математической физики и механики. Рассматриваются уравнения параболического, гиперболического, эллиптического и других типов. Описано много новых решений нелинейных уравнений. Особое внимание уделено уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций. Помимо уравнений второго порядка рассматриваются также уравнения третьего, четвертого и более высоких порядков. В целом справочник содержит больше нелинейных уравнений математической физики и точных решений, чем любые другие книги.

Приведены решения уравнений, встречающихся в различных областях теоретической физики, механики и химической технологии (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, нелинейной акустике, теории горения, нелинейной оптике, ядерной физике и др.).

В приложении описаны методы обобщенного и функционального разделения переменных. Рассмотрены конкретные примеры применения этих методов для построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными.

Справочник предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в различных областях математики, физики, механики, теории управления и инженерных наук.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Точные решения (в замкнутом виде) дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют разобраться в механизме таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др. Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи тепло- и массопереноса, не имеющие точного аналитического решения.

Большинство уравнений прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат параметры или функции, которые находятся экспериментально и потому не строго фиксированы. В то же время уравнения, моделирующие реальные явления и процессы, должны быть достаточно просты для того, чтобы их можно было успешно проанализировать и решить. В качестве одного из возможных критериев простоты можно принять требование, чтобы модельное уравнение допускало решение в замкнутом виде. При этом особый интерес для приложений представляют собой уравнения, зависящие от произвольных функций или содержащие много свободных параметров, которые можно задавать по усмотрению исследователя.

В книге приведены точные решения около 1200 нелинейных уравнений математической физики второго, третьего, четвертого и более высоких порядков. Описано много новых решений.

При отборе материала авторы отдавали наибольшее предпочтение следующим трем важным типам уравнений:

- Уравнениям, которые встречаются в различных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, теории горения, нелинейной оптике, ядерной физике, химической технологии, биологии и др.).
- Уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций.
- Уравнениям, которые допускают точные решения, зависящие от произвольных функций.

В целом справочник содержит больше нелинейных уравнений математической физики и точных решений, чем любые другие книги.

В книге имеется приложение, где описаны новые методы построения точных решений нелинейных уравнений математической физики и механики с обобщенным и функциональным разделением переменных. Эти методы основаны на исследовании соответствующих функциональных и функционально-дифференциальных уравнений, которые содержат неизвестные функции разных переменных. Приведены примеры использования методов обобщенного и функционального разделения переменных для построения точных решений нелинейных уравнений тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамики и уравнений общего вида, которые зависят от произвольных функций.

Расположение уравнений во всех главах книги отвечает принципу «от простого к сложному». Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом. Обширное оглавление поможет читателю находить искомые уравнения.

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой авторы по возможности старались избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно (опущены детали), чего вполне достаточно для их применения в большинстве приложений.

Авторы благодарят А. И. Журова и Ф. Л. Черноусько за полезные обсуждения и замечания.

Авторы надеются, что справочник окажется полезным для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, механики, физики, теории управления и химической технологии.

Авторы

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ

Латинский алфавит

$C_1, C_2, \ldots$ — произвольные постоянные;
$r,\ \varphi,\ z$ — цилиндрические координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;
$r,\ \theta,\ \varphi$ — сферические координаты, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
t — время ($t \geqslant 0$);
w — искомая функция (зависимая переменная);
x, y, z — пространственные переменные (декартовы координаты);
$x_1, \ldots, x_n$ — декартовы координаты в n-мерном пространстве.

Греческий алфавит

Δ — оператор Лапласа:

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — в двумерном случае,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — в трехмерном случае,

$\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — в n-мерном случае;

$\Delta\Delta$ — бигармонический оператор, $\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ — в двумерном случае.

Краткие обозначения производных

Частные производные:

$$\partial_t w = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \partial_x w = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \partial_{tt} w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \partial_{xx} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \partial_{xxx} w = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

Обыкновенные производные функции $f = f(x)$:

$$f'_x \equiv \frac{df}{dx}, \quad f''_{xx} \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f'''_{xxx} \equiv \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad f''''_{xxxx} \equiv \frac{d^4 f}{dx^4}, \quad f_x^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{при} \quad n \geqslant 5.$$

Замечания

1. В формулах, содержащих выражения типа $\dfrac{f(x)}{a-2}$, часто не оговаривается, что $a \neq 2$.
2. При ссылках в тексте на конкретные уравнения запись вида «3.1.2.5» означает «уравнение 5 из раздела 3.1.2».

⊙ Этим знаком помечены ссылки на литературные источники, когда:

а) хотя бы одно из приведенных выше решений получено в цитируемой работе (даже если решение там было приведено с «устранимыми» ошибками в знаках и коэффициентах);

б) в цитируемой работе содержится полезная дополнительная информация, относительно рассматриваемого уравнения и его решений.

1. Уравнения параболического типа с одной пространственной переменной

1.1. Уравнения со степенными нелинейностями

1.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw(1-w).$

Уравнение Фишера. Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии. Оно описывает, например, массоперенос в двухкомпонентной неподвижной смеси при наличии объемной химической реакции квазипервого порядка. Кинетическая функция $f(w) = aw(1-w)$ моделирует также автокаталитическое цепное превращение в теории горения.

Частный случай уравнения 1.1.1.5 при $m = 2$.

1°. Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \bigl[1 + C\exp\bigl(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\bigr)\bigr]^{-2},$$
$$w(x,t) = \bigl[-1 + C\exp\bigl(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\bigr)\bigr]^{-2},$$
$$w(x,t) = \frac{1 + 2C\exp\bigl(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{-6a}\,x\bigr)}{\bigl[1 + C\exp\bigl(-\frac{5}{6}at \pm \frac{1}{6}\sqrt{-6a}\,x\bigr)\bigr]^2}.$$

О точных решениях см. также п. 2° уравнения 1.1.1.5.

2°. Замена $U = 1 - w$ приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_1 = -a$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - aU(1-U).$$

⊙ *Литература*: M. J. Ablowitz, A. Zeppetella (1978), В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w(1-w)(a-w).$

Частный случай уравнения 1.1.1.6 при $m = 2$.

1°. Существуют три стационарных однородных решения: $w = w_k$, где $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = a$. Стационарное неоднородное решение задается неявно (A, B — произвольные постоянные):

$$\int \frac{dw}{\sqrt{\frac{1}{4}w^4 - \frac{1}{3}(a+1)w^3 + \frac{1}{2}aw^2 + A}} = \pm x + B.$$

2°. Решения типа бегущей волны (A, B, C — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \frac{1}{1 + A\exp\bigl[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}(2a-1)t\bigr]},$$
$$w(x,t) = \frac{a}{1 + A\exp\bigl[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\,x + \frac{1}{2}a(2-a)t\bigr]},$$
$$w(x,t) = \frac{A\exp\bigl[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-a)x + \frac{1}{2}(1-a^2)t\bigr] + a}{A\exp\bigl[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-a)x + \frac{1}{2}(1-a^2)t\bigr] + 1},$$
$$w(x,t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{th}\bigl[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,x + \tfrac{1}{4}(1-2a)t + A\bigr],$$
$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{th}\bigl[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,ax + \tfrac{1}{4}a(a-2)t + A\bigr],$$

$$w(x,t)=\tfrac{1}{2}(1+a)+\tfrac{1}{2}(1-a)\,\mathrm{th}\big[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x+\tfrac{1}{4}(1-a^2)t+A\big],$$
$$w(x,t)=\frac{2a}{(1+a)-(1-a)\,\mathrm{th}\big[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x+\tfrac{1}{4}(1-a^2)t+A\big]},$$
$$w(x,t)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cth}\big[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,x+\tfrac{1}{4}(1-2a)t+A\big],$$
$$w(x,t)=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{cth}\big[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,ax+\tfrac{1}{4}a(a-2)t+A\big],$$
$$w(x,t)=\tfrac{1}{2}(1+a)+\tfrac{1}{2}(1-a)\,\mathrm{cth}\big[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x+\tfrac{1}{4}(1-a^2)t+A\big],$$
$$w(x,t)=\frac{2a}{(1+a)-(1-a)\,\mathrm{cth}\big[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-a)x+\tfrac{1}{4}(1-a^2)t+A\big]}.$$

3°. «Двухфазное» решение:

$$w(x,t)=\frac{A\exp(z_1)+aB\exp(z_2)}{A\exp(z_1)+B\exp(z_2)+C},$$
$$z_1=\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,x+\big(\tfrac{1}{2}-a\big)t,\quad z_2=\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,ax+a\big(\tfrac{1}{2}a-1\big)t,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

4°. Укажем два преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения. Замена $u=1-w$ приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_1=1-a$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u(1-u)(1-a-u).$$

Преобразование

$$v(z,\tau)=1-\frac{1}{a}w(x,t),\quad \tau=a^2t,\quad z=ax$$

приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_2=1-a^{-1}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-v(1-v)\Big(1-\frac{1}{a}-v\Big).$$

Поэтому, если функция $w=w(x,t;\,a)$ является решением рассматриваемого уравнения, то функции

$$w_1=1-w(x,t;\,1-a),$$
$$w_2=a-aw\big(ax,a^2t;\,1-a^{-1}\big)$$

также будет решением этого уравнения. Сказанное позволяет «размножать» точные решения.

5°. Точное решение при $a=-1$:

$$w=\big[C_1\exp\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x+\tfrac{3}{2}t\big)-C_2\exp\big(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}x+\tfrac{3}{2}t\big)\big]U(z),$$
$$z=C_1\exp\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x+\tfrac{3}{2}t\big)+C_2\exp\big(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}x+\tfrac{3}{2}t\big)+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, $U=U(z)$ — функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению $U''_{zz}=2U^3$.

⊙ *Литература*: T. Kawahara, M. Tanaka (1983), N. H. Ibragimov (1994), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\alpha w(\beta-w)(\gamma-w).$

Частный случай уравнения 1.1.1.6 при $m=2$, $a=-\alpha\beta\gamma$, $b=\alpha(\beta+\gamma)$, $c=-\alpha$.

1°. Решения типа бегущей волны (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t)=\frac{\beta}{1+C\exp\big[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}\,\beta x+\frac{1}{2}\alpha\beta(2\gamma-\beta)t\big]},$$
$$w(x,t)=\beta\,\frac{C\exp\big[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}\,(\beta-\gamma)x+\frac{1}{2}\alpha(\beta^2-\gamma^2)t\big]+\gamma}{C\exp\big[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}\,(\beta-\gamma)x+\frac{1}{2}\alpha(\beta^2-\gamma^2)t\big]+\beta}.$$

Второе решение можно записать в следующем виде;

$$w(x,t)=\beta\,\frac{(C+\gamma)+(C-\gamma)\,\mathrm{th}\,z}{(C+\beta)+(C-\beta)\,\mathrm{th}\,z}=\beta\,\frac{(C-\gamma)+(C+\gamma)\,\mathrm{cth}\,z}{(C-\beta)+(C+\beta)\,\mathrm{cth}\,z},$$

где $z=\pm\frac{1}{4}\sqrt{2\alpha}\,(\beta-\gamma)x+\frac{1}{4}\alpha(\beta^2-\gamma^2)t$.

2°. «Двухфазное решение» (A, B, C — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \frac{A\beta\exp(z_1) + \gamma B\exp(z_2)}{A\exp(z_1) + B\exp(z_2) + C},$$

где

$$z_1 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2\alpha}\,\beta x + \tfrac{1}{2}\alpha\beta(\beta - 2\gamma)t, \quad z_2 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2\alpha}\,\gamma x + \tfrac{1}{2}\alpha\gamma(\gamma - 2\beta)t.$$

Одну из констант A, B, C можно положить равной ±1.

3°. При $\alpha > 0$ преобразование $w = \beta U$, $t = \alpha\beta^2\tau$, $x = \pm\sqrt{\alpha}\,\beta\xi$ приводит к уравнению 1.1.1.2 относительно $U(\xi,\tau)$, где $a = \gamma/\beta$.

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^k.$

1°. Решение типа бегущей волны (λ — произвольная постоянная):

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} - \lambda w'_z + bw^k = 0.$$

2°. Автомодельное решение:

$$w = t^{\frac{1}{1-k}} u(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + \frac{1}{k-1}u + bu^k = 0.$$

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^m.$

Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова. Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии.

1°. Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \left[\beta + C\exp(\lambda t \pm \mu x)\right]^{\frac{2}{1-m}}, \tag{1}$$

$$w(x,t) = \left[-\beta + C\exp(\lambda t \pm \mu x)\right]^{\frac{2}{1-m}}, \tag{2}$$

где параметры λ, μ, β определяются по формулам

$$\lambda = \frac{a(1-m)(m+3)}{2(m+1)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{a(1-m)^2}{2(m+1)}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

2°. Решения (1) и (2) являются частными случаями более широкого класса решения типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = x + \sigma t,$$

которые описываются автономным уравнением

$$w''_{zz} - \sigma w'_z + aw + bw^m = 0. \tag{3}$$

Точное решение уравнения (3) при

$$\sigma = 1, \quad a = \frac{2(m+1)}{(m+3)^2} \qquad (m \neq \pm1,\ m \neq -3)$$

можно записать в параметрическом виде

$$z = \frac{m+3}{m-1}\ln\left[kC_1^{1-m}\frac{m-1}{m+3}\int\frac{d\tau}{\sqrt{1\pm\tau^{m+1}}} + C_2\right], \qquad b = \mp\frac{m+1}{2k^2},$$

$$w = C_1^2\tau\left[kC_1^{1-m}\frac{m-1}{m+3}\int\frac{d\tau}{\sqrt{1\pm\tau^{m+1}}} + C_2\right]^{\frac{2}{m-1}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, τ — параметр.

Уравнение (3) заменой $U(w) = w'_z$ приводится к уравнению Абеля

$$UU'_w - \sigma U + aw + bw^m = 0. \tag{4}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведены точные решения уравнений (3), (4) для некоторых пар параметров m, a ($\sigma = 1$, b — любое).

⊙ *Литература*: P. Kaliappan (1984), В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^m + cw^{2m-1}.$

Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии.

1°. Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \bigl[\beta + C\exp(\lambda t + \mu x)\bigr]^{\frac{1}{1-m}}, \tag{1}$$

где параметры β, λ, μ определяются из системы алгебраических уравнений

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0, \tag{2}$$

$$\mu^2 - (1-m)\lambda + a(1-m)^2 = 0, \tag{3}$$

$$\mu^2 - \lambda + (1-m)\bigl[2a + (b/\beta)\bigr] = 0. \tag{4}$$

Квадратное уравнение (2) для β решается независимо. В общем случае система (2)–(4) дает четыре набора искомых параметров, которым отвечают четыре точных решения исходного уравнения.

2°. Решение (1) является частным случаем более широкого класса решений типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = x + \sigma t,$$

которые описываются автономным уравнением

$$w''_{zz} - \sigma w'_z + aw + bw^m + cw^{2m-1} = 0. \tag{5}$$

Замена $U(w) = w'_z$ приводит (5) к уравнению Абеля

$$UU'_w - \sigma U + aw + bw^m + cw^{2m-1} = 0,$$

общие решения которого для некоторых m (на параметры a, b, c накладываются ограничения) приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^{m-1} + bmw^m - mb^2w^{2m-1}.$

Решение типа бегущей волны (λ — произвольная постоянная):

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} - \lambda w'_z + aw^{m-1} + bmw^m - mb^2w^{2m-1} = 0. \tag{1}$$

Можно показать, что при $\lambda = 1$ однопараметрическое семейство решений уравнения (1) удовлетворяет уравнению первого порядка

$$w'_z = w - bw^m + \frac{a}{mb}. \tag{2}$$

Интегрируя (2), получим решение в неявном виде (A — любое):

$$\int \frac{dw}{a + mbw - mb^2w^m} = \frac{1}{mb}z + A. \tag{3}$$

В частном случае $a = 0$ из формулы (3) имеем

$$w(z) = \bigl\{C\exp\bigl[(1-m)z\bigr] + b\bigr\}^{\frac{1}{1-m}},$$

где C — произвольная постоянная.

1.1.2. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s_1(cx+bt)^k + s_2 w^n$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = s_1 z^k + s_2 w^n$.

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s(w+bx+ct)^k$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = s(w+z)^k$.

3. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s(bx+ct)^k w^n$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = sz^k w^n$.

4. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n x^m w^k$.

Автомодельное решение:

$$w = t^{\frac{2n+m+2}{2(1-k)}} u(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + \frac{2n+m+2}{2(k-1)}u + bu^k = 0.$$

5. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + se^{bx+ct} w^n$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = se^z w^n$.

1.1.3. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial w}{\partial x} + cw + k_1 w^{n_1} + k_2 w^{n_2}$.

Частный случай уравнения 1.6.2.3 при $f(t) = b$. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + bt$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + cw + k_1 w^{n_1} + k_2 w^{n_2},$$

частные случаи которого рассматриваются в разд. 1.1.1.

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n\frac{\partial w}{\partial x} + cw + k_1 w^{m_1} + k_2 w^{m_2}$.

Частный случай уравнения 1.6.2.3 при $f(t) = bt^n$. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \frac{b}{n+1}t^{n+1}$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + cw + k_1 w^{m_1} + k_2 w^{m_2},$$

частные случаи которого рассматриваются в разд. 1.1.1.

3. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w\frac{\partial w}{\partial x}$.

Уравнение Бюргерса.

1°. Точные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \frac{A-x}{B+t},$$

$$w(x,t) = \lambda + \frac{2}{x+\lambda t+A},$$

$$w(x,t) = \frac{4x+2A}{x^2+Ax+2t+B},$$
$$w(x,t) = \frac{6(x^2+2t+A)}{x^3+6xt+3Ax+B},$$
$$w(x,t) = \frac{2\lambda}{1+A\exp(-\lambda^2 t-\lambda x)},$$
$$w(x,t) = -\lambda + A\frac{\exp[A(x-\lambda t)]-B}{\exp[A(x-\lambda t)]+B},$$
$$w(x,t) = -\lambda + 2A\,\mathrm{th}\big[A(x-\lambda t)+B\big],$$
$$w(x,t) = \frac{\lambda}{\lambda^2 t+A}\left[2\,\mathrm{th}\left(\frac{\lambda x+B}{\lambda^2 t+A}\right)-\lambda x-B\right],$$
$$w(x,t) = -\lambda + 2A\,\mathrm{tg}\big[A(\lambda t-x)+B\big],$$
$$w(x,t) = \frac{2\lambda\cos(\lambda x+A)}{B\exp(\lambda^2 t)+\sin(\lambda x+A)},$$
$$w(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi(t+\lambda)}}\exp\left[-\frac{(x+A)^2}{4(t+\lambda)}\right]\left[B+A\,\mathrm{erf}\left(\frac{x+A}{2\sqrt{t+\lambda}}\right)\right]^{-1},$$

где $\mathrm{erf}\,z \equiv \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z \exp(-\xi^2)\,d\xi$ — интеграл вероятностей (функция ошибок).

2°. Другие решения можно получить по формуле (преобразование Хопфа — Коула)

$$w(x,t) = \frac{2}{u}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

где $u=u(x,t)$ — решение линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Об этом уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

3°. Задача Коши. В области $-\infty < x < \infty$ задано начальное условие

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t=0.$$

Решение задачи Коши:

$$w(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial x}\ln F(x,t),$$

где

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}-\frac{1}{2}\int_0^{\xi} f(\xi')\,d\xi'\right]d\xi.$$

4°. Уравнение Бюргерса связано с линейным уравнением теплопроводности (2) преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}uw = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial (uw)}{\partial x} = 0.$$

Это преобразование используется при решении конкретных краевых задач.

⊙ *Литература*: О. В. Руденко, С. И. Солуян (1975), N. H. Ibragimov (1994).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Ненормированное уравнение Бюргерса. Растяжение независимых переменных по формулам $x = \dfrac{a}{b}z$, $t = \dfrac{a}{b^2}\tau$ приводит к уравнению 1.1.3.3:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{a}{t} w + bw \dfrac{\partial w}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Модифицированное уравнение Бюргерса.

1°. Точное решение (вырожденное) линейное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x + C_1 t^{-a} \exp\Bigl[-b \int \varphi(t)\,dt\Bigr],$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1-a}{C_2 t^a + bt} & \text{при } a \neq 1, \\ \dfrac{1}{t(C_2 + b\ln t)} & \text{при } a = 1, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные (в обоих случаях интеграл можно вычислить).

2°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = u(z)t^{-1/2}, \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\mu u''_{zz} + \bigl(\tfrac{1}{2}z - bu\bigr)u'_z + \bigl(\tfrac{1}{2} - a\bigr)u = 0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + w \dfrac{\partial w}{\partial x} = a\Bigl[\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(x\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) - \dfrac{w}{x^2}\Bigr].$

Цилиндрическое уравнение Бюргерса. Переменная x играет роль радиальной координаты.

Точное решение:

$$w(x,t) = -\frac{2a}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

где функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности с осевой симметрией

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{a}{x}\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(x\frac{\partial \theta}{\partial x}\Bigr).$$

⊙ *Литература*: S. Nerney, E. J. Schmahl, Z. E. Musielak (1996).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} + c(x+st)^k.$

Частный случай уравнения 1.6.2.2 при $f(x,t) = c(x+st)^k$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} + cx^k + st^n.$

Частный случай уравнения 1.6.2.2 при $f(x,t) = cx^k + st^n$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{b^2}{9a}w(w-k)(w+k).$

Точное решение:

$$w = \frac{k(-1 + C_1 e^{4\lambda x})}{1 + C_1 e^{4\lambda x} + C_2 e^{2\lambda x + bk\lambda t}}, \qquad \lambda = \frac{bk}{12a},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ Решение получил К. А. Волосов (2000).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^m\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Точное решение (C, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \Bigl[C\exp\Bigl(-\frac{\lambda m}{a}z\Bigr) - \frac{b}{\lambda(m+1)}\Bigr]^{-1/m}, \qquad z = x + \lambda t.$$

Более широкое семейство решений типа бегущей волны см. в 1.6.2.9 при $f(w) = bw^m$.

2°. Существует автомодельное решение вида

$$w(\xi,t) = t^{-\frac{1}{2m}}\varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bw^m + ct + s)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.6.2.12 при $f(w) = bw^m$, $g(t) = ct + s$.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \frac{1}{2}ct^2 + st$, получим уравнение вида 1.1.3.10:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bw^m\frac{\partial w}{\partial z}.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bw^m + ct^k)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.6.2.12 при $f(w) = bw^m$, $g(t) = ct^k$.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \dfrac{c}{k+1}t^{k+1}$, получим уравнение вида 1.1.3.10:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bw^m\frac{\partial w}{\partial z}.$$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s_1(bx + ct)^k w^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + s_2(bx + ct)^p w^q = 0$.

Частный случай уравнения 1.6.2.15 при $f(z, w) = s_1 z^k w^n$, $g(z, w) = s_2 z^p w^q$.

1.1.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x, t, w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2$.

1°. Точные решения (A, B, C, λ — произвольные постоянные):

$$\begin{aligned}
w(x) &= \frac{a}{b}\ln|Ax + B| + C,\\
w(x,t) &= A^2bt \pm Ax + B,\\
w(x,t) &= -\frac{(x + A)^2}{4bt} - \frac{a}{2b}\ln t + B,\\
w(x,t) &= \frac{a}{b}\ln|x^2 + 2at + Ax + B| + C,\\
w(x,t) &= \frac{a}{b}\ln|x^3 + 6axt + Ax + B| + C,\\
w(x,t) &= \frac{a}{b}\ln|x^4 + 12ax^2t + 12a^4t^2 + A| + B,\\
w(x,t) &= -\frac{a^2\lambda^2}{b}t + \frac{a}{b}\ln|\cos(\lambda x + A)| + B.
\end{aligned}$$

2°. Замена

$$w(x,t) = \frac{a}{b}\ln|u(x,t)|$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Об этом уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw + s$.

Частный случай уравнения 1.6.3.4 при $f(t) = s$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + aw^2$.

1°. Точные решения при $a < 0$:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= C_1\exp\bigl(-at \pm x\sqrt{-a}\,\bigr),\\
w(x,t) &= \frac{1}{C_1 - at} + \frac{C_2}{(C_1 - at)^2}\exp\bigl(-at \pm x\sqrt{-a}\,\bigr),
\end{aligned}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение при $a < 0$:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[A\exp\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr) + B\exp\bigl(-x\sqrt{-a}\,\bigr)\bigr],$$

где A, B — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = a(\varphi^2 + 4AB\psi^2), \tag{1}$$

$$\psi'_t = a(2\varphi - 1)\psi. \tag{2}$$

Деля правые и левые части уравнений (1), (2) можно получить уравнение первого порядка $(2\varphi - 1)\psi\varphi'_\psi = \varphi^2 + 4AB\psi^2$.

3°. Точное решение при $a > 0$:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\bigl(x\sqrt{a} + C\bigr),$$

где C — произвольная постоянная, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = a(\varphi^2 + \psi^2), \tag{3}$$

$$\psi'_t = a(2\varphi - 1)\psi. \tag{4}$$

Деля правые и левые части уравнений (3), (4) можно получить уравнение первого порядка.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + bcw^2 + sw + k.$

1°. Точное решение при $b < 0$:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\bigl(\pm x\sqrt{-b}\,\bigr), \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = bc\varphi^2 + s\varphi + k, \tag{2}$$

$$\psi'_t = (2bc\varphi + s - ac)\psi. \tag{3}$$

Решение системы уравнений (2), (3) описывается следующими формулами (C_1, C_2 — произвольные постоянные):

$$\varphi(t) = \lambda + \frac{2bc\lambda + s}{C_1\exp\bigl[-(2bc\lambda + s)t\bigr] - bc},$$

$$\psi(t) = \frac{C_1C_2\exp\bigl[-(2bc\lambda + s + ac)t\bigr]}{\bigl\{C_1\exp\bigl[-(2bc\lambda + s)t\bigr] - bc\bigr\}^2},$$

где $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ — корни квадратного уравнения

$$bc\lambda^2 + s\lambda + k = 0.$$

2°. О более сложных решениях, содержащих гиперболические и тригонометрические функции по переменной x, см. уравнение 1.6.5.2 при f, g, $h = \text{const}$.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + cw^2 + st^n w + kt^m.$

Частный случай уравнения 1.6.5.2 при $f = \text{const}$, $g = st^n$, $h = kt^m$.

1.1.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + b\frac{\partial w}{\partial x} + c.$

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bt^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^m.$

Частный случай уравнения 1.6.4.4 при $f(x,t) = bt^n$, $g(x,t) = ct^m$.

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bt^n\frac{\partial u}{\partial x} + ct^m u.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ct^m w + st^k.$

Частный случай уравнения 1.6.5.1 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^m$, $h(t) = st^k$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda t}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ce^{\mu t}w + se^{\nu t}.$

Частный случай уравнения 1.6.5.1 при $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$, $h(t) = se^{\nu t}$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{a}{w}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = a/w$.

Замена

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{a+1}w^{a+1} & \text{при } a \neq -1, \\ \ln|w| & \text{при } a = -1 \end{cases}$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^k\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = aw^k$. При $k = 0$ см. уравнение 1.1.4.1, при $k = -1$ см. уравнение 1.1.5.5.

Замена

$$u = \int \exp\left(\frac{a}{k+1}w^{k+1}\right) dw$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^m\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + (bx + ct + s)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.5.10 при $f(w) = aw^m$, $g(t) = b$, $h(t) = ct + s$.

1.1.6. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw^2 + kw + s.$

Частный случай уравнения 1.1.6.5 при $b = 0$.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^2 + (ct + d)w + st + k.$

Частный случай уравнений 1.6.8.3 и 1.6.9.7 при $f(t) = ct + d$, $g(t) = st + k$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ct + d)w + pt + k.$

Частный случай уравнения 1.6.9.6 при $f(t) \equiv 0$, $g(t) = b$, $h(t) = ct + d$, $s(t) = pt + k$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\dfrac{\partial w}{\partial x} + pw + q.$

Частный случай уравнения 1.6.9.6 при $f(t) = b$, $g(t) = c$, $h(t) = p$, $s(t) = q$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw^2 + kw + s.$

1°. Точные решения, содержащие экспоненциальную функцию x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\lambda x), \quad \lambda = \Big(\frac{-c}{a+b}\Big)^{1/2}, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + k\varphi + s, \tag{2}$$

$$\psi'_t = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + k)\psi. \tag{3}$$

Интегрируя (2), получим

$$\int \frac{d\varphi}{c\varphi^2 + k\varphi + s} = t + C_1.$$

Вычислив интеграл, можно найти явную зависимость $\varphi = \varphi(t)$. Решение уравнения (3) выражается через функцию $\varphi(t)$ по формуле

$$\psi(t) = C_2\exp\Big[\int (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + k)\,dt\Big],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Имеются также решения, содержащее гиперболические и тригонометрические функции (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{ch}(\lambda x + A), \quad \lambda = \Big(\frac{-c}{a+b}\Big)^{1/2};$$

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}(\lambda x + A), \quad \lambda = \Big(\frac{-c}{a+b}\Big)^{1/2};$$

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos(\lambda x + A), \quad \lambda = \Big(\frac{c}{a+b}\Big)^{1/2}.$$

Функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (эти системы могут быть сведены к одному уравнению первого порядка).

Об этих решениях см. пп. 2°–4° уравнения 1.6.9.7 при $f(t) = k$, $g(t) = s$.

⦿ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Замена $w = 1/v$ приводит к уравнению вида 1.1.7.3:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\Big).$$

Поэтому решения исходного уравнения выражаются через решения линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

по формулам

$$w = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x = u.$$

Чтобы получить в явном виде зависимость $w = w(x,t)$, следует исключить y.

⦿ *Литература*: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 213).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^m w^5.$

Частный случай уравнения 1.6.10.1 при $f(x) = bx^m$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2/m} C_2^{1/m} w(C_1 x + C_3, C_2 t + C_4),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Замена $u = w^{1-k}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{k}{1-k}}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

которое рассматривается в разд. 1.1.7.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^k w$.

Частный случай уравнения 1.6.10.3 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^k$.

1.1.7. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$

Уравнения этого вида допускают точные решения типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Частный случай уравнения 1.1.7.6 при $m = 1$.

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = C_1 x + aC_1^2 t + C_2,$$
$$w(x,t) = -\frac{(x + C_1)^2}{6a(t + C_2)} + \frac{C_3}{|t + C_2|^{1/3}},$$
$$w(x,t) = \frac{(x + C_1)^2}{C_2 - 6at} + C_3 |x + C_1|^{1/2} |C_2 - 6at|^{-5/8},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: D. Zwillinger (1989, стр. 311).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$w - C_2 \ln|w + C_2| = C_1 x + aC_1^2 t + C_3.$$

3°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = (6at + C_1)\xi + C_2\xi^2 + C_3,$$
$$w = -(6at + C_1)\xi^2 - 2C_2\xi^3.$$

4°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = tf(\xi) + g(\xi),$$
$$w = tf'_\xi(\xi) + g'_\xi(\xi),$$

где функции $f = f(\xi)$ и $g(\xi)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f'_\xi)^2 - ff''_{\xi\xi} = af'''_{\xi\xi\xi}, \qquad (1)$$
$$f'_\xi g'_\xi - fg''_{\xi\xi} = ag'''_{\xi\xi\xi}. \qquad (2)$$

Порядок уравнения (1) может быть понижен на две единицы. Пусть известно некоторое решение уравнения (1). Уравнение (2) является линейным уравнением относительно функции g, которое имеет два линейно независимых частных решения

$$g_1 = 1, \quad g_2 = f(\xi).$$

Второе частное решение следует из сопоставления уравнений (1) и (2). Общее решение уравнения (1) можно представить в виде (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$g(\xi) = C_1 + C_2 f + C_3\Bigl(f\int\psi\,d\xi - \int f\psi\,d\xi\Bigr),$$
$$f = f(\xi), \quad \psi = \frac{1}{(f'_\xi)^2}\exp\Bigl(-\frac{1}{a}\int f\,d\xi\Bigr). \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что уравнение (1) имеет частные решения:

$$f(\xi) = 6a(\xi + C)^{-1},$$
$$f(\xi) = Ce^{\lambda\xi} - a\lambda, \tag{4}$$

где C, λ — произвольные постоянные. Первое решение (4) с учетом формул (1), (3) приводит к решению из п. 3°. Подставив вторую зависимость (4) в формулы (1), (3) можно получить другое решение.

Замечание. Указанное выше решение получено с помощью преобразования Мизеса из решения уравнения гидродинамического пограничного слоя (см. 9.2.1.1, пп. 5°, 6°).

5°. О других решениях см. пп. 3°–7° уравнения 1.1.7.6 при $m = 1$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

Частный случай уравнения 1.1.7.6 при $m = -1$.

Точные решения:

$$w(x,y) = (C_1 x - aC_1^2 t + C_2)^{-1},$$
$$w(x,y) = (2at + C_1)(x + C_2)^{-2},$$
$$w(x,y) = \frac{2a(t + C_1)}{(x + C_2)^2 + C_3(t + C_1)^2},$$
$$w(x,y) = \frac{C_1^2}{C_2 + C_3\exp(aC_2 t - C_1 x)},$$
$$w(x,y) = \frac{C_1^2}{at + C_2}\Bigl[C_3\exp\Bigl(-\frac{C_1 x}{at + C_2}\Bigr) - 1 + \frac{C_1 x}{at + C_2}\Bigr]^{-1},$$
$$w(x,y) = \frac{2aC_1^2 t + C_2}{\operatorname{sh}^2(C_1 x + C_3)},$$
$$w(x,y) = \frac{C_2 - 2aC_1^2 t}{\operatorname{ch}^2(C_1 x + C_3)},$$
$$w(x,y) = \frac{2aC_1^2 t + C_2}{\cos^2(C_1 x + C_3)},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. В. Пухначев (1987), С. Н. Аристов (1999).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

Частный случай уравнения 1.1.7.6 при $m = -2$.

1°. Введем новую искомую функцию $z = z(x,t)$ по формуле $w = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, а затем проинтегрируем полученное уравнение по переменной x. В результате имеем

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\Bigl(\frac{\partial z}{\partial x}\Bigr)^{-2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Это уравнение преобразованием годографа

$$x = u, \quad z = y, \tag{2}$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности для функции $u = u(y,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Преобразование (2) означает, что зависимая переменная z принимается за независимую переменную, а независимая переменная x — за зависимую переменную.

Решения исходного уравнения $w = w(x,t)$ выражаются через решения $u = u(y,t)$ линейного уравнения (3) по формулам

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1}, \quad x = u(y,t). \tag{4}$$

Чтобы получить в явном виде зависимость $w = w(x,t)$, из (4) следует исключить y.

2°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = \pm\frac{\sqrt{2at}}{x}\left[\ln\left(\frac{C}{x^2 t}\right)\right]^{-1/2}.$$

⊙ *Литература*: G. W. Bluman, S. Kumei (1980), Н. Х. Ибрагимов (1983).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Частный случай уравнения 1.1.7.6 при $m = -4/3$ (допускает больше инвариантных решений, чем при $m \neq -4/3$).

1°. Отдельные частные решения см. в 1.1.7.6 при $m = -4/3$.

2°. Существуют решения следующего вида:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= f_1(x),\\
w(x,t) &= t^{3/4} f_2(x),\\
w(x,t) &= x^{-3} f_3(t),\\
w(x,t) &= f_4(x - \lambda t),\\
w(x,t) &= f_5(x^2 t^{-1}),\\
w(x,t) &= e^t f_6(x e^{2t/3}),\\
w(x,t) &= x^{3C} f_7(t x^{-4C-2}),\\
w(x,t) &= x^{-3} f_8\left(t - \frac{1}{x}\right),\\
w(x,t) &= x^{-3} f_9\left(\frac{t x^2}{(x+1)^2}\right),
\end{aligned}$$

где C, λ — произвольные постоянные. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $f_n(z)$.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (at + A)^{3/4}[(x + B)(Cx + BC + 1)]^{-3/2},$$

где A, B C — произвольные постоянные.

4°. Преобразование (A, B — любые)

$$w(x,t) = (Ax + B)^{-3} u(z,t), \quad z = \pm\frac{1}{A(Ax + B)}$$

приводит к уравнению такого же вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{-4/3}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Поэтому, если функция $w_1 = w(x,t)$ является решением, то функция

$$w_2 = \frac{1}{(Ax + B)^3} w\left(\frac{\pm 1}{A(Ax + B)}, t\right)$$

также будет решением исходного уравнения. Сказанное позволяет «размножать» точные решения.

⊙ *Литература*: Л. В. Овсянников (1959, 1978), N. H. Ibragimov (1994).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^{-2/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 1.1.7.6 при $m = -2/3$.

Точное решение:

$$w = (C - 4at)^{3/2}\big[(C - 4at)^{3/2} - x^2\big]^{-3/2}.$$

⦿ *Литература*: И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989), N. H. Ibragimov (1994).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^{m}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Это уравнение часто встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса, теории горения и теории фильтрации. Например, оно описывает нестационарный теплоперенос в неподвижной среде, когда коэффициент температуропроводности является степенной функцией температуры. При $m = 1,\ -1,\ -2,\ -4/3,\ -2/3$ см. также уравнения 1.1.7.1–1.1.7.5.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2/m}C_2^{1/m}w(C_1x + C_3, C_2t + C_4),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения*:

$$\begin{aligned}
w(x) &= (Ax + B)^{\frac{1}{m+1}},\\
w(x,t) &= (\pm kx + k\lambda t + A)^{1/m}, \quad k = \lambda m/a,\\
w(x,t) &= \left[\frac{m(x-A)^2}{2a(m+2)(B-t)}\right]^{\frac{1}{m}},\\
w(x,t) &= \left[A|t+B|^{-\frac{m}{m+2}} - \frac{m}{2a(m+2)}\frac{(x+C)^2}{t+B}\right]^{\frac{1}{m}},\\
w(x,t) &= \left[\frac{m(x+A)^2}{\varphi(t)} + B(x+A)^{\frac{m}{m+1}}|\varphi(t)|^{-\frac{m(2m+3)}{2(m+1)^2}}\right]^{\frac{1}{m}}, \quad \varphi(t) = C - 2a(m+2)t,
\end{aligned}$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные. Третье решение при $B > 0$ и четвертое решение при $B < 0$ соответствуют режимам с обострением (решение неограниченно возрастает на конечном интервале времени).

⦿ *Литература*: Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец (1950), Г. И. Баренблатт (1952), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), Г. А. Рудых, Э. И. Семенов (1998).

3°. Решение типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t$$

задается неявно

$$a\int\frac{w^m\,dw}{\lambda w + C_1} = C_2 + z,$$

где λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение, а значению $C_1 = 0$ — второе решение в п. 2°.

4°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (\lambda t + A)^{-1/m}f(x), \tag{1}$$

где функция $f = f(x)$ определяется неявно

$$\int\frac{f^m\,df}{\sqrt{C_1 - bf^{m+2}}} = \pm x + C_2, \qquad b = \frac{2\lambda}{am(m+2)},$$

λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

---

* **Здесь и далее, для краткости, точные решения нелинейных уравнений обычно приводятся только в области их пространственной локализации, где $w \not\equiv 0$.**

5°. Автомодельное решение:

$$w = w(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} \qquad (0 \leqslant x < \infty),$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2a\bigl(w^m w'_z\bigr)'_z + z w'_z = 0. \tag{2}$$

Решениями такого вида обычно описываются ситуации, когда искомая функция принимает постоянные значения в начальных и граничных условиях.

Частному решению уравнения (2) при $w(z) = k_2 z^{2/m}$ отвечает третье решение в п. 2°.

Х. Фуджита (H. Fujita, 1952) получил общее решение уравнения (2) при $m = -1$ и $m = -2$. Об этих решениях подробно написано в книге А. В. Лыкова (1967).

В случае граничных условий

$$w = 1 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad z = \infty$$

решение уравнения (2) является локализованным и имеет следующую структуру:

$$w = \begin{cases} (1 - Z)^{1/m} \dfrac{P(1 - Z, m)}{P(1, m)} & \text{при} \ \ 0 \leqslant Z \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \ \ 1 \leqslant Z < \infty, \end{cases}$$

где

$$Z = \frac{z}{z_0}, \quad z_0^2 = \frac{2a}{mP(1, m)}, \quad P(\xi, m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k,$$

$b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}[m(m+1)]^{-1}, \ldots$; см. А. А. Самарский, И. М. Соболь (1963).

6°. Автомодельное решение:

$$w = t^{-\frac{1}{m+2}} F(\xi), \quad \xi = x t^{-\frac{1}{m+2}} \qquad (0 \leqslant x < \infty).$$

Здесь функция $F = F(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$a(m+2)F^m F'_\xi + \xi F'_\xi = C, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная.

Значению $C = 0$ в уравнении (3) соответствует последнее решение в п. 2°, которое описывает тепловую волну от плоского источника. Подробности см. в книге Я. Б. Зельдовича, Ю. П. Райзера (1966).

Сделаем замену $\varphi = F^m$ в уравнении (3). В результате получим

$$\varphi'_\xi = \alpha \varphi^{-1/m} - \beta \xi, \tag{4}$$

где $\alpha = \frac{mC}{a(m+2)}$, $\beta = \frac{m}{a(m+2)}$. В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 a) приведены общие решения уравнения (4) для значений $m = -1$ и $m = 1$.

7°. Автомодельное решение более общего вида:

$$w = t^\beta g(\zeta), \quad \zeta = x t^{-\frac{m\beta+1}{2}}, \qquad \beta \text{ — любое.}$$

Здесь функция $g = g(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$G''_{\zeta\zeta} = A_1 \zeta G^{-\frac{m}{m+1}} G'_\zeta + A_2 G^{\frac{1}{m+1}}, \qquad G = g^{m+1}, \tag{5}$$

где $A_1 = -(m\beta + 1)/(2a)$, $A_2 = \beta(m+1)/a$. Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода). Точные аналитические решения уравнения (5) при различных значениях параметра m приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 a).

8°. Точное решение:

$$w = e^{-2\lambda t} \varphi(u), \quad u = x e^{\lambda m t}, \qquad \lambda \text{ — любое,}$$

где функция $\varphi = \varphi(u)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(\varphi^m \varphi'_u)'_u = \lambda m u \varphi'_u - 2\lambda\varphi. \tag{6}$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода). Замена $\Phi = \varphi^{m+1}$ приводит (6) к уравнению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (5).

9°. Точное решение:

$$w = (t+A)^{-1/m}\psi(u), \quad u = x + b\ln(t+A), \qquad A,\ b \text{ — любые},$$

где функция $\psi = \psi(u)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(\psi^m \psi'_u)'_u = b\psi'_u - \psi/m. \tag{7}$$

Введение новой зависимой переменной по формуле $p(\psi) = \frac{a}{b}\psi^m\psi'_u$ с учетом равенства $\frac{d}{du} = \frac{b}{a}\psi^{-m}p\frac{d}{d\psi}$ приводит (7) к уравнению Абеля второго рода:

$$pp'_\psi = p - s\psi^{m+1}, \quad s = a/(mb^2).$$

Общие решения этого уравнения при $m = -3,\ -2,\ -\frac{3}{2},\ -1$ приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

10°. Преобразование

$$\bar{t} = t - t_0, \quad \bar{x} = \int_{x_0}^{x} w(y,t)\,dy + \int_{t_0}^{t}\Big[w^m(x,\tau)\frac{\partial w}{\partial x}(x,\tau)\Big]_{x=x_0} d\tau, \quad \bar{w}(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{w(x,t)}$$

переводит ненулевое решение $w(x,t)$ исходного уравнения в решение $\bar{w}(\bar{x},\bar{t})$ уравнения аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\Big(a\bar{w}^{-m-2}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\Big).$$

⊙ *Литература к уравнению 1.1.7.6*: Л. В. Овсянников (1959, 1962, 1978), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

1.1.8. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + g(w)$

Уравнения этого вида допускают точные решения типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$.

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(w^{-2}\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + b.$

Преобразование

$$x = -\frac{2}{bu}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad w(x,t) = -\frac{b}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big]^{-1} \tag{1}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\Phi\frac{\partial \Psi}{\partial y}\Big) = 0, \quad \text{где} \quad \Phi = \Big[\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big]^{-1}, \quad \Psi = \frac{1}{u}\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big).$$

Отсюда следует, что любому решению $u = u(x,t)$ линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$

соответствует решение (1) исходного нелинейного уравнения.

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983).

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(w^{-4/3}\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^{-1/3}.$

1°. При $ab > 0$ преобразование

$$w(x,t) = \exp(\pm 3\lambda x)z(\xi,t), \quad \xi = \frac{1}{2\lambda}\exp(\pm 2\lambda x), \qquad \lambda = \Big(\frac{b}{3a}\Big)^{1/2}$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.7.4:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(z^{-4/3}\frac{\partial z}{\partial \xi}\Big). \tag{1}$$

⊙ *Литература*: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

2°. При $ab < 0$ преобразование

$$w(x,t) = \frac{z(\xi,t)}{\cos^3(\lambda x)}, \quad \xi = \frac{1}{\lambda}\operatorname{tg}(\lambda x), \qquad \lambda = \left(-\frac{b}{3a}\right)^{1/2},$$

также приводит к уравнению 1.1.7.4.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (t+C)^{3/4}u(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $u=u(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(u^{-4/3}u'_x)'_x + bu^{-1/3} - \tfrac{3}{4}u = 0.$$

4°. См. также уравнение 1.1.8.4 при $b = c = 0$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^{-1/3} + cw.$

Преобразование

$$w = e^{ct}u(x,\tau), \quad \tau = -\frac{3}{4c}e^{-\frac{4}{3}ct} + \text{const}$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.8.2:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(u^{-4/3}\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + bu^{-1/3}.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) - aw^{-1/3} + bw^{7/3} + cw.$

Замена $u = w^{-4/3}$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{3}{4}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \frac{4}{3}\big(au^2 - cu - b\big).$$

1°. При $a = 1$ существует точное решение вида

$$u = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\cos(kx) + \varphi_3(t)\sin(kx) + \varphi_4(t)\cos(2kx) + \varphi_5(t)\sin(2kx), \quad k = 2\cdot 3^{-1/2},$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (здесь не приводится).

2°. При $a = -1$ существует точное решение вида

$$u = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\operatorname{ch}(kx) + \varphi_3(t)\operatorname{sh}(kx) + \varphi_4(t)\operatorname{ch}(2kx) + \varphi_5(t)\operatorname{sh}(2kx), \quad k = 2\cdot 3^{-1/2}.$$

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^k.$

Частный случай уравнения 1.6.13.2 при $f(w) = aw^m$, $g(w) = bw^k$. При $b = 0$ см. разд. 1.1.7, при $m = -4/3$ и $k = -1/3$ см. уравнение 1.1.8.2.

1. Случай произвольных k и m.

1.1. Пространственно-однородное и стационарное решения (последнее записано в неявной форме):

$$w(t) = \begin{cases} \big[(1-k)bt + C\big]^{\frac{1}{1-k}} & \text{при } k \neq 1, \\ Ce^{bt} & \text{при } k = 1, \end{cases}$$

$$\int w^m\Big[A - \frac{2b}{a(m+k+1)}w^{m+k+1}\Big]^{-1/2} dw = \pm x + B,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

1.2. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(w^m w'_z)'_z - \lambda w'_z + bw^k = 0. \tag{1}$$

Замена

$$u(w) = \frac{a}{\lambda} w^m w'_z$$

преобразует (1) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = -ab\lambda^{-2} w^{m+k}. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*) приведены точные решения уравнения (2) при $m+k = -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1$.

1.3. Автомодельное решение при $k \neq 1$:

$$w = t^{\frac{1}{1-k}} u(\xi), \quad \xi = xt^{\frac{k-m-1}{2(1-k)}},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(u^m u'_\xi)'_\xi + \frac{m-k+1}{2(1-k)} \xi u'_\xi + bu^k - \frac{1}{1-k} u = 0.$$

2. Случай $k = m + 1$.

2.1. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов ($a = b = 1$):

$$w(x,t) = \begin{cases} \left[\dfrac{2(m+1)}{m(m+2)} \dfrac{\cos^2(\pi x/L)}{(t_0 - t)}\right]^{1/m} & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{L}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{L}{2}, \end{cases} \tag{3}$$

где $L = 2\pi(m+1)^{1/2}/m$. Решение (3) описывает режим с обострением, который существует на ограниченном промежутке времени $t \in [0,\ t_0)$. Решение локализовано области $|x| < L/2$.

⊙ *Литература*: Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский (1976); А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

2.2. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \left(\frac{Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} + D}{m\lambda t + C}\right)^{1/m},$$

$$B = \frac{\lambda^2 (m+1)^2}{4b^2 A(m+2)^2}, \quad D = -\frac{\lambda(m+1)}{b(m+2)}, \quad \mu = m\sqrt{-\frac{b}{a(m+1)}},$$

где A, C, λ — произвольные постоянные, $ab(m+1) < 0$.

2.3. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (C, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m} \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(\varphi^m \varphi'_x)'_x + b\varphi^{m+1} + \lambda\varphi = 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) в неявной форме:

$$\int \varphi^m \left[A - \frac{2\lambda}{a(m+2)} \varphi^{m+2} - \frac{b}{a(m+1)} \varphi^{2m+2}\right]^{-1/2} d\varphi = \pm x + B,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2.4. Точное решение [считается, что $ab(m+1) < 0$]:

$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)e^{\lambda x}\right]^{1/m}, \quad \lambda = \pm m\sqrt{\frac{-b}{a(m+1)}}, \tag{5}$$

где функции $f = f(t)$ и $g = g(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2, \quad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1} fg.$$

Интегрируя, получим

$$f(t) = (C_1 - bmt)^{-1}, \quad g(t) = C_2(C_1 - bmt)^{-\frac{m+2}{m+1}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2.5. Точное решение (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})\right]^{1/m}, \quad \lambda = m\sqrt{\frac{-b}{a(m+1)}}, \tag{6}$$

где функции $f = f(t)$ и $g = g(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2 + \frac{4bmAB}{m+1}g^2, \quad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg. \tag{7}$$

Исключив из этой системы t, получим однородное уравнение первого порядка

$$f'_g = \frac{m+1}{m+2}\frac{f}{g} + \frac{4AB}{m+2}\frac{g}{f}. \tag{8}$$

Замена $\zeta = f/g$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными. Интегрируя, находим решение уравнения (8):

$$f = \pm g\left(4AB + C_1 g^{-\frac{2}{m+2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad C_1 \text{ — любое.}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (7), получим уравнение с разделяющимися переменными для функции $g = g(t)$.

2.6. Точные решения:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \left[f(t) + g(t)\operatorname{ch}(\lambda x)\right]^{1/m}, \\ w(x,t) &= \left[f(t) + g(t)\operatorname{sh}(\lambda x)\right]^{1/m} \end{aligned} \tag{9}$$

являются частными случаями формулы (6) при $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ и $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

2.7. Точное решение [считается, что $ab(m+1) > 0$]:

$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)\cos(\lambda x + C)\right]^{1/m}, \quad \lambda = m\sqrt{\frac{b}{a(m+1)}}, \tag{10}$$

где функции $f = f(t)$ и $g = g(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2 + \frac{bm}{m+1}g^2, \quad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg,$$

которая совпадает с системой (7) при $AB = \frac{1}{4}$.

⊙ *Литература*: M. Bertsch, R. Kersner, L. A. Peletier (1985), В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

3. Случай $k = 1 - m$.

Точное решение:

$$w(x,t) = \left[\frac{1}{F}x^2 + AF^{-\frac{m}{m+2}} - \frac{bm^2}{4a(m+1)}F\right]^{1/m},$$
$$F = F(t) = B - \frac{2a(m+2)}{m}t,$$

где A, B — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: R. Kersner (1978).

4. Случай $k = 1$.

4.1. Точные решения:

$$w(x,t) = e^{bt}(Ax+B)^{\frac{1}{m+1}},$$
$$w(x,t) = e^{bt}\Big(\pm\frac{\lambda m}{a}x + \frac{\lambda^2}{ab}e^{bmt} + A\Big)^{\frac{1}{m}},$$
$$w(x,t) = e^{bt}\left[\frac{bm^2(x-A)^2}{2a(m+2)(B-e^{bmt})}\right]^{\frac{1}{m}},$$
$$w(x,t) = e^{bt}\left[A|e^{bmt}+B|^{-\frac{m}{m+2}} - \frac{bm^2}{2a(m+2)}\frac{(x+C)^2}{e^{bmt}+B}\right]^{\frac{1}{m}},$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные.

4.2. Исходное уравнение с помощью преобразования (Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов, 1972)

$$w(x,t) = e^{bt}v(x,\tau), \quad \tau = \frac{1}{bm}e^{bmt} + \mathrm{const},$$

приводится к уравнению вида 1.1.7.6:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(v^m\frac{\partial v}{\partial x}\Big).$$

⊙ *Литература к уравнению 1.1.8.5*: В. А. Дородницын (1979, 1982), В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983), В. А. Галактионов, В. А. Дородницын, Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский (1986), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

6. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(w^m\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^{m+1} + cw.}$

Преобразование

$$w = e^{ct}u(x,\tau), \quad \tau = \frac{1}{cm}e^{cmt} + \mathrm{const}$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(u^m\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + bu^{m+1}.$$

О его решениях см. 1.1.8.5 при $k = m+1$.

Частный случай. Точное решение при $m = -1$:

$$w = A\exp\Big(ct - \frac{b}{2a}x^2 + Bx\Big),$$

где A, B — произвольные постоянные.

7. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(w^m\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw + cw^{1-m}.}$

Частный случай уравнения 1.6.11.4 при $f(t) = b$, $g(t) = c$.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

8. $\displaystyle \boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(w^m\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^{1+m} + cw + sw^{1-m}.}$

Частный случай уравнения 1.6.11.5 при $f(t) = c$, $g(t) = s$.

Замена $u = w^m$ приводит к уравнению вида 1.1.6.5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + bmu^2 + cmu + sm.$$

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a}{w^2+b^2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

1°. Точные решения (A, B — произвольные постоянные):
$$w(x) = b\,\mathrm{tg}(Ax+B),$$
$$w(x,t) = \pm bx\bigl(A - 2ab^{-2}t - x^2\bigr)^{-1/2},$$
$$w(x,t) = Ab\exp(ab^{-2}t - x)\bigl\{1 - A^2\exp\bigl[2(ab^{-2}t - x)\bigr]\bigr\}^{-1/2}.$$

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:
$$\lambda(kx+\lambda t) + B = \frac{ak^2}{A^2+b^2}\left[\ln|w+A| - \frac{1}{2}\ln(w^2+b^2) + \frac{A}{b}\,\mathrm{arctg}\,\frac{w}{b}\right],$$
где A, B, k, λ — произвольные постоянные.

3°. Замена
$$w = \frac{bu}{\sqrt{1-u^2}} \tag{1}$$
приводит уравнению
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{b^2}\left[(1-u^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right], \tag{2}$$
которое является частным случаем 8.1.3.21 при $F(t,\xi,\eta) = ab^{-2}(\xi - \eta)$. Уравнение (2) имеет точные решения в виде произведения функций разных аргументов
$$\begin{aligned} u &= \frac{Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}}{\sqrt{4AB + Ce^{-kt}}}, & k &= \frac{2a\lambda^2}{b^2};\\ u &= \frac{A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)}{\sqrt{A^2+B^2+Ce^{kt}}}, & k &= \frac{2a\lambda^2}{b^2}, \end{aligned} \tag{3}$$
где A, B, C, λ — произвольные постоянные. Формулы (1), (3) дают два решения исходного уравнения.

⊙ *Литература*: P. W. Doyle, P. J. Vassiliou (1998); см. также пример 10 из разд. А.3.3-2.

4°. Точное решение (C — произвольная постоянная):
$$w = b\,\mathrm{tg}\left(\pm\frac{1}{2}z \pm \frac{a}{b^2}t + C\right),$$
$$z = x^2\cos^{-2}\left(\pm\frac{1}{2}z - \mathrm{arctg}\bigl(\psi(z)\bigr) \pm \frac{a}{b^2}t + C\right),$$
где функция $\psi = \psi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$\psi'_z = \frac{1}{2}(1+\psi^2)\left(\pm 1 - \frac{\psi}{z}\right).$$
В указанном решении зависимость $z = z(x,t)$ задается неявно.

5°. Точное решение (C — произвольная постоянная):
$$w = b\,\mathrm{tg}\left(\varphi(z) + \mathrm{arctg}\bigl(\psi(z)\bigr) + \frac{C}{2}\ln\frac{at}{b^2}\right),$$
$$z = \frac{b^2x^2}{at}\cos^{-2}\left(\varphi(z) + \frac{C}{2}\ln\frac{at}{b^2}\right),$$
где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\varphi'_z = \frac{\psi}{2z}, \quad \psi'_z = \frac{1}{2}(1+\psi^2)\left(\frac{C}{2} - \frac{\psi}{2} - \frac{\psi}{z}\right).$$
В указанном решении зависимость $z = z(x,t)$ задается неявно.

⊙ *Литература*: И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989), N. H. Ibragimov (1994).

1.1.9. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + g\left(x,t,w,\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bx^m w^{-1/3}$.

При $m = 0$ см. уравнение 1.1.7.4. При $m \neq 0$ исходное уравнение можно привести к более простому уравнению, соответствующему случаю $b = 0$ [см. уравнение 1.6.11.1 при $f(x) = bx^m$].

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Частный случай уравнения 1.6.11.7 при $m=-2$, $f(t)=a$, $g(t)=b$, $h(t)=c$.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$w(x,t) = e^{ct}u(z,\tau), \quad z = x + bt + A, \quad \tau = B - \frac{1}{2c}e^{-2ct}$$

приводит к уравнению вида 1.1.7.3:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\Big(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983); рассматривался случай $b=0$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\dfrac{a}{(w+b)^2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + c\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$u(z,t) = w(x,t) + b, \qquad z = x + ct$$

приводит к уравнению вида 1.1.7.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\Big(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw\dfrac{\partial w}{\partial x} = b\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Точное решение (C_1, C_2 — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \frac{ax + b\ln|t+C_1| + C_2}{a^2(t+C_1)}.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw\dfrac{\partial w}{\partial x} = b\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^2\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$2b\int\frac{w^2\,dw}{aw^2 + 2\lambda w + C_1} = x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (x+C)f(t).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а функция $f=f(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f_t' + af^2 = 2bf^3,$$

решение которого можно представить в неявной форме:

$$\frac{1}{af} + \frac{2b}{a^2}\ln\Big|\frac{2bf-a}{f}\Big| = t + C_1.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(bw^2+cw)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Точное решение:

$$w(x,t) = f(t)x + g(t),$$

где функции $f=f(t)$ и $g=g(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_t' + af^2 = 2bf^3,$$
$$g_t' + afg = 2bf^2g + cf^2.$$

Решение первого уравнения приведено в 1.1.9.5, п. 2°. Второе уравнение легко интегрируется, поскольку линейно относительно g.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bt^n w.$

Частный случай уравнения 1.6.11.2 при $f(t) = bt^n$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + be^{\lambda t} w.$

Частный случай уравнения 1.6.11.2 при $f(t) = be^{\lambda t}$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bt^n w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.11.3 при $f(t) = bt^n$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + be^{\lambda t} w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.11.3 при $f(t) = be^{\lambda t}$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bt^n w + ct^k w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.11.4 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^k$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + be^{\lambda t} w + ce^{\mu t} w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.11.4 при $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^{1+m} + ct^n w + st^k w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 1.6.11.5 при $f(t) = ct^n$, $g(t) = st^k$.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bx^n w^{1+m}.$

Частный случай уравнения 1.6.11.5 при $f(x) = bx^n$.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + w\dfrac{\partial w}{\partial x} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$2a\int \frac{w^n\,dw}{w^2 + 2\lambda w + C_1} = x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Автомодельное решение при $n \neq 2$:

$$w(x,t) = u(z)t^{1/(n-2)}, \quad z = xt^{-(n-1)/(n-2)},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au^n u''_{zz} + 2anu^{n-1}(u'_z)^2 - \Big(u - \frac{n-1}{n-2}z\Big)u'_z - \frac{1}{n-2}u = 0.$$

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^\lambda \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + aw^\lambda \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^{\lambda-1}\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2.$

1°. Точное решение при $b = \frac{1}{3}\lambda(a-2) - a - 1$:

$$w(x,t) = \Big[\lambda \sum_{k=0}^{3} \varphi_k(t)x^k\Big]^{1/\lambda}.$$

Здесь

$$\varphi_3(t) = A, \quad \varphi_2(t) = \int \psi(t)\,dt + B, \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{3A}\Big[\int \psi(t)\,dt + B\Big]^2 + \frac{1}{2A\beta\lambda}\psi(t),$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{27A^2}\Big[\int \psi(t)\,dt + B\Big]^3 + \frac{1}{6A^2\beta\lambda}\psi(t)\Big[\int \psi(t)\,dt + B\Big] + \frac{1}{12A^2\beta^2\lambda^2}\psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ задается неявно

$$\int \big(C_1 - \tfrac{8}{3}\beta\lambda\psi^3\big)^{-1/2}\,d\psi = C_2 + t,$$

A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\beta = a + 1$; $A \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $a > -1$.

2°. Точное решение при $b = \frac{1}{4}\lambda(a-3) - a - 1$:

$$w(x,t) = \Big[\lambda \sum_{k=0}^{4} \varphi_k(t) x^k\Big]^{1/\lambda}.$$

Здесь функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_0' &= -\tfrac{3}{4}\beta\varphi_1^2 + 2\beta\varphi_2\varphi_0,\\
\varphi_1' &= -\beta\varphi_1\varphi_2 + 6\beta\varphi_3\varphi_0,\\
\varphi_2' &= -\beta\varphi_2^2 + \tfrac{3}{2}\beta\varphi_1\varphi_3 + 12\beta\varphi_4\varphi_0,\\
\varphi_3' &= -\beta\varphi_2\varphi_3 + 6\beta\varphi_1\varphi_4,\\
\varphi_4' &= -\tfrac{3}{4}\beta\varphi_3^2 + 2\beta\varphi_2\varphi_4,
\end{aligned}$$

где $\beta = \lambda(a+1)$, штрих обозначает производную по t.

⦿ *Литература*: Г. А. Рудых, Э. И. Семенов (1998); в этой работе указаны также другие точные решения.

1.1.10. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^{4-k} w^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 1.6.14.1.

Преобразование

$$w(x,t) = xu(z,t), \quad z = 1/x$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.6.8:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au^k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n w^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Замена $u = w^{1-k}$ приводит к уравнению вида 1.1.10.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ax^n \frac{\partial}{\partial x}\Big(u^{\frac{k}{1-k}} \frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

2°. Преобразование

$$w(x,t) = xu(z,t), \quad z = 1/x$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = az^{4-n-k} u^k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^{\frac{3m+4}{m+1}} \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 1.1.10.4.

Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1}{m+1}} u(z,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.7.6:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса и является частным случаем уравнения 1.6.15.13 при $f(w) = aw^m$. При $n = 0$ см. уравнение 1.1.7.6.

1°. Точные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$
\begin{aligned}
w(x) &= (Ax+B)^{\frac{1}{m+1}},\\
w(x,t) &= k(\lambda t + A)^{-\frac{1}{m}} x^{\frac{2-n}{m}}, \quad k = \left[\frac{m\lambda}{a(n-2)(2+m-n-nm)}\right]^{\frac{1}{m}},\\
w(x,t) &= t^{(1-n)\beta}\left[\frac{m\beta}{a(2-n)}\left(xt^{\beta}\right)^{2-n} + A\right]^{\frac{1}{m}}, \quad \beta = \frac{1}{nm+n-m-2},\\
w(x,t) &= \exp(-\lambda t)\left[\frac{\lambda}{a}(m+1)^2 x^{\frac{m}{m+1}} \exp(\lambda m t) + A\right]^{\frac{1}{m}}, \quad n = \frac{m+2}{m+1}.
\end{aligned}
$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (\lambda t + A)^{-1/m} f(x),$$

где функция $f = f(x)$ выражается через решения уравнения Эмдена — Фаулера:

$$F''_{xx} + \frac{\lambda(m+1)}{am} x^{-n} F^{\frac{1}{m+1}} = 0, \qquad F = f^{m+1}. \tag{1}$$

Частному решению этого уравнения степенного вида отвечает второе решение исходного уравнения в п. 1°.

Уравнение (1) допускает понижение порядка и подробно исследуется в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*), где приведены его точные решения для 26 различных пар значений параметров n, m.

3°. Автомодельное решение при $n \neq -2$:

$$w = w(z), \quad z = xt^{\frac{1}{n-2}} \qquad (0 < x < \infty)$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(2-n)\left(w^m w'_z\right)'_z + z^{1-n} w'_z = 0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993) приведено общее решение уравнения (2) при $m = -1$ и любом n.

4°. Автомодельное решение:

$$w = t^{\alpha} g(\zeta), \quad \zeta = xt^{\beta}, \qquad \beta = \frac{m\alpha+1}{n-2}, \quad \alpha \text{ — любое},$$

где функция $g(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\zeta^n\left(g^m g'_\zeta\right)'_\zeta = \beta\zeta g'_\zeta + \alpha g. \tag{3}$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода).

В частном случае

$$\alpha = \frac{1-n}{nm+n-m-2}, \quad \beta = \frac{1}{nm+n-m-2}$$

первый интеграл уравнения (3) имеет вид

$$ag^m g'_\zeta = \beta\zeta^{1-n} g + C. \tag{4}$$

Значению $C = 0$ в (4) соответствует третье решение в п. 1°.

В общем случае замена $G = g^{m+1}$ приводит (3) к уравнению

$$G''_{\zeta\zeta} = A_1\zeta^{1-n} G^{-\frac{m}{m+1}} G'_\zeta + A_2\zeta^{-n} G^{\frac{1}{m+1}}, \tag{5}$$

где $A_1 = \beta/a$, $A_2 = \alpha(m+1)/a$. Точные аналитические решения уравнения (5) при различных значениях параметров n, m приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

5°. Точное решение:

$$w = e^{\lambda(n-2)t}\varphi(u), \quad u = xe^{\lambda mt}, \qquad \lambda \text{ — любое},$$

где функция $\varphi(u)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au^n(\varphi^m\varphi'_u)'_u = \lambda mu\varphi'_u + \lambda(n-2)\varphi. \tag{6}$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода).

В частном случае $n = \dfrac{m+2}{m+1}$ уравнение (6) имеет первый интеграл вида

$$a\varphi^m\varphi'_u = \lambda mu^{-\frac{1}{m+1}}\varphi + C.$$

Значению $C = 0$ соответствует последнее решение в п. 1°.

В общем случае замена $\Phi = \varphi^{m+1}$ приводит (6) к уравнению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (5).

6°. При $n = 2$ существуют решения вида

$$w = w(\xi), \quad \xi = \ln|x| - \lambda t,$$

которые определяются неявно

$$a(m+1)\int \frac{w^m\,dw}{aw^{m+1} - \lambda(m+1)w + C_1} = \xi + C_2,$$

где λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Частному случаю $C_1 = 0$ соответствует решение

$$w(x,t) = \left[\frac{\lambda(m+1)}{a} + C|x|^{\frac{m}{m+1}}\exp\Bigl(-\frac{m\lambda}{m+1}t\Bigr)\right]^{\frac{1}{m}},$$

где C — произвольная постоянная.

7°. Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1}{m+1}}u(z,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = az^{\frac{4+3m-n-nm}{m+1}}\frac{\partial}{\partial z}\Bigl(u^m\frac{\partial u}{\partial z}\Bigr).$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\Bigl(\dfrac{ax+b}{cw+k}\Bigr)^2\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Преобразование

$$z = ax+b, \quad u = \frac{cw+k}{ax+b} \qquad (a,\ c \neq 0)$$

приводит к уравнению вида 1.1.7.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial}{\partial z}\Bigl(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\Bigr).$$

⊙ *Литература*: A. Munier, J. R. Burgan, J. Gutierres, E. Fijalkow, M. R. Feix (1981).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(x^nw^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

Частный случай уравнения 1.6.15.4 при $f(x) = ax^n$.

1°. Пусть $m \neq -1$, $2m - 2n - nm + 3 \neq 0$. Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1-n}{m+1}}u(\xi,t), \quad \xi = x^{\frac{2m-2n-nm+3}{m+1}}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\Bigl(\xi^{\frac{3m-3n-2nm+4}{2m-2n-nm+3}}u^m\frac{\partial u}{\partial \xi}\Bigr), \tag{1}$$

где $A = a\Bigl(\dfrac{2m-2n-nm+3}{m+1}\Bigr)^2$.

2°. В частном случае $n = \dfrac{3m+4}{2m+3}$ преобразованное уравнение сильно упрощается и совпадает (с точностью до переобозначений) с уравнением 1.1.7.6:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

3°. В частном случае $n = 2$, $m = -2$ преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u^{-2} \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

и совпадает с уравнением 1.1.7.3 (которое приводится к линейному уравнению теплопроводности).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Это уравнение встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса. При $n = 0$ см. уравнение 1.1.7.6. Значению $n = 1$ соответствуют плоские задачи с осевой симметрией, а значению $n = 2$ — сферически-симметричные задачи. В теории статистической турбулентности встречаются уравнения при $n = 5$.

Точные решения:

$$w(x) = \left(Ax^{1-n} + B\right)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$w(x,t) = \left[\frac{m(\pm x + A)^2}{B - kt}\right]^{\frac{1}{m}}, \quad k = 2a(nm + m + 2),$$

$$w(x,t) = \left[A(kt+B)^{-\frac{m(n+1)}{nm+m+2}} - \frac{mx^2}{kt+B}\right]^{\frac{1}{m}}, \quad k = 2a(nm + m + 2),$$

$$w(x,t) = \left[A\exp\left(-\frac{4a\lambda}{m}t\right) + \lambda x^2\right]^{\frac{1}{m}}, \quad n = -\frac{m+2}{m},$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец (1950), Г. И. Баренблатт (1952, 1978), Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер (1966), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), Л. И. Седов (1972).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = k(ax^2 + bx + c)^m w^{4-2m}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Частный случай уравнения 1.6.14.5 при $f(u) = ku^{-2m}$.

1°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int\frac{dx}{ax^2+bx+c} \tag{1}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku^{4-2m}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k(ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^{5-2m}, \tag{2}$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$ и решение в виде произведения функций различных аргументов $u = f(t)g(z)$.

Используя замену $\varphi = u^{2m-3}$, из (2) получим уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi^n \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + p\varphi^{n+1},$$

$$n = \frac{4-2m}{2m-3}, \quad p = k(2m-3)(ac - \tfrac{1}{4}b^2),$$

которое допускает широкий класс точных решений (см. 1.1.8.5, второй случай).

2°. Исходное уравнение преобразованием

$$w(x,t) = \big[v(\xi,t)\big]^{\frac{1}{2m+3}}, \quad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}, \tag{3}$$

приводится к дивергентному виду (см. уравнение 1.1.10.7)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[F(\xi) v^{\frac{4-2m}{2m-3}} \frac{\partial v}{\partial \xi}\right], \tag{4}$$

где функция $F(\xi)$ задается параметрически следующими формулами:

$$F(\xi) = \frac{k}{(ax^2+bx+c)^m}, \quad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}. \tag{5}$$

Отметим некоторые частные случаи уравнения (4), когда функцию $F = F(\xi)$ можно записать в явном виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\cos^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=1, \quad a=1, \quad b=0, \quad c=1;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=1, \quad a=-1, \quad b=0, \quad c=1;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi^{-3/2}}{\cos\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=\frac{1}{2}, \quad a=-1, \quad b=0, \quad c=1.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

1.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями

1.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda w}$.

1°. Решение типа бегущей волны (k, β — произвольные постоянные):

$$w = w(z), \quad z = kx + \beta t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ak^2 w''_{zz} - \beta w'_z + be^{\lambda w} = 0.$$

2°. Точное решение:

$$w = u(\xi) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$au''_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\xi u'_\xi + \frac{1}{\lambda} + be^{\lambda u} = 0.$$

⊙ *Литература*: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a + be^{\lambda w}$.

Это уравнение встречается в теории тепло- и массопереноса и теории горения.

1°. Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{2}{\lambda}\ln\big[\beta + C\exp\big(\pm\mu x - \tfrac{1}{2}a\lambda t\big)\big],$$
$$w(x,t) = -\frac{2}{\lambda}\ln\big[-\beta + C\exp\big(\pm\mu x - \tfrac{1}{2}a\lambda t\big)\big], \qquad \beta = \sqrt{-\frac{b}{a}}, \ \mu = \sqrt{\frac{a\lambda}{2}}.$$

2°. Более широкий класс точных решений типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = x + \sigma t$$

описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} - \sigma w'_z + a + be^{\lambda w} = 0. \qquad (1)$$

Замена $u(w) = w'_z$ приводит (1) к уравнению Абеля

$$uu'_w - \sigma u + a + be^{\lambda w} = 0. \qquad (2)$$

При $\sigma = 1$, $b = -a$, $\lambda = 2/a$ общее решение уравнения (2) можно записать в параметрическом виде

$$w = a\ln\left|\frac{\tau^2+1}{\tau}\left(\operatorname{arctg}\tau + C\right)\right|, \quad u = \frac{a}{\tau}\left[\tau + (\tau^2-1)(\operatorname{arctg}\tau + C)\right].$$

⦿ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a + be^{\lambda w} + ce^{2\lambda w}$.

Уравнения этого вида встречаются в теории тепло- и массопереноса и теории горения.

1°. Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left[\beta + C\exp(\mu x - a\lambda t)\right], \qquad (1)$$

где параметры β, μ определяются путем решения двух алгебраических уравнений

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0, \qquad (2)$$

$$\beta^2\mu^2 + \lambda c = 0. \qquad (3)$$

Квадратное уравнение (2) для β решается независимо. В общем случае система (2)–(3) дает четыре набора искомых параметров, которым отвечают четыре точных решения исходного уравнения.

Решения (1) являются частными случаями более широкого класса решений типа бегущей волны $w = w(x + \sigma t)$.

2°. Замена $u = e^{-\lambda w}$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$u\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - a\lambda u^2 - b\lambda u - c\lambda.$$

Частному решению этого уравнения вида $u = \beta + C\exp(\lambda t + \mu x)$ соответствует решение (1).

⦿ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

1.2.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Это уравнение описывает нестационарный теплоперенос в неподвижной среде, когда коэффициент температуропроводности экспоненциально зависит от температуры.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_3t + C_4) + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{C_3}{C_1^2},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения (A, B, C, μ — произвольные постоянные):

$$w(x) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax + B),$$

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln(C - a\lambda\mu t) + \frac{1}{\lambda}\ln\left(\tfrac{1}{2}\lambda\mu x^2 + Ax + B\right).$$

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$x + \beta t + C_1 = a\int\frac{e^{\lambda w}\,dw}{\beta w + C_2}.$$

4°. Существуют точные решения следующего вида ($\lambda = 1$):

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= f_1(y), & y &= x/\sqrt{t},\\
w(x,t) &= 2t + f_2(\theta), & \theta &= xe^{-t},\\
w(x,t) &= x + f_3(\xi), & \xi &= te^{x},\\
w(x,t) &= C\ln x + f_4(\zeta), & \zeta &= tx^{C-2},
\end{aligned}
$$

где C, β — произвольные постоянные. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $f_1(y)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\xi)$, $f_4(\zeta)$.

⊙ *Литература*: Л. В. Овсянников (1959, 1978), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^w \frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + a.$

1°. Точные решения:

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= at + B + \ln|Ax + C|,\\
w(x,t) &= at + B - \ln\biggl|\frac{1 - 2\exp(at+B)}{a(x+A)^2}\biggr|,
\end{aligned}
$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Преобразование

$$w = at + u(x,\tau), \quad \tau = \frac{1}{a}e^{at} + \mathrm{const}$$

приводит к уравнению вида 1.2.2.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^u \frac{\partial u}{\partial x}\Bigr).$$

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^w \frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) - a^2 e^w.$

Точные решения:

$$w(x,t) = \ln\biggl|\frac{\pm a\exp[2(\pm ax + B)] + 2\exp(\pm ax + B) + A}{2a^2(t+C)}\biggr| \mp ax - B,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^w \frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + ae^w.$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов (C_1, C_2 — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = u(x) - \ln(C_1 t + C_2),$$

где функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{xx} + (u'_x)^2 + C_1 e^{-u} + a = 0.$$

Интегрируя, получим его решение в неявном виде

$$\int (C_3 e^{-2u} - 2C_1 e^{-u} - a)^{-1/2}\, du = \pm x + C_4.$$

2°. Замена $u = e^w$ приводит к уравнению вида 1.1.6.5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au^2.$$

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^w \frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + ae^w + b, \qquad a \neq 0, \quad b \neq 0.$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $a = k^2 > 0$:

$$w(x,t) = \ln\bigl[C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx)\bigr] + bt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $a = -k^2 < 0$:

$$w(x,t) = \ln\bigl[C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx)\bigr] + bt + C_3.$$

3°. Преобразование

$$w = bt + u(x,\tau), \quad \tau = \frac{1}{b}e^{bt} + \text{const}$$

приводит к уравнению вида 1.2.2.4:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + ae^u.$$

6. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^w \frac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w}, \qquad \lambda \neq 0, \quad \lambda \neq 1.$

Точное решение:

$$w(x,t) = u(z) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \qquad z = 2\ln x + \frac{1-\lambda}{\lambda}\ln t,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2a\lambda e^{-z}\bigl[2(e^u u'_z)'_z - e^u u'_z\bigr] + b\lambda e^{\lambda u} = (1-\lambda)u'_z - 1.$$

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w} + c + se^{-\lambda w}.$

Частный случай уравнения 1.6.12.4 при $f(t) = c$, $g(t) = s$.

⊙ *Литература:* В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

8. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n.$

Частный случай уравнения 1.6.12.1 при $f(t) = bt^n$.

9. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\mu t}.$

Частный случай уравнения 1.6.12.1 при $f(t) = be^{\mu t}$.

10. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w} + ce^{\mu t}.$

Частный случай уравнения 1.6.12.4 при $f(t) = ce^{\mu t}$, $g(t) = 0$.

11. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n e^{-\lambda w}.$

Частный случай уравнения 1.6.12.2 при $f(t) = 0$, $g(t) = bt^n$.

12. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{-\lambda w + \mu t}.$

Частный случай уравнения 1.6.12.2 при $f(t) = 0$, $g(t) = be^{\mu t}$.

13. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\mu t} + ce^{-\lambda w + \nu t}.$

Частный случай уравнения 1.6.12.2 при $f(t) = be^{\mu t}$, $g(t) = ce^{\nu t}$.

14. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x}\right) + (bx + c)e^{\lambda w}.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов (C — произвольная постоянная):

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx} + \lambda(bx + c)\psi + \lambda = 0, \qquad \psi = e^{\lambda\varphi}.$$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + be^{\lambda w+\mu x}$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов (C — произвольная постоянная):

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx} + \lambda b e^{\mu x}\psi + \lambda = 0, \qquad \psi = e^{\lambda\varphi}.$$

1.2.3. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{\lambda w+bx+ct}$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = ce^{z+\lambda w}$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\dfrac{\partial w}{\partial x} + a + be^{\lambda w} + ce^{2\lambda w}$.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \beta t$, получим более простое уравнение вида 1.2.1.3:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + a + be^{\lambda w} + ce^{2\lambda w}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.6.2.9 при $f(w) = be^{\lambda w}$.

Помимо решения типа бегущей волны $w = w(x+\lambda t)$ существует также точное решение вида

$$w = \varphi(\xi) - \frac{1}{2\lambda}\ln t, \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\lambda\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + be^{\beta x+\mu t-\lambda w}$.

Частный случай уравнения 1.6.3.9 при $f(x,t) \equiv 0$, $g(x,t) = be^{\beta x+\mu t}$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\lambda w}\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2$.

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = ae^{\lambda w}$.

Замена

$$u = \int \exp\Big(\frac{a}{\lambda}e^{\lambda w}\Big)\,dw$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + w\dfrac{\partial w}{\partial x} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$.

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$2a\int\frac{e^w\,dw}{w^2 + 2\lambda w + C_1} = x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(z) + \ln t, \quad z = \frac{x}{t} - \ln t,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(u - z - 1)u'_z + 1 = a(e^u u'_z)'_z.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$.

Частный случай уравнения 1.6.15.11 при $f(x) = ax^n$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^{\lambda w+\mu x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

Частный случай уравнения 1.6.15.11 при $f(x) = ae^{\mu x}$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(we^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

Решение типа бегущей волны (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\Bigl(Ax + \frac{a}{\lambda}A^2t + B\Bigr).$$

⊙ *Литература*: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

1.3. Уравнения с гиперболическими нелинейностями

1.3.1. Уравнения, содержащие гиперболический косинус

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{ch}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(z,w) = b\operatorname{ch}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\operatorname{ch}^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\operatorname{ch}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c\operatorname{ch}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.11 при $f(w) = 0$, $h(w) = c\operatorname{ch}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{ch}^k(\lambda w)\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = b\operatorname{ch}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{ch}^k(\lambda w)\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + c\operatorname{ch}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.5.10 при $f(w) = b\operatorname{ch}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\operatorname{ch}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + 2b\operatorname{ch}(\lambda w) + c\operatorname{ch}^k(\beta t).$

Частный случай уравнения 1.6.12.4 при $f(t) = c\operatorname{ch}^k(\beta t)$, $g(t) = b$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[\operatorname{ch}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr].$

Частный случай уравнения 1.6.13.1 при $f(w) = a\operatorname{ch}^k(\beta w)$.

1.3.2. Уравнения, содержащие гиперболический синус

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{sh}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(z,w) = b\operatorname{sh}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\operatorname{sh}^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\operatorname{sh}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c\operatorname{sh}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.11 при $f(w) = 0$, $h(w) = c\operatorname{sh}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{sh}^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = b\,\mathrm{sh}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{sh}^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + c\,\mathrm{sh}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.5.10 при $f(w) = b\,\mathrm{sh}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\,\mathrm{sh}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + 2b\,\mathrm{sh}(\lambda w) + c\,\mathrm{sh}^k(\beta t).$

Частный случай уравнения 1.6.12.4 при $f(t) = c\,\mathrm{sh}^k(\beta t)$, $g(t) = -b$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\mathrm{sh}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Частный случай уравнения 1.6.13.1 при $f(w) = a\,\mathrm{sh}^k(\beta w)$.

1.3.3. Уравнения, содержащие гиперболический тангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{th}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(z, w) = b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\,\mathrm{th}^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z, w) = \beta\,\mathrm{th}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c\,\mathrm{th}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.11 при $f(w) = 0$, $h(w) = c\,\mathrm{th}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + c\,\mathrm{th}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.5.10 при $f(w) = b\,\mathrm{th}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\,\mathrm{th}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\mathrm{th}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Частный случай уравнения 1.6.13.1 при $f(w) = a\,\mathrm{th}^k(\beta w)$.

1.3.4. Уравнения, содержащие гиперболический котангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{cth}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(z, w) = b\,\mathrm{cth}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\,\mathrm{cth}^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z, w) = \beta\,\mathrm{cth}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c\,\mathrm{cth}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.11 при $f(w) = 0$, $h(w) = c\,\mathrm{cth}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\coth^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = b\coth^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\coth^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + c\coth^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.5.10 при $f(w) = b\coth^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\coth^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\coth^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Частный случай уравнения 1.6.13.1 при $f(w) = a\coth^k(\beta w)$.

1.4. Уравнения с логарифмическими нелинейностями

1.4.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\ln w.$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(w) = b\ln w$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw\ln w.$

Частный случай уравнения 1.6.1.1.

1°. Точные решения (A, B, C — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \exp\Big(Ae^{at}x + \frac{A^2}{a}e^{2at} + Be^{at}\Big),$$
$$w(x,t) = \exp\big[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}a(x+A)^2 + Be^{at}\big],$$
$$w(x,t) = \exp\Big[-\frac{a(x+A)^2}{4(1+Be^{-at})} + \frac{1}{2B}e^{at}\ln(1+Be^{-at}) + Ce^{at}\Big].$$

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын (1979, 1982), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\big[Ae^{at} + f(x)\big], \tag{1}$$

где функция $f(x)$ задается неявно с помощью равенства

$$\int\big(Be^{-2f} - af + \tfrac{1}{2}a\big)^{-1/2}df = \pm x + C. \tag{2}$$

В формулы (1), (2) входят три произвольные постоянные: A, B, C.

3°. Существуют более сложные решения вида

$$w(x,t) = \exp\big[Ae^{at} + f(x+bt)\big],$$

где функция $f(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f''_{\xi\xi} + (f'_\xi)^2 - bf'_\xi + af = 0.$$

4°. Замена

$$w(x,t) = \exp\big(Ae^{at}\big)u(x,t)$$

где A — произвольная постоянная, приводит к уравнению такого же вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au\ln u.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw\ln w + bw.$

Замена $w = e^{-b/a}u$ приводит к уравнению вида 1.4.1.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au\ln u.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw\ln w + (bx + c)w.$

Частный случай уравнений 1.6.1.5 и 1.6.1.7.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw\ln w + (bx + ct + k)w.$

Частный случай уравнения 1.6.1.7.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw\ln w + (bx^2 + cx + k)w.$

Частный случай уравнения 1.6.1.9.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a(w + b)\ln^2(w + b).$

Замена $w = e^u - b$ приводит к уравнению вида 1.1.4.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + au^2. \tag{1}$$

Точные решения уравнения (1) при $a < 0$:

$$u(x,t) = C_1 \exp\bigl(-at \pm x\sqrt{-a}\,\bigr),$$
$$u(x,t) = \frac{1}{C_1 - at} + \frac{C_2}{(C_1 - at)^2}\exp\bigl(-at \pm x\sqrt{-a}\,\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Уравнение (1) имеет также точные решения вида

$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[A\exp(x\sqrt{-a}\,) + A\exp(x\sqrt{-a}\,)\bigr] \quad \text{при} \quad a < 0,$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[A\sin(x\sqrt{a}\,) + A\cos(x\sqrt{a}\,)\bigr] \quad \text{при} \quad a > 0.$$

Подробности см. в 1.1.4.3.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989); рассматривался случай $a > 0$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 + kw)\bigl[a\ln^2(1 + kw) + b\ln(1 + kw) + c\bigr].$

Частный случай уравнения 1.6.1.10.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989).

1.4.2. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\ln w.$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + at$, получим более простое уравнение вида 1.4.1.2:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bw\ln w.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw\ln w.$

Частный случай уравнения 1.6.2.6 при $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c$, $p(t) = s(t) = 0$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw\ln w.$

Частный случай уравнения 1.6.2.6 при $f(t) = b$, $g(t) = 0$, $h(t) = c$, $p(t) = s(t) = 0$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{a}{x^k}\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(x^k\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + bw\ln w.$

Значения $k = 1$ и $k = 2$ отвечают задачам с радиальной и центральной симметрией.

1°. Точное решение (A, B — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \exp\Big[-\frac{bx^2}{4a(1-Ae^{-bt})} + Be^{bt} - \frac{1}{2}a(k+1)e^{bt}\ln(1-Ae^{-bt})\Big].$$

⊙ *Литература*: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

2°. Точное решение (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \exp\big(Ae^{bt}\big)\theta(x),$$

где функция $\theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{a}{x^k}\frac{d}{dx}\Big(x^k\frac{d\theta}{dx}\Big) + b\theta\ln\theta = 0.$$

3°. Замена

$$w(x,t) = \exp\big(Ae^{bt}\big)u(x,t) \qquad (A \text{ — произвольная постоянная})$$

приводит к уравнению такого же вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^k}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^k\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + bu\ln u.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\ln^k(bw)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = a\ln^k(bw)$.

1.5. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями

1.5.1. Уравнения, содержащие косинус

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\cos^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(z,w) = b\cos^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\cos^k(\lambda w + bx + ct).$

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\cos^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c\cos^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.11 при $f(w) = 0$, $h(w) = c\cos^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\cos^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = b\cos^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\cos^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + c\cos^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.5.10 при $f(w) = b\cos^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\cos^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\cos^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Частный случай уравнения 1.6.13.1 при $f(w) = a\cos^k(\beta w)$.

1.5.2. Уравнения, содержащие синус

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\sin^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(z,w) = b\sin^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \sin^k(\lambda w + bx + ct)$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta \sin^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c\sin^k(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 1.6.2.11 при $f(w) = 0$, $h(w) = c\sin^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\sin^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2$.

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = b\sin^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\sin^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + c\sin^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.6.5.10 при $f(w) = b\sin^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\sin^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\sin^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$.

Частный случай уравнения 1.6.13.1 при $f(w) = a\sin^k(\beta w)$.

1.5.3. Уравнения, содержащие тангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(z,w) = b\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\,\mathrm{tg}^k(\lambda w + bx + ct)$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\,\mathrm{tg}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 1.6.2.11 при $f(w) = 0$, $h(w) = c\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2$.

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = b\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + c\,\mathrm{tg}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 1.6.5.10 при $f(w) = b\,\mathrm{tg}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\,\mathrm{tg}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\mathrm{tg}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$.

Частный случай уравнения 1.6.13.1 при $f(w) = a\,\mathrm{tg}^k(\beta w)$.

1.5.4. Уравнения, содержащие котангенс

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 1.6.1.1 при $f(z,w) = b\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta\,\mathrm{ctg}^k(\lambda w + bx + ct)$.

Частный случай уравнения 1.6.1.2 при $f(z,w) = \beta\,\mathrm{ctg}^k(z + \lambda w)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c\operatorname{ctg}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 1.6.2.11 при $f(w) = 0$, $h(w) = c\operatorname{ctg}^k(\lambda w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{ctg}^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2.$

Частный случай уравнения 1.6.5.8 при $f(w) = b\operatorname{ctg}^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\operatorname{ctg}^k(\lambda w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + c\operatorname{ctg}^k(\beta t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 1.6.5.10 при $f(w) = b\operatorname{ctg}^k(\lambda w)$, $g(t) = 0$, $h(t) = c\operatorname{ctg}^k(\beta t)$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\operatorname{ctg}^k(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Частный случай уравнения 1.6.13.1 при $f(w) = a\operatorname{ctg}^k(\beta w)$.

1.6. Уравнения, содержащие произвольные функции

1.6.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w).$

Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова. Уравнения этого вида часто встречаются в различных задачах тепло- и массопереноса (f — скорость объемной химической реакции), теории горения, биологии и экологии. Для функций $f = f(w)$ степенного, экспоненциального и логарифмического вида см. соответственно уравнения 1.1.1.1–1.1.1.7, 1.2.1.1–1.2.1.3 и 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7, 1.4.1.8.

1°. Решение, однородное по пространственной координате $w = w(t)$:

$$\int \frac{dw}{f(w)} = t + C, \qquad C \text{ — произвольная постоянная.}$$

2°. Стационарное решение $w = w(x)$:

$$\int \Big[C_1 + \frac{2}{a}\int f(w)\,dw\Big]^{-1/2} dw = C_2 \pm x.$$

3°. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad \pm z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная. Функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} - \lambda w'_z + f(w) = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$z = (a/\lambda)\xi, \quad u(w) = w'_\xi$$

приводит (1) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u + a\lambda^{-2} f(w) = 0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*) приведено много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $f = f(w)$.

4°. В разд. А.3.2-1 (см. пример 1) приведено точное решение данного уравнения с функцией $f(w)$, заданной в параметрической форме.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(bx + ct, w).$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = bx + ct,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ab^2 w''_{\xi\xi} - cw'_\xi + f(\xi, w) = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{1}{t} f\Big(\dfrac{x}{\sqrt{t}}, w\Big).$

Преобразование

$$\tau = \ln t, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(\xi, w),$$

которое допускает точные решения вида $w = w(\xi)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\ln w + f(t)w.$

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\Big[Ae^{bt}x + Be^{bt} + \frac{a}{b}A^2 e^{2bt} + e^{bt}\int e^{-bt} f(t)\,dt\Big],$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\big[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\big].$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t) = \frac{be^{bt}}{A - 4ae^{bt}}, \quad \psi(t) = Be^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}\big[2a\varphi(t) + f(t)\big]\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

3°. Существуют также точные решения более общего вида

$$w(x,t) = \exp\big[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\big],$$

где функции $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_0(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. уравнение 1.6.1.9), которая может быть проинтегрирована.

4°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\Big[Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt} f(t)\,dt + \Phi(x + \lambda t)\Big],$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\Phi = \Phi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\Phi''_{zz} + a(\Phi'_z)^2 - \lambda\Phi'_z + b\Phi = 0,$$

порядок которого можно понизить на единицу.

5°. Замена

$$w(x,t) = \exp\Big[e^{bt}\int e^{-bt} f(t)\,dt\Big]u(x,t)$$

приводит исходное уравнение к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu\ln u.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\ln w + \bigl[f(x) + g(t)\bigr]w.$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\Bigl[Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt\Bigr]\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b\varphi\ln\varphi + f(x)\varphi = 0.$$

2°. Замена

$$w(x,t) = \exp\Bigl[e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt\Bigr]u(x,t)$$

приводит исходное уравнение к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu\ln u + f(x)u.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w\ln w + g(t)w.$

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\Phi(t)x + \Psi(t)\bigr],$$

где функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ определяются по формулам

$$\Phi(t) = Ae^F, \quad \Psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(aA^2e^{2F} + g)\,dt, \qquad F = \int f\,dt,$$

A, B — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t) = e^F\Bigl(A - 4a\int e^F dt\Bigr)^{-1}, \quad F = \int f\,dt,$$

$$\psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(2a\varphi + g)\,dt,$$

A, B — произвольные постоянные.

Существуют также точные решения более общего вида

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_0(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. уравнение 1.6.1.9), которая может быть проинтегрирована.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w\ln w + \bigl[g(t)x + h(t)\bigr]w.$

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t) = Ae^F + e^F\int e^{-F}g\,dt, \quad F = \int f\,dt,$$

$$\psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(a\varphi^2 + h)\,dt,$$

A, B — произвольные постоянные.

2°. Существуют также точные решения более общего вида

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_0(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. уравнение 1.6.1.9), которая может быть проинтегрирована.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w\ln w + \bigl[bf(x)t + g(x)\bigr]w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[-bt + \varphi(x)\bigr],$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + a(\varphi'_x)^2 + f(x)\varphi + g(x) + b = 0.$$

При $f,\, g = \mathrm{const}$ это уравнение подстановкой $u(\varphi) = (\varphi'_x)^2$ приводится к линейному уравнению первого порядка.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w\ln w + \bigl[g(t)x^2 + h(t)x + s(t)\bigr]w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_n(t)$ $(n = 1,\, 2,\, 3)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h, s не указываются, штрих обозначает производную по t)

$$\varphi_2' = 4a\varphi_2^2 + f\varphi_2 + g, \tag{1}$$

$$\varphi_1' = 4a\varphi_2\varphi_1 + f\varphi_1 + h, \tag{2}$$

$$\varphi_0' = f\varphi_0 + a\varphi_1^2 + 2a\varphi_2 + s. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f и g.

Если решение уравнения (1) известно, то решения уравнений (2), (3) строятся последовательно (каждое из них линейно относительно искомой функции).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bw + c)\bigl[k\ln^2(bw + c) + f(t)\ln(bw + c) + g(t)\bigr].$

Замена

$$bw + c = \exp u, \quad u = u(x,t)$$

приводит к уравнению вида 1.6.5.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + bku^2 + bf(t)u + bg(t),$$

которое имеет экспоненциальные и синусоидальные решения по переменной x.

1.6.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + f(t)w\ln w.$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{an}{x}\frac{\partial w}{\partial x} + f(t)w\ln w.$$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g не указываются)

$$\varphi_t' = 4a\varphi^2 + f\varphi,$$

$$\psi_t' = 2a(n+1)\varphi + f\psi.$$

Последовательно интегрируя, получим

$$\varphi(t) = e^F \Big(A - 4a \int e^F dt\Big)^{-1}, \quad F = \int f\,dt,$$

$$\psi(t) = Be^F + 2a(n+1)e^F \int \varphi e^{-F} dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(x,t).$

Сделаем замену

$$w = \frac{\partial u}{\partial x},$$

а затем проинтегрируем полученное уравнение по переменной x. В результате приходим к уравнению вида 1.6.3.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + F(x,t),$$

где $F(x,t) = \displaystyle\int f(x,t)\,dx + g(t)$, $g(t)$ — произвольная функция.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \displaystyle\int f(t)\,dt$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g(w),$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $w = w(kz + \lambda t)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t,w).$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \displaystyle\int f(t)\,dt$, получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g(t,w).$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\ln w + \big[g(x) + h(t)\big]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\Big[Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}h(t)\,dt\Big]\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f(x)\varphi'_x + b\varphi\ln\varphi + g(x)\varphi = 0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[xf(t) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w\ln w + \big[xp(t) + s(t)\big]w.$

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\big[x\varphi(t) + \psi(t)\big],$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = \big[f(t) + h(t)\big]\varphi + p(t), \qquad (1)$$

$$\psi'_t = h(t)\psi + a\varphi^2 + g(t)\varphi + s(t). \qquad (2)$$

Интегрируя сначала (1), а затем (2), имеем (C_1, C_2 — произвольные постоянные)

$$\varphi(t) = C_1E(t) + E(t)\int \frac{p(t)}{E(t)}\,dt, \qquad E(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt + \int h(t)\,dt\right],$$
$$\psi(t) = C_2H(t) + H(t)\int \frac{a\varphi^2(t) + g(t)\varphi(t) + s(t)}{H(t)}\,dt, \qquad H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right].$$

2°. См. уравнение 1.6.2.7 при $r(t) = 0$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[xf(t) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w\ln w + \big[x^2r(t) + xp(t) + s(t)\big]w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\big[x^2\varphi(t) + x\psi(t) + \chi(t)\big],$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4a\varphi^2 + (2f + h)\varphi + r, \qquad (1)$$
$$\psi'_t = (4a\varphi + f + h)\psi + 2g\varphi + p, \qquad (2)$$
$$\chi'_t = h\chi + 2a\varphi + a\psi^2 + g\psi + s. \qquad (3)$$

При $r \equiv 0$ уравнение (1) является уравнением Бернулли и легко интегрируется. В общем случае уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, h, r. После решения уравнения (1) последовательно определяются решения уравнений (2) и (3), которые линейны относительно функций $\psi = \psi(t)$ и $\chi = \chi(t)$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[xf(t) + \dfrac{g(t)}{x}\right]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w\ln w + \big[x^2p(t) + s(t)\big]w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\big[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\big],$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4a\varphi^2 + (2f + h)\varphi + p, \qquad (1)$$
$$\psi'_t = h\psi + 2(a + g)\varphi + s. \qquad (2)$$

При $p \equiv 0$ уравнение (1) является уравнением Бернулли и легко интегрируется. В общем случае уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, h, p. После решения уравнения (1) из линейного уравнения (2) определяется $\psi = \psi(t)$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

определяются неявной зависимостью

$$a\int \frac{dw}{\lambda w - F(w) + A} = z + B, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где A, B — произвольные постоянные.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным второго порядка
$$aw''_{zz} + \big[f(w) - \lambda\big]w'_z + g(w) = 0,$$
которое заменой $w'_z = u(w)$ сводится к уравнению первого порядка. О точных решениях указанных обыкновенных дифференциальных уравнений для различных функций $f(w)$ и $g(w)$ см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f(w) + bx\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Точное решение (C — произвольная постоянная)
$$w = w(z), \quad z = bx + Ce^{-bt},$$
где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$ab^2 w''_{zz} + b\big[f(w) + z\big]w'_z + h(w) = 0.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f(w) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int g(t)\,dt$, получим уравнение вида 1.6.2.9:
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f(w) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int g(t)\,dt$, получим более простое уравнение вида 1.6.2.10:
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w)\frac{\partial w}{\partial z} + h(w).$$

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f(w) + g(t) + bx\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Точное решение (C — произвольная постоянная):
$$w = w(z), \quad z = bx + Ce^{-bt} + be^{-bt}\int e^{bt}g(t)\,dt,$$
где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$ab^2 w''_{zz} + b\big[f(w) + z\big]w'_z + h(w) = 0.$$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(bx + ct, w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(bx + ct, w).$

Точное решение:
$$w = w(\xi), \quad \xi = bx + ct,$$
где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$ab^2 w''_{\xi\xi} + \big[bf(\xi, w) - c\big]w'_\xi + g(\xi, w) = 0.$$

1.6.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x, t, w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x) + g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.3.3.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:
$$w(x, t) = At + B + \int g(t)\,dt + \varphi(x).$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b(\varphi'_x)^2 + f(x) - A = 0,$$

которое с помощью замены $\varphi'_x = \dfrac{a}{b}\dfrac{\psi'_x}{\psi}$ приводится к линейному уравнению второго порядка:

$$\psi''_{xx} + ba^{-2}\bigl[f(x) - A\bigr]\psi = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + f(t)x^2 + g(t)x + h(t).$

Частный случай уравнения 1.6.3.3.

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4b\varphi^2 + f, \tag{1}$$
$$\psi'_t = 4b\varphi\psi + g, \tag{2}$$
$$\chi'_t = 2a\varphi + b\psi^2 + h. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции φ является уравнением Риккати. В частном случае $f = \text{const}$ оно легко интегрируется с помощью разделения переменных. После определения φ последовательно находятся решения уравнений (2) и (3), которые линейны относительно функций ψ и χ.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + f(x,t).$

Замена $u = \exp\Bigl(\dfrac{b}{a}w\Bigr)$ приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b}{a}f(x,t)u.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + cw + f(t).$

1°. Это уравнение является частным случаем уравнения 1.6.5.1. Поэтому оно имеет точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t).$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{ct} + e^{ct}\int e^{-ct}f(t)\,dt + \Theta(\xi), \quad \xi = x + \lambda t,$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\Theta''_{\xi\xi} + b\bigl(\Theta'_\xi\bigr)^2 - \lambda\Theta'_\xi + c\Theta = 0.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + cw + f(x).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ae^{ct} + \varphi(x).$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b(\varphi'_x)^2 + c\varphi + f(x) = 0,$$

которое с помощью замены $\varphi'_x = \dfrac{a}{b}\dfrac{\psi'_x}{\psi}$ приводится к линейному уравнению второго порядка

$$a^2\psi''_{xx} + ac\psi'_x + bf(x)\psi = 0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw + f(x) + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ae^{ct} + e^{ct}\int e^{-ct}g(t)\,dt.$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b(\varphi'_x)^2 + c\varphi + f(x) = 0,$$

которое с помощью замены $\varphi'_x = \dfrac{a}{b}\dfrac{\psi'_x}{\psi}$ приводится к линейному уравнению второго порядка

$$a^2\psi''_{xx} + ac\psi'_x + bf(x)\psi = 0.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(t)w + h(t).$

Частный случай уравнения 1.6.5.1 при $f(t) = b$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw^2 + f(t)w + g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.5.2.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\lambda\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x,t) + g(x,t)e^{-\lambda w}.$

Замена $u = \exp(\lambda w)$ приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda f(x,t)u + \lambda g(x,t).$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \dfrac{1}{t}f\Big(\dfrac{x}{\sqrt{t}},\, w\Big).$

1°. Преобразование

$$\tau = \ln t, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + b\Big(\frac{\partial w}{\partial \xi}\Big)^2 + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(\xi, w),$$

которое допускает точное решение вида $w = w(\xi)$.

2°. В частном случае $f = f(\xi)$ имеется также точное решение вида $w = C\tau + \varphi(\xi)$, где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{\xi\xi} + b(\varphi'_\xi)^2 + \tfrac{1}{2}\xi\varphi'_\xi + f(\xi) - C = 0.$$

1.6.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + kw + g(x) + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{kt} + e^{kt}\int e^{-kt}h(t)\,dt,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами

$$a\varphi''_{xx} + b(\varphi'_x)^2 + f(x)\varphi'_x + k\varphi + g(x) = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw^2 + g(t)w + h(t).$

Частный случай уравнения 1.6.5.5.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw\dfrac{\partial w}{\partial x} + kw^2 + f(t)w + g(t).$

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корни квадратного уравнения $b\lambda^2 + c\lambda + k = 0$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t).$

Замена $u = \exp\Big(\dfrac{b}{a}w\Big)$ приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{a}g(x,t)u.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\lambda\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t) + h(x,t)e^{-\lambda w}.$

Замена $u = \exp(\lambda w)$ приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda g(x,t)u + \lambda h(x,t).$$

1.6.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(t)w + h(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + g\varphi, \qquad (1)$$
$$\psi'_t = (4f\varphi + g)\psi, \qquad (2)$$
$$\chi'_t = g\chi + 2a\varphi + f\psi^2 + h. \qquad (3)$$

Уравнение (1) для функции φ является уравнением Бернулли и легко интегрируется. После этого последовательно определяются решения уравнений (2) и (3), которые линейны относительно функций ψ и χ. В итоге получим

$$\begin{aligned} &\varphi = e^G\Big(A_1 - 4\int e^G f\,dt\Big)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,\\ &\psi = A_2\exp\Big[\int(4f\varphi + g)\,dt\Big], \qquad (4)\\ &\chi = A_3e^G + e^G\int e^{-G}(2a\varphi + f\psi^2 + h)\,dt, \end{aligned}$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные.

Предельному переходу $A_1 \to \infty$ в (4) соответствует вырожденное решение с $\varphi \equiv 0$.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\big(\pm x\sqrt{-b}\,\big), \qquad b<0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi'_t = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$
$$\psi'_t = (2bf\varphi + g - ab)\psi. \tag{3}$$

Уравнение (2) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1997) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g, h.

Если решение уравнения (2) известно, то решение уравнения (3) для функции $\psi = \psi(t)$ определяется по формуле

$$\psi(t) = C\exp\Big[-abt + \int(2bf\varphi + g)\,dt\Big], \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

Отметим два частных случая интегрирования уравнения (2).

Решение уравнения (2) при $h\equiv 0$:

$$\varphi(t) = e^G\Big(C_1 - b\int fe^G\,dt\Big)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha,\,\beta = \mathrm{const}),$$

то решение уравнения (2) имеет вид

$$\int\frac{d\varphi}{b\varphi^2 + \alpha\varphi + \beta} = \int f\,dt + C_2, \tag{5}$$

где C_2 — произвольная постоянная. После интегрирования левой части выражения (5) можно получить явный вид зависимости $\varphi = \varphi(t)$.

2°. Точное решение более общего вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\big[A\exp\big(x\sqrt{-b}\,\big) + B\exp\big(-x\sqrt{-b}\,\big)\big], \qquad b<0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = bf\big(\varphi^2 + 4AB\psi^2\big) + g\varphi + h, \tag{7}$$
$$\psi'_t = 2bf\varphi\psi + g\psi - ab\psi. \tag{8}$$

Из уравнения (8) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (7). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, g, $h = \mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}\big(x\sqrt{-b}\,\big), \qquad A = \tfrac12,\ B = \tfrac12,$$
$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}\big(x\sqrt{-b}\,\big), \qquad A = \tfrac12,\ B = -\tfrac12.$$

3°. Точное решение (c — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\big(x\sqrt{b} + c\big), \qquad b>0, \tag{9}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = bf\big(\varphi^2 + \psi^2\big) + g\varphi + h, \tag{10}$$
$$\psi'_t = 2bf\varphi\psi + g\psi - ab\psi. \tag{11}$$

Из уравнения (11) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (10). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, g, h = const это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

⊙ *Литература:* В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989, рассматривался случай f, g, h = const), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bf(t)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + cf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корни квадратного уравнения $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw + h(x) + p(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}p(t)\,dt,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f(x)(\varphi'_x)^2 + g(x)\varphi'_x + b\varphi + h(x) = 0.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bf(t)w^2 + h(t)w + p(t).$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int g(t)\,dt$, приходим к уравнению вида 1.6.5.2:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(t)\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2 + bf(t)w^2 + h(t)w + p(t).$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \big[g_1(t)x + g_0(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w + p(t)x^2 + q(t)x + s(t).$

Точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + (2g_1 + h)\varphi + p, \tag{1}$$
$$\psi'_t = (4f\varphi + g_1 + h)\psi + 2g_0\varphi + q, \tag{2}$$
$$\chi'_t = h\chi + 2a\varphi + f\psi^2 + g_0\psi + s. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. О решениях этих уравнений см. книги Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*). В частном случае при $p \equiv 0$ уравнение (1) является уравнением Бернулли и легко интегрируется.

Если решение уравнения (1) известно, то решения уравнений (2) и (3) получаются последовательно (они линейны относительно функций ψ и χ).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ak\dfrac{1}{w}\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t)w + h(x,t)w^k.$

Замена $u = w^{1-k}$ приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + (1-k)g(x,t)u + (1-k)h(x,t).$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2.$

Замена

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\Big[\int f(w)\,dw\Big],$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Замена

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\Big[\int f(w)\,dw\Big],$$

приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Некоторые точные аналитические решения полученного уравнения (при произвольной функции g) приведены в книге А. Д. Полянина (2001 *b*).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \big[xg(t) + h(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Замена

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\Big[\int f(w)\,dw\Big],$$

приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \big[xg(t) + h(t)\big]\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Это уравнение может быть сведено к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами [см. А. Д. Полянин (2001 *b*)].

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Замена

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\Big[\int f(w)\,dw\Big],$$

приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw''_{zz} + f(w)(w'_z)^2 + [g(w) - \lambda]w'_z + h(w) = 0. \tag{1}$$

Замена $w'_z = u(w)$ приводит к уравнению первого порядка

$$auu'_w + f(w)u^2 + [g(w) - \lambda]u + h(w) = 0. \tag{2}$$

О точных решениях обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и (2) для различных функций $f(w)$, $g(w)$ и $h(w)$ см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

Отметим, что в частном случае $h \equiv 0$ из (2) получим линейное уравнение, которое легко интегрируется.

1.6.6. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^k + g(x)\frac{\partial w}{\partial x} + bw + h(x) + p(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}p(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\varphi''_{xx} + f(x)(\varphi'_x)^k + g(x)\varphi'_x + b\varphi + h(x) = 0.$$

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\varphi''_{xx} + f(x,\ \varphi'_x) + b\varphi = 0.$$

3. $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\Big(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda x + a\lambda^2 t + \int f(t,\lambda)\,dt\Big],$$

где A, λ — произвольные постоянные.

1.6.7. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\frac{\partial w}{\partial t} = (ax^2 + b)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ax\frac{\partial w}{\partial x} + f(w).$

Замена $z = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}$ приводит к уравнению вида 1.6.1.1:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$$

2. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{f(t)}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + g(t)w\ln w.$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{nf(t)}{x}\frac{\partial w}{\partial x} + g(t)w\ln w.$$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\big[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\big],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g не указываются)

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + g\varphi,$$
$$\psi'_t = 2(n+1)f\varphi + g\psi.$$

Последовательно интегрируя, получим

$$\varphi(t) = e^G\Big(A - 4\int fe^G dt\Big)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,$$
$$\psi(t) = Be^G + 2(n+1)e^G\int f\varphi e^{-G}dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[xg(t) + \dfrac{h(t)}{x}\right]\dfrac{\partial w}{\partial x} + s(t)w\ln w + \left[x^2 p(t) + q(t)\right]w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + (2g+s)\varphi + p, \tag{1}$$

$$\psi'_t = s\psi + 2(f+h)\varphi + q. \tag{2}$$

При $p \equiv 0$ уравнение (1) является уравнением Бернулли и легко интегрируется. В общем случае уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 a) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g, s, p. После решения уравнения (1) из линейного уравнения (2) определяется $\psi = \psi(t)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t)w\ln w + h(t)w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)e^{-\lambda x} + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi'_t = \lambda^2 f(t)\varphi^2 + g(t)\varphi,$$
$$\psi'_t = g(t)\psi + h(t).$$

Интегрируя, получим

$$\varphi(t) = G(t)\Bigl[A - \lambda^2\int f(t)G(t)\,dt\Bigr]^{-1}, \quad G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$
$$\psi(t) = BG(t) + G(t)\int\frac{h(t)}{G(t)}\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + aw\ln w.$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f'_x(x)\frac{\partial w}{\partial x} + aw\ln w.$$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[Ae^{at} + \varphi(x)\bigr],$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(f\varphi'_x)'_x + f(\varphi'_x)^2 + a\varphi = 0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + aw\ln w + \bigl[g(x) + h(t)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\Bigl[Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}h(t)\,dt\Bigr]\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(f\varphi'_x)'_x + a\varphi\ln\varphi + g(x)\varphi = 0.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + aw\ln w + \big[h(x) + s(t)\big]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\Big[Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}s(t)\,dt\Big]\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x)\varphi'_x + a\varphi\ln\varphi + h(x)\varphi = 0.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + h(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + aw + p(x) + q(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}q(t)\,dt,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x)(\varphi'_x)^2 + h(x)\varphi'_x + a\varphi + p(x) = 0.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k + h(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + aw + p(x) + q(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}q(t)\,dt,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x)(\varphi'_x)^k + h(x)\varphi'_x + a\varphi + p(x) = 0.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + aw + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ce^{at} + e^{at}\int e^{-at}h(t)\,dt,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x,\ \varphi'_x) + a\varphi = 0.$$

1.6.8. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w + bx + c.$

Точное решение:

$$w(x,t) = (bx + c)t + Ax + B - \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)f(\xi)\,d\xi,$$

где A, B, x_0 — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w + g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.9.6.

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = F(t)(Ax + B) + F(t)\int\frac{g(t)}{F(t)}dt, \quad F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)(x^2 + Ax + B) + \varphi(t) \int \frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt,$$

$$\varphi(t) = F(t)\Big[C - 2a \int F(t)\,dt\Big]^{-1}, \quad F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw^2 + f(t)w + g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.9.7 при $b = 0$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ak^2w^2 + f(x)w + b_1 \operatorname{sh}(kx) + b_2 \operatorname{ch}(kx).$

Точное решение:

$$w(x,t) = t\big[b_1 \operatorname{sh}(kx) + b_2 \operatorname{ch}(kx)\big] + \varphi(x).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ описывается линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a\varphi''_{xx} - ak^2\varphi + f(x) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{sh}(kx) + C_2 \operatorname{ch}(kx) - \frac{1}{ak}\int_{x_0}^{x} f(\xi) \operatorname{sh}\big[k(x-\xi)\big]\,d\xi,$$

где A, B, x_0 — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ak^2w^2 + f(x)w + b_1 \sin(kx) + b_2 \cos(kx).$

Точное решение:

$$w(x,t) = t\big[b_1 \sin(kx) + b_2 \cos(kx)\big] + \varphi(x).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ описывается линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a\varphi''_{xx} + ak^2\varphi + f(x) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) - \frac{1}{ak}\int_{x_0}^{x} f(\xi) \sin\big[k(x-\xi)\big]\,d\xi,$$

где A, B, x_0 — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Частный случай уравнения 1.6.9.6. Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(z,\tau), \quad z = x + \int f(t)\,dt, \quad \tau = \int G(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big]$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Последнее допускает точное решение типа бегущей волны $u = u(kz + \lambda\tau)$ и решение в виде произведения функций разных аргументов $u = \varphi(z)\psi(t)$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w + h(t).$

Частный случай уравнения 1.6.9.6.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(z,\tau), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G(t)\,dt,$$

где функции F и G определяются формулами

$$F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr], \quad G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Последнее допускает точное решение типа бегущей волны $u = u(kz + \lambda\tau)$ и решение в виде произведения функций разных аргументов $u = \varphi(z)\psi(t)$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[xf(t) + g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = H(t)u(z,\tau), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^2(t)H(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $H(t)$ определяются формулами

$$F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr], \quad H(t) = \exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Последнее допускает точное решение типа бегущей волны $u = u(kz + \lambda\tau)$ и решение в виде произведения функций разных аргументов $u = \varphi(z)\psi(t)$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w + h(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\Theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi'_t = C\varphi^2 + g(t)\varphi,\\ &\psi'_t = \bigl[C\varphi + g(t)\bigr]\psi + h(t),\\ &a\Theta''_{xx} + f(x)\Theta'_x = C, \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная. Последовательно интегрируя, получим

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = G(t)\Bigl[A_1 - C\int G(t)\,dt\Bigr]^{-1}, \quad G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],\\ &\psi(t) = A_2\varphi(t) + \varphi(t)\int \frac{h(t)}{\varphi(t)}\,dt,\\ &\Theta(x) = B_1\int \frac{dx}{F(x)} + B_2 + \frac{C}{a}\int\Bigl[\int F(x)\,dx\Bigr]\frac{dx}{F(x)}, \quad F(x) = \exp\Bigl[\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\Bigr], \end{aligned}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)w^2 + h(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)H(t)\Big[A - B\int H(t)\,dt\Big]^{-1}, \quad H(t) = \exp\Big[\int h(t)\,dt\Big].$$

Здесь A и B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\varphi''_{xx} + f(x)\varphi'_x + g(x)\varphi = B.$$

О точных решениях этого уравнения при различных функциях $f(x)$ и $g(x)$ см. книги Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*).

1.6.9. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (aw+b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(t)w + g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.9.6.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^2 + f(t)w + g(t).$

Частный случай уравнения 1.6.9.7.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(x)w^2.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = (\lambda t + C)^{-1}\varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\psi''_{xx} + 2f(x)\psi + 2\lambda\psi^{1/2} = 0, \qquad \psi = \varphi^2.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Частный случай уравнения 1.6.9.6.

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(z,\tau), \quad z = x + \int f(t)\,dt, \quad \tau = \int G(t)\,dt, \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big]$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.7.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\Big(u\frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(t,x) = u(z,\tau)G(t), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G(t)\,dt,$$

где функции F и G определяются формулами

$$F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big], \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.7.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\Big(u\frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w + s(t).$

Точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h, s не указываются)

$$\varphi_t' = 2(2f+a)\varphi^2 + h\varphi, \tag{1}$$
$$\psi_t' = (4f\varphi + 2a\varphi + h)\psi + 2g\varphi, \tag{2}$$
$$\chi_t' = (2a\varphi + h)\chi + f\psi^2 + g\psi + s. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Бернулли и легко интегрируется. После этого решения уравнений (2), (3) строятся последовательно (каждое из них линейно относительно искомой функции).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw^2 + f(t)w + g(t).$

1°. Точное решение, содержащее экспоненциальную функцию x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\lambda x), \quad \lambda = \Big(\frac{-c}{a+b}\Big)^{1/2}, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f и g не указываются)

$$\varphi_t' = c\varphi^2 + f\varphi + g, \tag{2}$$
$$\psi_t' = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{3}$$

Уравнение (2) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g.

В частности, при $g \equiv 0$ уравнение (2) является уравнением Бернулли, которое легко интегрируется. В другом случае при f, $g = \mathrm{const}$ частное решение уравнения (2) — константа $\varphi = \varphi_0$, которая является корнем квадратного уравнения $c\varphi_0^2 + f\varphi_0 + g = 0$. Замена $u = \varphi - \varphi_0$ приводит к уравнению Бернулли.

Если решение уравнения (2) известно, то решение уравнения (3) для функции $\psi = \psi(t)$ определяется по формуле

$$\psi(t) = C\exp\Big[\int(a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\,dt\Big], \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Точное решение, содержащее гиперболический косинус (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}(\lambda x + A), \quad \lambda = \Big(\frac{-c}{a+b}\Big)^{1/2}, \tag{5}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f и g не указываются)

$$\varphi_t' = c\varphi^2 - b\lambda^2\psi^2 + f\varphi + g, \tag{6}$$
$$\psi_t' = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{7}$$

Из уравнения (7) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (6). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, $g = \mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

3°. Точное решение, содержащее гиперболический синус (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2},$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + b\lambda^2\psi^2 + f\varphi + g,$$
$$\psi'_t = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi.$$

4°. Точное решение, содержащее тригонометрическую функцию (A — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{c}{a+b}\right)^{1/2}, \tag{8}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + b\lambda^2\psi^2 + f\varphi + g, \tag{9}$$
$$\psi'_t = (-a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{10}$$

Из уравнения (10) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (9). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, $g = \mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (aw + b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + kw^2 + g(t)w + h(t).$

Преобразование

$$u(z,t) = w(x,t) + \frac{b}{a}, \quad z = x + \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению вида 1.6.9.7 для функции $u = u(z,t)$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x)w^2 + p(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (C — произвольная постоянная):

$$a\varphi\varphi''_{xx} + f(x)(\varphi'_x)^2 + g(x)\varphi\varphi'_x + h(x)\varphi^2 = C\varphi, \tag{1}$$
$$\psi'_t = C\psi^2 + p(t)\psi. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) дается формулами

$$\psi(t) = P(t)\left[A - C\int P(t)\,dt\right]^{-1}, \quad P(t) = \exp\left[\int p(t)\,dt\right],$$

где A — произвольная постоянная. В частном случае при $f \equiv 0$ уравнение (1) после сокращения на φ приводится к линейному уравнению второго порядка; о его точных решениях при различных функциях $g(x)$ и $h(x)$ см. книги Э. Камке (1996), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (aw + b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left[g_1(t)x + g_0(x)\right]\dfrac{\partial w}{\partial x} +$
$\qquad + h(t)w + p_2(t)x^2 + p_1(t)x + p_0(t).$

Уравнение имеет точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, которая здесь не приводится.

1.6.10. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w^5.$

1°. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} + f(x)u = 0. \qquad (1)$$

Преобразование

$$\xi = \int \frac{dx}{u^2}, \quad z = \frac{w}{u}$$

упрощает исходное уравнение и приводит его к следующему виду:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = az^4 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Используя замену $v = z^{-3}$, получим уравнение вида 1.1.7.4:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(v^{-4/3}\frac{\partial v}{\partial \xi}\Big).$$

Точные решения этого уравнения см. в 1.1.7.6 при $m = -4/3$.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (C, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (4\lambda t + C)^{-1/4} g(x),$$

где функция $g = g(x)$ определяется из уравнения Ермакова

$$ag''_{xx} + f(x)g + \lambda g^{-3} = 0. \qquad (2)$$

Если известно частное решение $u = u(x)$ линейного уравнения (1), то общее решение нелинейного уравнения (2) имеет вид (см., например, В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 a)

$$Ag^2 = -\frac{\lambda}{a}u^2 + u^2\Big(B + A\int\frac{dx}{u^2}\Big)^2,$$

где A, B — произвольные постоянные ($A \neq 0$).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = F(t)u(x,\tau), \quad \tau = \int F^m(t)\,dt, \quad F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big]$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.6.8:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)G(t), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G^m(t)\,dt,$$

где функции F и G определяются формулами

$$F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big], \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.6.8:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w^{m+1}.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (C, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi^m \varphi''_{xx} + f(x)\varphi^{m+1} + \lambda\varphi = 0.$$

1.6.11. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(x)w^{-1/3}.$

1°. Замена $w = v^{-3}$ приводит к уравнению вида 1.6.10.1:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = av^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \tfrac{1}{3} f(x) v^5.$$

2°. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} - \tfrac{1}{3} f(x) u = 0.$$

Преобразование

$$\xi = \pm \int \frac{dx}{u^2}, \quad z = wu^3$$

упрощает исходное уравнение и приводит его к уравнению 1.1.7.4:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(z^{-4/3}\frac{\partial z}{\partial \xi}\Big).$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(x,\tau)F(t), \quad \tau = \int F^m(t)\,dt, \qquad F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.7.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

При $m = -2$ об этом уравнении см. 1.1.7.3.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(t)w^{1-m}.$

Замена $u = w^m$ приводит к уравнению вида 1.6.9.6:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + mf(t),$$

которое допускает решения вида $u = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(t)w + g(t)w^{1-m}.$

Замена $u = w^m$ приводит к уравнению вида 1.6.9.6:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + mf(t)u + mg(t),$$

которое допускает решения вида $u = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)$.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^{1+m} + f(t)w + g(t)w^{1-m}.$

При $b = 0$ см. уравнение 1.6.11.4:

Замена $u = w^m$ приводит к уравнению вида 1.6.9.7:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{m}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + bmu^2 + mf(t)u + mg(t),$$

которое допускает решения следующих типов:

$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\lambda x),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{ch}(\lambda x + C),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}(\lambda x + C),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos(\lambda x + C),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, параметр λ является корнем квадратного уравнения, C — произвольная постоянная.

⦿ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(x)w^{1+m}.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = (\lambda mt + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается уравнением

$$a\psi''_{xx} + (m+1)f(x)\psi + \lambda(m+1)\psi^{\frac{1}{m+1}} = 0, \qquad \psi = \varphi^{m+1}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведены точные решения этого уравнения для некоторых функций $f(x)$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],\ z = x + \int f(t)\,dt,\ \tau = \int \exp\Big[m\int g(t)dt\Big]\,dt$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.7.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(t,x) = u(z,\tau)G(t), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G^m(t)\,dt,$$

где функции F и G определяются формулами

$$F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big], \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.7.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

В частном случае $m = -2$ это уравнение может быть преобразовано к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами (см. 1.1.7.3).

⦿ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + [xf(t) + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^2(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции F и H определяются формулами

$$F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big], \quad H(t) = \exp\Big[\int h(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.7.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

При $m = -2$ см. уравнение 1.1.7.3.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

1.6.12. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(t).$

Преобразование

$$w(x,t) = u(x,\tau) + F(t), \quad \tau = \int \exp[\lambda F(t)]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению вида 1.2.2.1:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda u}\frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(t) + g(t)e^{-\lambda w}.$

Замена $u = e^{\lambda w}$ приводит к уравнению вида 1.6.8.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda f(t)u + \lambda g(t),$$

которое допускает решения вида $u = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(x) + (bx + c)e^{-\lambda w}.$

Замена $u = e^{\lambda w}$ приводит к уравнению вида 1.6.8.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda f(x)u + \lambda(bx + c),$$

которое допускает решения вида $u = \lambda(bx + c)t + \varphi(x)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + be^{\lambda w} + f(t) + g(t)e^{-\lambda w}.$

При $b = 0$ см. уравнение 1.6.12.2.

Замена $u = e^{\lambda w}$ приводит к уравнению вида 1.6.9.7:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu^2 + \lambda f(t)u + \lambda g(t),$$

которое допускает решения следующих типов:

$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\mu x),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}(\mu x + C),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}(\mu x + C),$$
$$u(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos(\mu x + C),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, параметр μ является корнем квадратного уравнения, C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(x)e^{\lambda w}$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx} + \lambda f(x)\psi + \lambda = 0, \qquad \psi = e^{\lambda\varphi}.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

1.6.13. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + g\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$.

Это уравнение часто встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса (f — коэффициент температуропроводности или диффузии) и теории фильтрации. При $f(w) = aw^m$ см. разд. 1.1.7, а при $f(w) = e^{\lambda w}$ — уравнение 1.2.2.1.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1^2t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t,$$

определяются неявно по формуле

$$\int \frac{f(w)\,dw}{\lambda w + C_1} = C_2 - z, \tag{1}$$

где λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение.

3°. Автомодельное решение:

$$w = w(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} \qquad (0 \leqslant x < \infty),$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\big[f(w)w'_z\big]'_z + \tfrac{1}{2}zw'_z = 0. \tag{2}$$

Решения указанного вида обычно соответствуют постоянным значениям w в начальных и граничных условиях для исходного уравнения в частных производных (w_0, $w_1 = \mathrm{const}$):

$$\begin{aligned} &w = w_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad &&(\text{начальное условие}),\\ &w = w_1 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad &&(\text{граничное условие}),\\ &w \to w_0 \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad &&(\text{граничное условие}).\end{aligned}$$

При этом граничные условия для уравнения (2) имеют вид

$$w = w_1 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w \to w_0 \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{3}$$

При $f(w) = aw^{-1}$, $f(w) = aw^{-2}$, $f(w) = (\alpha w^2 + \beta w + \gamma)^{-1}$ общие решения уравнения (2) получил Х. Фуджита (H. Fujita, 1952). Об этих решениях см. в книге А. В. Лыкова (1967).

ТАБЛИЦА 1

Точные решения уравнения 1.6.13.1 для различных зависимостей $f = f(w)$, где $z = xt^{-1/2}$.

№	Функция $f = f(w)$	Решение $z = z(w)$	Условия
1	$\dfrac{n}{2}w^n - \dfrac{n}{2(n+1)}w^{2n}$	$1 - w^n$	$n > 0$
2	$\dfrac{n}{2(n+1)}\left[(1-w)^{n-1} - (1-w)^{2n}\right]$	$(1-w)^n$	$n > 0$
3	$\dfrac{n}{2(1-n)}w^{-2n} - \dfrac{n}{2}w^{-n}$	$w^{-n} - 1$	$0 < n < 1$
4	$\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi w\right)$	$\cos\left(\frac{1}{2}\pi w\right)$	
5	$\frac{1}{8}\sin(\pi w)\left[\pi w + \sin(\pi w)\right]$	$\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi w\right)$	
6	$\frac{1}{16}\sin^2(\pi w)\left[5 + \cos(\pi w)\right]$	$\cos^3\left(\frac{1}{2}\pi w\right)$	
7	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\pi w\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}\pi w\right) + \frac{1}{2}\pi w - 1\right]$	$1 - \sin\left(\frac{1}{2}\pi w\right)$	
8	$\dfrac{w\arccos w + 1}{2\sqrt{1-w^2}} - \dfrac{1}{2}$	$\arccos w$	
9	$\dfrac{\pi - 2(1-w)\arcsin(1-w)}{4\sqrt{2w-w^2}} - \dfrac{1}{2}$	$\arcsin(1-w)$	
10	$\dfrac{w\arcsin w}{4\sqrt{1-w^2}} + \dfrac{1}{4}w^2$	$\sqrt{1-w^2}$	
11	$\frac{1}{2}(1 - \ln w)$	$-\ln w$	

4°. Опишем простой способ поиска функций $f(w)$, для которых уравнение (2) допускает точное решение. Для этого проинтегрируем уравнение (2) по z, а затем сделаем преобразование годографа (переменную w будем считать независимой, а z — зависимой). В результате получим

$$f(w) = -\frac{1}{2}z'_w\left(\int z\,dw + A\right), \qquad A \text{ — произвольная постоянная.} \tag{4}$$

Подставляя в правую часть формулы (4) конкретную зависимость $z = z(w)$, будем получать однопараметрическое семейство функций $f(w)$, для которых уравнение (2) имеет решение $z = z(w)$. Явный вид решения $w = w(z)$ находится обращением зависимости $z = z(w)$.

Описанный метод разработал Ж. Филип (J. R. Philip, 1960), который получил большое число точных решений исходного уравнения для различных зависимостей $f = f(w)$. Некоторые его результаты, соответствующие задаче с начальным и граничными условиями (3) при $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, приведены ниже в табл. 1. Все решения записаны в неявном виде $z = z(w)$ в области их пространственной локализации $0 \leqslant w \leqslant 1$.

5°. Опишем другой простой способ поиска функций $f(w)$, для которых уравнение (2) допускает точное решение. Прямой проверкой можно убедиться, что уравнение (2) удовлетворяется, если положить

$$w = \phi'_z, \quad f(w) = \frac{s + \phi - z\phi'_z}{2\phi''_{zz}}, \tag{5}$$

где $\phi = \phi(z)$ — произвольная функция, s — произвольная постоянная. Выражения (5) представляют собой параметрическую форму задания зависимости $f = f(w)$, которая получается после исключения z.

Полагая, например, в формулах (5)

$$\phi(z) = w_0 z + \frac{1}{\lambda}(w_0 - w_1)e^{-\lambda z} \qquad (\lambda > 0,\ w_1 > w_0),$$

после исключения z находим

$$f(w) = \frac{A}{w - w_0} + B + C\ln(w - w_0), \quad w = w_0 + (w_1 - w_0)e^{-\lambda z},$$

где $A = -\frac{1}{2}s\lambda^{-1}$, $B = \frac{1}{2}\lambda^{-2}\big[1 + \ln(w_1 - w_0)\big]$, $C = -\frac{1}{2}\lambda^{-2}$. Отметим, что это решение удовлетворяет граничным условиям (3). Аналогичным образом могут быть построены и другие функции $f(w)$.

6°. Еще один способ построения функций $f(w)$, для которых уравнение (2) допускает точное решение, заключается в следующем. Пусть $\bar{w} = \bar{w}(z)$ — некоторое решение уравнения (2) с функцией $f(w)$. Тогда $\bar{w} = \bar{w}(z)$ будет также решением и более сложного уравнения $\big[F(w)w'_z\big]'_z + \frac{1}{2}zw'_z = 0$ при

$$F(w) = f(w) + Ag(w) \qquad (A \text{ — произвольная постоянная}), \tag{6}$$

где функция $g = g(w)$ задается параметрически формулами

$$g(w) = \frac{1}{\bar{w}'_z}, \quad w = \bar{w}(z). \tag{7}$$

Например, для степенной зависимости $f(w) = aw^m$ частным решением уравнения (2) будет функция $\bar{w} = bz^{2/m}$, где b — некоторая константа. Из формул (6), (7) получим, что $\bar{w}$ будет также являться решением уравнения (2) и при $f(w) = aw^m + Aw^{\frac{m-2}{2}}$.

Для первого решения, приведенного в табл. 1, этот метод дает однопараметрическое семейство функций

$$f(w) = \frac{n}{2}w^n - \frac{n}{2(n+1)}w^{2n} + Aw^{n-1},$$

для которых уравнение (2) имеет решение $z = 1 - w^n$.

7°. Преобразование

$$\begin{aligned} &\bar{t} = t - t_0, \quad \bar{x} = \int_{x_0}^{x} w(y,t)\,dy + \int_{t_0}^{t} f\big(w(x_0,\tau)\big)\Big[\frac{\partial w}{\partial x}(x,\tau)\Big]_{x=x_0} d\tau, \\ &\bar{w}(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{w(x,t)} \end{aligned} \tag{8}$$

переводит ненулевое решение $w(x,t)$ исходного уравнения в решение $\bar{w}(\bar{x},\bar{t})$ уравнения аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\Big[\bar{f}(\bar{w})\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\Big], \qquad \bar{f}(w) = \frac{1}{w^2}f\Big(\frac{1}{w}\Big). \tag{9}$$

В частном случае степенной зависимости $f(w) = aw^m$ преобразование (8) приводит к уравнению (9), где $\bar{f}(w) = aw^{-m-2}$.

8°. Закон сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(xw) + \frac{\partial}{\partial x}\Big[F(w) - xf(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] = 0,$$

где $F(w) = \displaystyle\int f(w)\,dw$.

9°. При $f(w) = a(w^2 + b)^{-1}$ см. уравнение 1.1.8.9 и разд. А.3.3-2 (пример 10).

⊙ *Литература к уравнению 1.6.13.1*: Л. В. Овсянников (1959, 1962, 1978), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), W. Strampp (1982), J. R. Burgan, A. Munier, M. R. Feix, E. Fijalkow (1984), N. H. Ibragimov (1994), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996), P. W. Doyle, P. J. Vassiliou (1998).

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + g(w).}$

Это уравнение описывает нестационарную теплопроводность в неподвижной среде, когда коэффициент температуропроводности и скорость реакции являются произвольными функциями температуры.

1°. Точные решения и преобразования (групповая классификация) уравнений данного вида для различных функций $f = f(w)$, $g = g(w)$ описаны в работах В. А. Дородницына (1979, 1982), В. А. Дородницына, С. Р. Свирщевского (1983), В. А. Галактионова, В. А. Дородницына, Г. Г. Еленина, С. П. Курдюмова, А. А. Самарского (1986), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994).

Конкретные уравнения этого вида см. в разд. 1.1.1, 1.1.8, 1.2.1, 1.2.2, 1.4.1.

2°. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w)w'_z]'_z - \lambda w'_z + g(w) = 0. \tag{1}$$

Замена

$$y(w) = \frac{1}{\lambda} f(w) w'_z$$

приводит (1) к уравнению Абеля второго рода

$$yy'_w - y = \varphi(w), \qquad \text{где} \quad \varphi(w) = -\lambda^{-2} f(w) g(w). \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 a) приведено много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $\varphi = \varphi(w)$.

3°. О точных решениях рассматриваемого уравнения для произвольной зависимости $g = g(w)$ (функция f выражается через g) см. разд. А.3.2-1 (пример 3).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Это уравнение описывает нестационарную теплопроводность в движущейся среде, когда коэффициент температуропроводности является произвольной функцией температуры.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int g(t)\,dt$, получим более простое уравнение вида 1.6.13.1:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\Bigl[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr].$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int G^2(t)\,dt + A, \quad z = xG(t), \qquad \text{где} \quad G(t) = B\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$

для функции $w(\tau, z)$ получим более простое уравнение вида 1.6.13.1:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Bigl[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr].$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int G^2(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.6.13.1:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Bigl[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr].$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Это уравнение при $g \equiv \text{const}$ описывает нестационарную теплопроводность в движущейся с постоянной скоростью среде, когда коэффициент температуропроводности и скорость реакции являются произвольными функциями температуры.

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w)w'_z]'_z + [g(w) - \lambda]w'_z + h(w) = 0. \tag{1}$$

В частном случае при $h(w) \equiv 0$ общее решение уравнения (1) можно представить в неявном виде

$$\int \frac{f(w)\,dw}{A + \lambda w - G(w)} = z + B, \qquad G(w) = \int g(w)\,dw,$$

где A, B — произвольные постоянные.

В общем случае замена

$$y(w) = f(w)w'_z$$

приводит (1) к уравнению Абеля

$$yy'_w + \bigl[g(w) - \lambda\bigr]y + f(w)g(w) = 0. \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*) приведено много точных решений уравнения (2) для различных функций f, g, h.

1.6.14. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x,t,w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)w^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где C, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера

$$\varphi''_{xx} + \lambda\bigl[f(x)\bigr]^{-1}\varphi^{1-m} = 0. \tag{1}$$

При $m = 1$ решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x) = -\lambda\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,d\xi + Ax + B,$$

где A, B, x_0 — произвольные постоянные.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $f(x)$.

2°. Преобразование $u = w/x$, $\xi = 1/x$ приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(\xi)u^m\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \qquad F(\xi) = \xi^{4-m}f(1/\xi).$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{f(x)}{aw + b}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Точное решение линейное по переменной t:

$$w(x,t) = \frac{1}{a}\bigl[\varphi(x)t + \psi(x) - b\bigr],$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f(x)\varphi''_{xx} - \varphi^2 = 0,$$
$$f(x)\psi''_{xx} - \varphi\psi = 0.$$

Первое уравнение рассматривается независимо от второго. Второе уравнение имеет частное решение $\psi(x) = \varphi(x)$, поэтому его общее решение дается формулой

$$\psi(x) = C_1\varphi(x) + C_2\varphi(x)\int\frac{dx}{\varphi^2(x)},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Уравнение допускает точные решения вида

$$w = U(z), \quad z = \pm x + \lambda t \quad \text{(решения типа бегущей волны)},$$
$$w = V(y), \quad y = \frac{(x+a)^2}{t+b} \quad \text{(автомодельное решение)},$$

где λ, a, b — произвольные постоянные.

2°. Замена $u = \displaystyle\int \frac{dw}{f(w)}$ приводит к уравнению вида 1.6.13.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

где функция F задается параметрически

$$F(u) = f(w), \qquad u = \int \frac{dw}{f(w)}.$$

Для получения явной зависимости $F = F(u)$ из этих формул следует исключить w.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^4 f\Bigl(\dfrac{w}{x}\Bigr)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Преобразование $u = w/x$, $\xi = 1/x$ приводит к более простому уравнению вида 1.6.14.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^4 f\left(\dfrac{w}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^4 f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^5 f(u),$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

1.6.15. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x,t,w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Bigl(x,t,w,\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + g(t)w + h_2(t)x^2 + h_1(t)x + h_0(t).$

Точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_t' &= 6f(t)\varphi^2 + g(t)\varphi + h_2(t),\\
\psi_t' &= 6f(t)\varphi\psi + g(t)\psi + h_1(t),\\
\chi_t' &= 2f(t)\varphi\chi + f(t)\psi^2 + g(t)\chi + h_0(t).
\end{aligned}$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + f(t)w\dfrac{\partial w}{\partial x} = g(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

Точное решение линейное по переменной x:

$$w(x,t) = \frac{1}{F(t)}\left[x + \int \frac{g(t)}{F(t)}\,dt + C_1\right], \qquad F(t) = \int f(t)\,dt + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + f(t)w\dfrac{\partial w}{\partial x} = g(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^2\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (x + C_1)\varphi(t),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi_t' = 2g(t)\varphi^3 - f(t)\varphi^2.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где C, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(x)\varphi^m\varphi_x']_x' + \lambda\varphi = 0. \qquad (1)$$

Преобразование

$$z = \int\frac{dx}{f(x)}, \quad \Phi = \varphi^{m+1}$$

приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$\Phi_{zz}'' + F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}} = 0, \qquad (2)$$

где функция $F = F(z)$ задается (параметрически) с помощью формул

$$F = \lambda(m+1)f(x), \quad z = \int\frac{dx}{f(x)}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*, разд. 2.3, 2.7) приведено много точных решений уравнения (2) для различных функций $F = F(z)$.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = \left[\psi(x)\right]^{\frac{1}{m+1}}u(\xi,t), \quad \xi = -\int\left[\psi(x)\right]^{\frac{m+2}{m+1}}dx, \qquad \psi(x) = \int\frac{dx}{f(x)},$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[F(\xi)u^m\frac{\partial u}{\partial\xi}\right],$$

где функция $F = F(\xi)$ задается (параметрически) с помощью формул

$$F = f(x)[\psi(x)]^{\frac{3m+4}{m+1}}, \quad \xi = -\int\left[\psi(x)\right]^{\frac{m+2}{m+1}}dx, \qquad \psi(x) = \int\frac{dx}{f(x)}.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)w^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)w^{m+1}.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (C, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi^m\varphi_{xx}'' + g(x)\varphi^{m+1} + \lambda\varphi = 0. \qquad (1)$$

В частном случае $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^k$ уравнение (1) имеет вид

$$\varphi_{xx}'' + (b/a)x^{k-n}\varphi + (\lambda/a)x^{-n}\varphi^{1-m} = 0. \qquad (2)$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*) приведено много точных решений уравнения (2) для различных значений параметров n, m, k.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t)w^{1-m}$.

Точное решение:

$$w(x,t) = \left[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\right]^{1/m},$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = \frac{2(m+2)}{m} f\varphi^2, \qquad \psi'_t = 2f\varphi\psi + mg.$$

Интегрируя, получим

$$\varphi = \frac{1}{F}, \quad \psi = F^{-\frac{m}{m+2}}\left(A + m\int gF^{\frac{m}{m+2}}\,dt\right),$$
$$F = B - \frac{2(m+2)}{m}\int f\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + g(x)w^{m+1}$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (C, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(x)\varphi^m\varphi'_x]'_x + g(x)\varphi^{m+1} + \lambda\varphi = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$z = \int\frac{dx}{f(x)}, \quad \Phi = \varphi^{m+1}$$

приводит (1) к уравнению

$$\Phi''_{zz} + F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}} + G(z)\Phi = 0, \tag{2}$$

где функции $F = F(z)$ и $G = G(z)$ задаются параметрически с помощью формул

$$\begin{cases} F = \lambda(m+1)f(x), \\ z = \displaystyle\int\frac{dx}{f(x)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} G = (m+1)f(x)g(x), \\ z = \displaystyle\int\frac{dx}{f(x)}. \end{cases}$$

В частном случае $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^k$ уравнение (2) имеет вид

$$\Phi''_{zz} + Az^{\frac{n}{1-n}}\Phi^{\frac{1}{m+1}} + Bz^{\frac{n+k}{1-n}}\Phi = 0, \qquad n \neq 1, \tag{3}$$

где $A = \lambda a(m+1)\left[a(1-n)\right]^{\frac{n}{1-n}}$, $B = ab(m+1)\left[a(1-n)\right]^{\frac{n+k}{1-n}}$.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (3) для различных значений параметров n, m, k.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w$.

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\left[\int h(t)\,dt\right], \quad z = x + \int g(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)\exp\left[m\int h(t)dt\right]dt$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.7.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \big[xg(t) + h(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + s(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)S(t), \quad z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)S^m(t)\,dt,$$

где функции S и G определяются формулами

$$S(t) = \exp\Big[\int s(t)\,dt\Big], \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.7.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(t,x) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{2-k}(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции G и H определяются формулами

$$G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big], \quad H(t) = \exp\Big[\int h(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.1.10.4:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z^k \frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)e^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(\beta t + C) + \frac{1}{\beta}\ln\Big[\int \frac{A - \beta x}{f(x)}\,dx + B\Big],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)e^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + g(x)e^{\beta w}.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(\beta t + C) + \varphi(x),$$

где β, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$[f(x)\psi'_x]'_x + \beta g(x)\psi + \beta = 0, \qquad \psi = e^{\beta\varphi}.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^{1-n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

К этому уравнению приводятся нелинейные задачи диффузионного пограничного слоя (f — аналог коэффициента диффузии, $n = 1, 2, 3$), которые описываются уравнением 1.6.17.2. При $n = 1$ см. уравнение 1.6.13.1, при $f(w) = aw^m$ см. уравнение 1.1.10.4.

1°. Автомодельное решение при $n \neq -1$:

$$w = w(z), \quad z = xt^{-\frac{1}{n+1}} \qquad (0 \leqslant x < \infty)$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(n+1)\big[f(w)w'_z\big]'_z + z^n w'_z = 0, \tag{1}$$

которое часто рассматривается с граничными условиями (3) из 1.6.13.1.

Общее решение уравнения (1) при $f(w) = a(w+b)^{-1}$, n — произвольная постоянная, приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993).

2°. Опишем простой способ поиска функций $f(w)$, для которых уравнение (1) допускает точное решение. Для этого проинтегрируем уравнение (1) по z, а затем сделаем преобразование годографа (переменную w будем считать независимой, а z — зависимой). В результате получим

$$f(w) = -\frac{1}{n+1} z'_w \left(\int z^n \, dw + A\right), \qquad A \text{ — любое.} \tag{2}$$

Подставляя в правую часть формулы (2) конкретную зависимость $z = z(w)$, будем получать однопараметрическое семейство функций $f(w)$, для которых уравнение (1) имеет решение $z = z(w)$. Явный вид решения $w = w(z)$ находится обращением зависимости $z = z(w)$.

Выбирая, например, $z = (1-w)^k$, из формулы (2) получим соответствующую функцию

$$f(w) = A(1-w)^{k-1} - \frac{k}{(n+1)(nk+1)}(1-w)^{k(n+1)}, \qquad A \text{ — любое.}$$

3°. Другой способ построения функций $f(w)$, для которых уравнение (1) допускает точное аналитическое решение, заключается в следующем. Пусть $\bar{w} = \bar{w}(z)$ — некоторое решение уравнения (1) с функцией $f(w)$. Тогда $\bar{w} = \bar{w}(z)$ будет также решением и более сложного уравнения $(n+1)[F(w)w'_z]'_z + z^n w'_z = 0$ при

$$F(w) = f(w) + Ag(w) \qquad (A \text{ — любое}), \tag{3}$$

где функция $g = g(w)$ задается параметрически формулами

$$g(w) = \frac{1}{\bar{w}'_z}, \quad w = \bar{w}(z). \tag{4}$$

Например, для степенной зависимости $f(w) = aw^m$ частным решением уравнения (1) будет функция $\bar{w} = bz^{\frac{n+1}{m}}$, где b — некоторая константа. Из формул (3), (4) получим, что $\bar{w}$ будет также являться решением уравнения (1) и при $f(w) = aw^m + Aw^{\frac{m-n-1}{n+1}}$.

4°. При $n = -1$ существуют точные решения вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \ln|x| + \lambda t,$$

которые определяются неявно по формулам

$$\int \frac{f(w)\,dw}{\lambda w + F(w) + C_1} = \xi + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\varphi(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[xg(t) + h(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.6.14.3:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \varphi(w)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \big[xg(t) + h(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 1.6.13.1:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\varphi(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Big].$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

1.6.16. Уравнения вида $\frac{\partial w}{\partial t} = f\Big(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = at + b + \varphi(x),$$

где a, b — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$f(x)\big(\varphi'_x\big)^k\varphi''_{xx} = a.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = (Akt + B)^{-1/k}\Theta(x) + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$f(x)\big(\Theta'_x\big)^k\Theta''_{xx} + A\Theta = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Это уравнение нелинейной теории фильтрации; оно описывает также движение нелинейной вязко-пластической среды.

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(z), \qquad z = kx + \lambda t, \tag{1}$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k^2 f(k\varphi'_z)\varphi''_{zz} = \lambda\varphi'_z + A. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) можно представить в параметрическом виде

$$\varphi = k\int\frac{uf(u)\,du}{\lambda u + Ak} + C_1, \qquad z = k^2\int\frac{f(u)\,du}{\lambda u + Ak} + C_2, \tag{3}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные,

При $A = 0$ формулы (1), (3) описывают решение типа бегущей волны, а при $\lambda = 0$ — решение в виде суммы функций разных аргументов.

2°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = \sqrt{t}\,\Theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $\Theta(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2f(\Theta'_\xi)\Theta''_{\xi\xi} + \xi\Theta'_\xi - \Theta = 0.$$

3°. Замена $u(x,t) = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению вида 1.6.13.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

4°. Преобразование годографа

$$\bar{x} = w(x,t), \quad \bar{w}(\bar{x},t) = x$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \bar{f}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, \qquad \bar{f}(z) = \frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right).$$

5°. Преобразование

$$\bar{t} = \alpha t + \gamma_1, \quad \bar{x} = \beta_1 x + \beta_2 w + \gamma_2, \quad \bar{w} = \beta_3 x + \beta_4 w + \gamma_3,$$

где α, β_i, γ_i — произвольные постоянные ($\alpha \neq 0$, $\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3 \neq 0$) переводит исходное уравнение в уравнение такого же вида. При этом

$$\bar{f}(\bar{w}_{\bar{x}}) = \frac{1}{\alpha}(\beta_1 + \beta_2 w_x)^2 f(w_x), \qquad w_x = \frac{\beta_1 \bar{w}_{\bar{x}} - \beta_3}{\beta_4 - \beta_2 \bar{w}_{\bar{x}}},$$

где индексы x и $\bar{x}$ соответствуют частным производным.

Частный случай 1. Уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad k \neq 0.$$

Точное решение (C_1, C_2 — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (t + C_1)^{-1/k}u(x) + C_2,$$

где функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $ak(u'_x)^k u''_{xx} + u = 0$, общее решение которого можно записать в неявном виде

$$\int \left(C_3 - \frac{k+2}{2ak}u^2\right)^{-\frac{1}{k+2}} du = x + C_4.$$

Частный случай 2. Уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a}{w_x^2 + b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad w_x = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

1. Точное решение:

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C_1 - b^2(x + C_2)^2 - 2at} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2. Точное решение (C — произвольная постоянная):

$$w = bx\,\mathrm{tg}\left(\pm\frac{1}{2}z - \mathrm{arctg}(\psi(z)) \pm \frac{a}{b^2}t + C\right),$$
$$z = x^2\cos^{-2}\left(\pm\frac{1}{2}z - \mathrm{arctg}(\psi(z)) \pm \frac{a}{b^2}t + C\right),$$

где функция $\psi = \psi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\psi'_z = \frac{1}{2}(1 + \psi^2)\left(\pm 1 - \frac{\psi}{z}\right).$$

В указанном решении зависимость $z = z(x,t)$ задается неявно.

3. Точное решение (C — произвольная постоянная):

$$w = bx\,\mathrm{tg}\left(\varphi(z) + \frac{C}{2}\ln\frac{at}{b^2}\right),$$
$$z = \frac{b^2x^2}{at}\cos^{-2}\left(\varphi(z) + \frac{C}{2}\ln\frac{at}{b^2}\right),$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_z = \frac{\psi}{2z}, \quad \psi'_z = \frac{1}{2}(1 + \psi^2)\left(\frac{C}{2} - \frac{\psi}{2} - \frac{\psi}{z}\right).$$

В указанном решении зависимость $z = z(x,t)$ задается неявно.

Частный случай 3. Уравнение
$$\frac{\partial w}{\partial t} = k\exp\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$
Точное решение:
$$w(x,t) = 2A\,\mathrm{arctg}\Bigl(\frac{x+B}{A}\Bigr) - (x+B)\ln\Bigl|\frac{kt+C}{(x+B)^2+A^2}\Bigr| - (2+\ln 2)x + D,$$
где A, B, C, D — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: Э. В. Ленский (1966), И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989), N. H. Ibragimov (1994).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)g(w)h(w_x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad w_x = \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование годографа (x принимается за зависимую переменную, а w — за независимую переменную)
$$x = u, \quad w = y$$
приводит к уравнению аналогичного вида для функции $u = u(y,t)$:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(y)f(u)\overline{h}(u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \text{где} \quad \overline{h}(z) = z^{-2}h(1/z).$$

1.6.17. Нелинейные уравнения теплового (диффузионного) пограничного слоя

1. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr].$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен капель и пузырей с потоком).

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)
$$t = \int \frac{h^2(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Bigl[-\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Bigr],$$
приводит к более простому уравнению вида 1.6.13.1:
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\Bigl[\varphi(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (1980 *a*, *b*), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

2. $f(x)y^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y^n\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr].$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен твердых частиц и капель), x — координата, направленная вдоль поверхности тела, y — координата, направленная по нормали к поверхности тела.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)
$$t = \int \frac{h^{n+1}(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Bigl[-\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Bigr],$$
приводит к более простому уравнению вида 1.6.15.13:
$$\frac{\partial w}{\partial t} = z^{1-n}\frac{\partial}{\partial z}\Bigl[\varphi(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr].$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

3. $f\Bigl(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\Bigr)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}g\Bigl(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\Bigr)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr].$

Это уравнение является обобщением линейного уравнения теплового пограничного слоя на плоской пластине.

1°. Автомодельное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{x}}, \tag{1}$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[\varphi(w)w'_\xi]'_\xi + \left[\tfrac{1}{2}\xi f(\xi) - g(\xi)\right]w'_\xi = 0. \tag{2}$$

2°. Решение исходного уравнения в частных производных с простейшими граничными условиями первого рода

$$x = 0,\ w = a; \quad y = 0,\ w = b; \quad y \to \infty,\ w \to a,$$

где a, b — некоторые постоянные, сводится к решению уравнения (2) с граничными условиями

$$\xi = 0,\ w = b; \quad \xi \to \infty,\ w \to a.$$

Замечание. Классическое уравнение теплового пограничного слоя задается соотношениями:

$$f(\xi) = \Pr F'_\xi(\xi), \qquad g(\xi) = \tfrac{1}{2}\Pr\left[\xi F'_\xi(\xi) - F(\xi)\right],$$

где $F(\xi)$ — решение Блазиуса в гидродинамической задаче о продольном обтекании плоской пластины однородным поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости, $\Pr$ — число Прандтля (x — координата, направленная вдоль пластины, а y — координата, направленная по нормали к поверхности пластины).

1.7. Нелинейное уравнение Шредингера и родственные уравнения

1.7.1. Уравнения вида $i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(|w|)w = 0$, содержащие произвольные параметры

В этом разделе w — комплексная функция действительных переменных x и t, $i^2 = -1$.

1. $i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k|w|^2 w = 0.$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, k — действительное число.

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = C_1 \exp\bigl\{i\,[C_2 x + (kC_1^2 - C_2^2)t + C_3]\bigr\},$$

$$w(x,t) = \pm C_1\sqrt{\frac{2}{k}}\,\frac{\exp[i(C_1^2 t + C_2)]}{\operatorname{ch}(C_1 x + C_3)},$$

$$w(x,t) = \pm A\sqrt{\frac{2}{k}}\,\frac{\exp[iBx + i(A^2 - B^2)t + iC_1]}{\operatorname{ch}(Ax - 2ABt + C_2)},$$

$$w(x,t) = \frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\left[i\frac{(x + C_2)^2}{4t} + i(kC_1^2\ln t + C_3)\right],$$

где A, B, C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные. Второе и третье решения справедливы при $k > 0$.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = (ax + b)\exp\left[i(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\right],$$

где функции $a = a(t)$, $b = b(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
a'_t &= -6a\alpha,\\
b'_t &= -2a\beta - 2b\alpha,\\
\alpha'_t &= ka^2 - 4\alpha^2,\\
\beta'_t &= 2kab - 4\alpha\beta,\\
\gamma'_t &= kb^2 - \beta^2.
\end{aligned}$$

3°. О других точных решениях см. уравнение 1.7.4.1 при $f(u) = ku^2$.

4°. О преобразовании Беклунда, сохраняющим вид уравнения, см. разд. В.5 (пример 2).

5°. Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью интегрируется методом обратной задачи рассеяния, см. цитируемую ниже литературу.

⊙ *Литература*: В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1971), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980, стр. 85–97), Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев (1986), М. Абловиц, Х. Сигур (1987), Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис (1988).

2. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(A|w|^2+B)w=0.$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, A и B — действительные числа.

1°. Точные решения:

$$w(x,t)=C_1\exp\bigl\{i\,[C_2x+(AC_1^2+B-C_2^2)t+C_3]\bigr\},$$
$$w(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl[i\frac{(x+C_2)^2}{4t}+i(AC_1^2\ln t+Bt+C_3)\Bigr],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=(ax+b)\exp\bigl[i(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\bigr],$$

где функции $a=a(t)$, $b=b(t)$, $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$, $\gamma=\gamma(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}a'_t&=-6a\alpha,\\ b'_t&=-2a\beta-2b\alpha,\\ \alpha'_t&=Aa^2-4\alpha^2,\\ \beta'_t&=2Aab-4\alpha\beta,\\ \gamma'_t&=Ab^2-\beta^2+B.\end{aligned}$$

3°. О других точных решениях см. уравнение 1.7.4.1 при $f(u)=Au^2+B$.

3. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(A|w|^2+B|w|+C)w=0.$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, A, B, C — действительные числа.

1°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t)=(ax+b)\exp\bigl[i(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\bigr],$$

где функции $a=a(t)$, $b=b(t)$, $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$, $\gamma=\gamma(t)$ — действительные функции действительного переменного.

2°. О других точных решениях см. уравнение 1.7.4.1 при $f(u)=Au^2+Bu+C$.

4. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A|w|^{2n}w=0.$

Уравнение Шредингера со степенной нелинейностью, A, n — действительные числа.

1°. Точные решения:

$$w(x,t)=C_1\exp\bigl\{i\,[C_2x+(A|C_1|^{2n}-C_2^2)t+C_3]\bigr\},$$
$$w(x,t)=\pm\Bigl[\frac{(n+1)C_1^2}{A\operatorname{ch}^2(C_1nx+C_2)}\Bigr]^{\frac{1}{2n}}\exp[i(C_1^2t+C_3)],$$
$$w(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl[i\frac{(x+C_2)^2}{4t}+i\Bigl(\frac{AC_1^{2n}}{1-n}t^{1-n}+C_3\Bigr)\Bigr],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

2°. О других точных решениях см. уравнение 1.7.4.1 при $f(u)=Au^{2n}$.

1.7.2. Уравнения вида $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+f(|w|)w=0$, содержащие произвольные параметры

В этом разделе w — комплексная функция действительных переменных x и t, $i^2=-1$. Значениям $n=1$ и $n=2$ соответствует двумерное и трехмерное уравнение Шредингера с осевой и центральной симметрией.

1. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+A|w|^2w=0.$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u+Au^3=0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp\big[i\varphi(x,t)\big],\qquad \varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{dx}{x^nu^2(x)}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u-C_2^2x^{-2n}u^{-3}+Au^3=0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=C_1(t+C_2)^{-\frac{n+1}{2}}\exp\big[i\varphi(x,t)\big],\qquad \varphi(x,t)=\frac{x^2}{4(t+C_2)}-\frac{AC_1^2}{n(t+C_2)^n}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

2. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+(A|w|^2+B)w=0.$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u+(Au^2+B)u=0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp\big[i\varphi(x,t)\big],\qquad \varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{dx}{x^nu^2(x)}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u-C_2^2x^{-2n}u^{-3}+(Au^2+B)u=0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=C_1(t+C_2)^{-\frac{n+1}{2}}\exp\big[i\varphi(x,t)\big],\qquad \varphi(x,t)=\frac{x^2}{4(t+C_2)}-\frac{AC_1^2}{n(t+C_2)^n}+Bt+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

3. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+(A|w|^2+B|w|+C)w=0.$

Частный случай уравнения 1.7.4.4 при $f(u)=Au^2+Bu+C$.

4. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+A|u|^k w=0.$

Уравнение Шредингера со степенной нелинейностью.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^n u'_x)'_x-C_1u+A|u|^k u=0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp\big[i\varphi(x,t)\big],\quad \varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{dx}{x^n u^2(x)}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^n u'_x)'_x-C_1u-C_2^2x^{-2n}u^{-3}+A|u|^k u=0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=C_1(t+C_2)^{-\frac{n+1}{2}}\exp\big[i\varphi(x,t)\big],$$
$$\varphi(x,t)=\frac{x^2}{4(t+C_2)}+\frac{2A|C_1|^k}{2-k-nk}(t+C_2)^{\frac{2-k-nk}{2}}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

1.7.3. Уравнения с кубической нелинейностью, содержащие произвольные функции

В этом разделе w — комплексная функция действительных переменных x и t, $i^2=-1$.

1. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\big[f(t)|w|^2+g(t)\big]w=0.$

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, $f(t)$ и $g(t)$ — действительные функции действительного переменного.

1°. Точное решение:

$$w(x,t)=C_1\exp\big[i\varphi(x,t)\big],\quad \varphi(x,t)=C_2x-C_2^2t+\int\big[f(t)+g(t)\big]\,dt+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\big[i\varphi(x,t)\big],\quad \varphi(x,t)=\frac{(x+C_2)^2}{4t}+\int\big[C_1^2f(t)+tg(t)\big]\frac{dt}{t}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=(ax+b)\exp\big[i(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\big],$$

где функции $a=a(t)$, $b=b(t)$, $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$, $\gamma=\gamma(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
a'_t&=-6a\alpha,\\
b'_t&=-2a\beta-2b\alpha,\\
\alpha'_t&=f(t)a^2-4\alpha^2,\\
\beta'_t&=2f(t)ab-4\alpha\beta,\\
\gamma'_t&=f(t)b^2-\beta^2+g(t).
\end{aligned}$$

2. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[f_1(t)+if_2(t)]w|w|^2+[g_1(t)+ig_2(t)]w=0.$

Уравнения этого вида встречаются в нелинейной оптике.

1°. Точные решения:

$$w(x,t)=\pm u(t)\exp[i\varphi(x,t)],\quad \varphi(x,t)=C_1x-C_1^2t+\int[f_1(t)u^2(t)+g_1(t)]\,dt+C_2.$$

Здесь функция $u=u(t)$ описывается уравнением Бернулли $u'_t+f_2(t)u^3+g_2(t)u=0$, общее решение которого имеет вид

$$u(t)=\Bigl[C_3e^{G(t)}+2e^{G(t)}\int e^{-G(t)}f_2(t)\,dt\Bigr]^{-1/2},\quad G(t)=2\int g_2(t)\,dt.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=\pm u(t)\exp[i\varphi(x,t)],\quad \varphi(x,t)=\frac{(x+C_1)^2}{4t}+\int[f_1(t)u^2(t)+g_1(t)]\,dt+C_2,$$

где функция $u=u(t)$ описывается уравнением Бернулли

$$u'_t+f_2(t)u^3+\Bigl[g_2(t)+\frac{1}{2t}\Bigr]u=0.$$

Интегрируя, получим

$$u(t)=\Bigl[C_3e^{G(t)}+2e^{G(t)}\int e^{-G(t)}f_2(t)\,dt\Bigr]^{-1/2},\quad G(t)=\ln t+2\int g_2(t)\,dt.$$

3. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[f_1(x)+if_2(x)]w|w|^2+[g_1(x)+ig_2(x)]w=0.$

Точное решение:

$$w(x,t)=\pm u(x)\exp[iC_1t+i\theta(x)],$$

где функции $u=u(x)$ и $\theta=\theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2u'_x\theta'_x+u\theta''_{xx}+f_2(x)u^3+g_2(x)u=0,$$
$$u''_{xx}-C_1u-u(\theta'_x)^2+f_1(x)u^3+g_1(x)u=0.$$

4. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+[f_1(t)+if_2(t)]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[g_1(t)+ig_2(t)]w|w|^2+[h_1(t)+ih_2(t)]w=0.$

Точные решения:

$$w(x,t)=\pm u(t)\exp[i\varphi(x,t)],\quad \varphi(x,t)=C_1x+\int[-C_1^2f_1(t)+g_1(t)u^2(t)+h_1(t)]\,dt+C_2.$$

Здесь функция $u=u(t)$ описывается уравнением Бернулли

$$u'_t+g_2(t)u^3+[h_2(t)-C_1^2f_2(t)]u=0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u(t)=\Bigl[C_3e^{F(t)}+2e^{F(t)}\int e^{-F(t)}g_2(t)\,dt\Bigr]^{-1/2},\quad F(t)=2\int\bigl[h_2(t)-C_1^2f_2(t)\bigr]\,dt.$$

5. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+[f_1(x)+if_2(x)]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[g_1(x)+ig_2(x)]w|w|^2+[h_1(x)+ih_2(x)]w=0.$

Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp[iC_1t+i\theta(x)],$$

где функции $u=u(x)$ и $\theta=\theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2f_1u'_x\theta'_x+f_1u\theta''_{xx}+f_2u''_{xx}-f_2u(\theta'_x)^2+g_2u^3+h_2u=0,$$
$$f_1u''_{xx}-C_1u-f_1u(\theta'_x)^2-2f_2u'_x\theta'_x-f_2u\theta''_{xx}+g_1u^3+h_1u=0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+[f_1(t)+if_2(t)]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[g_1(t)+ig_2(t)]w|w|^2+[h_1(t)+ih_2(t)]w=0.$

Данное уравнение при $f_n, g_n, h_n = \text{const}$ используется для описания двухкомпонентных реакционно-диффузионных систем в окрестности точки бифуркации (Y. Kuramoto, T. Tsuzuki, 1975).

Точные решения:

$$w(x,t)=\pm u(t)\exp[i\varphi(x,t)],\quad \varphi(x,t)=C_1x+\int[C_1^2f_2(t)-g_2(t)u^2(t)-h_2(t)]\,dt+C_2.$$

Здесь функция $u=u(t)$ описывается уравнением Бернулли

$$u_t'+g_1(t)u^3+[h_1(t)-C_1^2f_1(t)]u=0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u(t)=\Bigl[C_3e^{F(t)}+2e^{F(t)}\int e^{-F(t)}g_1(t)\,dt\Bigr]^{-1/2},\quad F(t)=2\int\bigl[h_1(t)-C_1^2f_1(t)\bigr]\,dt.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+[f_1(x)+if_2(x)]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[g_1(x)+ig_2(x)]w|w|^2+[h_1(x)+ih_2(x)]w=0.$

Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp[iC_1t+i\theta(x)],$$

где функции $u=u(x)$ и $\theta=\theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_1u_{xx}''-f_1u(\theta_x')^2-f_2u\theta_{xx}''-2f_2u_x'\theta_x'+g_1u^3+h_1u=0,$$
$$f_2u_{xx}''+C_1u-f_2u(\theta_x')^2+f_1u\theta_{xx}''+2f_1u_x'\theta_x'+g_2u^3+h_2u=0.$$

1.7.4. Уравнения общего вида, содержащие произвольные функции

В этом разделе w — комплексная функция действительных переменных x и t, $i^2=-1$.

1. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(|w|)w=0.$

Уравнение Шредингера общего вида, $f(u)$ — действительная функция действительного переменного.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения Шредингера. Тогда функция

$$w_1=e^{-i(\lambda x+\lambda^2t+C_1)}w(x+2\lambda t+C_2,\,t+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные действительные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t)=C_1\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_2x-C_2^2t+f(|C_1|)t+C_3.$$

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где функция $u=u(x)$ определяется неявно по формулам

$$\int\frac{du}{\sqrt{C_1u^2-2F(u)+C_3}}=C_4\pm x,\quad F(u)=\int uf(|u|)\,du.$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные действительные постоянные.

4°. Точное решение:

$$w(x,t)=U(\xi)e^{i(Ax+Bt+C)},\quad \xi=x-2At,\tag{1}$$

где функция $U=U(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $U_{\xi\xi}''+f(|U|)U-(A^2+B)U=0$. Интегрируя, получим решение в неявном виде

$$\int\frac{dU}{\sqrt{(A^2+B)U^2-2F(U)+C_1}}=C_2\pm\xi,\quad F(U)=\int Uf(|U|)\,dU.\tag{2}$$

В формулы (1) и (2) входят произвольные действительные постоянные A, B, C, C_1, C_2.

5°. Точное решение (A, B, C — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \psi(z)\exp\bigl[i(Axt - \tfrac{2}{3}A^2t^3 + Bt + C)\bigr], \qquad z = x - At^2,$$

где функция $\psi = \psi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\psi''_{zz} + f(|\psi|)\psi - (Az + B)\psi = 0.$$

6°. Точные решения:

$$w(x,t) = \pm\frac{1}{\sqrt{C_1 t}}\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \qquad \varphi(x,t) = \frac{(x+C_2)^2}{4t} + \int f\bigl(|C_1 t|^{-1/2}\bigr)\,dt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

7°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \qquad \varphi(x,t) = C_1 t + C_2\int\frac{dx}{u^2(x)} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{xx} - C_1 u - C_2^2 u^{-3} + f(|u|)u = 0.$$

8°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(z)\exp\bigl[iAt + i\varphi(z)\bigr], \qquad z = kx + \lambda t,$$

где A, k, λ — произвольные действительные постоянные, а функции $u = u(z)$ и $\varphi = \varphi(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$k^2 u\varphi''_{zz} + 2k^2 u'_z\varphi'_z + \lambda u'_z = 0,$$
$$k^2 u''_{zz} - k^2 u(\varphi'_z)^2 - \lambda u\varphi'_z - Au + f(|u|)u = 0.$$

2. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,|w|)w = 0.}$

Уравнение Шредингера общего вида, $f(x,u)$ — действительная функция двух действительных переменных.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = u(x)e^{i(C_1 t + C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{xx} - C_1 u + f(x,|u|)u = 0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \qquad \varphi(x,t) = C_1 t + C_2\int\frac{dx}{u^2(x)} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{xx} - C_1 u - C_2^2 u^{-3} + f(x,|u|)u = 0.$$

3. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t,|w|)w = 0.}$

Уравнение Шредингера общего вида, $f(t,u)$ — действительная функция двух действительных переменных.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения Шредингера. Тогда функция

$$w_1 = e^{-i(\lambda x + \lambda^2 t + C_1)}w(x + 2\lambda t + C_2,\, t),$$

где C_1, C_2, λ — произвольные действительные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t)=C_1\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_2x-C_2^2t+\int f(t,|C_1|)\,dt+C_3;$$

$$w(x,t)=C_1t^{-1/2}\exp\bigl[i\psi(x,t)\bigr],\quad \psi(x,t)=\frac{(x+C_2)^2}{4t}+\int f\bigl(t,|C_1|t^{-1/2}\bigr)\,dt+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные.

4. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+f(|w|)w=0.}$

Уравнение Шредингера общего вида, $f(u)$ — действительная функция действительного переменного. Значениям $n=1$ и $n=2$ соответствует двумерное и трехмерное уравнение Шредингера с осевой и центральной симметрией.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u+f(|u|)u=0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{dx}{x^nu^2(x)}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u-C_2^2x^{-2n}u^{-3}+f(|u|)u=0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=C_1t^{-\frac{n+1}{2}}\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=\frac{x^2}{4t}+\int f\Bigl(|C_1|t^{-\frac{n+1}{2}}\Bigr)\,dt+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

5. $\boldsymbol{i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+f(x,|w|)w=0.}$

Уравнение Шредингера общего вида, $f(x,u)$ — действительная функция двух действительных переменных. Значениям $n=1$ и $n=2$ соответствует двумерное и трехмерное уравнение Шредингера с осевой и центральной симметрией.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновениым дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u+f(x,|u|)u=0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\quad \varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{dx}{x^nu^2(x)}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^{-n}(x^nu'_x)'_x-C_1u-C_2^2x^{-2n}u^{-3}+f(x,|u|)u=0.$$

6. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+f(t,|w|)w=0.$

Уравнение Шредингера общего вида, $f(t,u)$ — действительная функция двух действительных переменных.

Точное решение:

$$w(x,t)=C_1t^{-\frac{n+1}{2}}\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\qquad \varphi(x,t)=\frac{x^2}{4t}+\int f\Bigl(t,|C_1|t^{-\frac{n+1}{2}}\Bigr)\,dt+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

7. $i\dfrac{\partial w}{\partial t}+f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+\Phi(x,|w|)w=0.$

Уравнение Шредингера общего вида, $\Phi(x,u)$ — действительная функция двух действительных переменных. Случай $g(x)=f'_x(x)$ соответствует анизотропной среде.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=u(x)e^{i(C_1t+C_2)},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u=u(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)u''_{xx}+g(x)u'_x-C_1u+\Phi(x,|u|)u=0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=U(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],$$

$$\varphi(x,t)=C_1t+C_2\int\frac{R(x)}{U^2(x)}\,dx+C_3,\qquad R(x)=\exp\Bigl[-\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Bigr],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, а функция $U=U(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)U''_{xx}+g(x)U'_x-C_1U-C_2^2f(x)R^2(x)U^{-3}+\Phi(x,|U|)U=0.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=(a+ib)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\bigl[f(|w|)+ig(|w|)\bigr]w.$

Обобщенное уравнение Ландау — Гинзбурга, $f(u)$ и $g(u)$ — действительные функции действительного переменного, a и b — действительные постоянные. Уравнения этого вида используются для изучения фазовых переходов второго рода в теории сверхпроводимости (Л. Д. Ландау, В. Л. Гинзбург, 1950) и для описания двухкомпонентных реакционно-диффузионных систем в окрестности точки бифуркации (Y. Kuramoto, T. Tsuzuki, 1975).

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения обобщенного уравнения Ландау — Гинзбурга. Тогда функция

$$w_1=e^{iC_1}w(x+C_2,t+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные действительные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t)=C_1\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\qquad \varphi(x,t)=\pm x\sqrt{\frac{f(|C_1|)}{a}}+t\Bigl[g(|C_1|)-\frac{b}{a}f(|C_1|)\Bigr]+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t)=u(t)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr],\qquad \varphi(x,t)=C_1x+\int g(|u|)\,dt+C_2,$$

где $u=u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $u'_t=f(|u|)u-aC_1^2u$, общее решение которого можно представить в неявном виде

$$\int\frac{du}{f(|u|)u-aC_1^2u}=t+C_3.$$

4°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(z)\exp\bigl[iC_1 t + i\theta(z)\bigr], \qquad z = x + \lambda t,$$

где C_1, λ — произвольные действительные постоянные, а функции $U = U(z)$ и $\theta = \theta(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$aU''_{zz} - aU(\theta'_z)^2 - bU\theta''_{zz} - 2bU'_z\theta'_z - \lambda U'_z + f(|U|)U = 0,$$
$$aU\theta''_{zz} - bU(\theta'_z)^2 + bU''_{zz} + 2aU'_z\theta'_z - \lambda U\theta'_z - C_1U + g(|U|)U = 0.$$

⊙ *Литература*: В. С. Берман, Ю. А. Данилов (1981).

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \bigl[f_1(t,|w|) + if_2(t,|w|)\bigr]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[g_1(t,|w|) + ig_2(t,|w|)\bigr]w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = u(t)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \qquad \varphi(x,t) = C_1x + \int\bigl[g_2(t,|u|) - C_1^2 f_2(t,|u|)\bigr]\,dt + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные, а функция $u = u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u'_t = ug_1(t,|u|) - C_1^2 uf_1(t,|u|).$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \bigl[f_1(x,|w|) + if_2(x,|w|)\bigr]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[g_1(x,|w|) + ig_2(x,|w|)\bigr]w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = u(x)\exp\bigl[i\varphi(x,t)\bigr], \qquad \varphi(x,t) = C_1t + \theta(x),$$

где функции $u = u(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_1u''_{xx} - f_1u(\theta'_x)^2 - f_2u\theta''_{xx} - 2f_2u'_x\theta'_x + g_1(|u|)u = 0,$$
$$f_1u\theta''_{xx} - f_2u(\theta'_x)^2 + f_2u''_{xx} + 2f_1u'_x\theta'_x - C_1u + g_2(|u|)u = 0.$$

Здесь $f_n = f_n(x,|u|)$, $g_n = g_n(x,|u|)$, $n = 1,\ 2$.

2. Уравнения параболического типа с двумя и более пространственными переменными

2.1. Уравнения с двумя пространственными переменными

2.1.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)-kw\ln w.$

Нестационарное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения с источником логарифмического вида. Частный случай уравнения 2.1.2.1 при $f(w)=-kw\ln w$.

1°. Точное решение (A — произвольная постоянная):

$$w(x,y,t)=\exp\big[Ae^{-kt}+\Theta(x,y)\big],$$

где функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$a\Big(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\Big)+a\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big)^2+a\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\Big)^2-k\Theta=0.$$

Это уравнение имеет частное решение вида $\Theta=A_1x^2+A_2xy+A_3y^2+A_4x+A_5y+A_6$, где постоянные A_k определяются из соответствующей алгебраической системы уравнений.

2°. Точное решение:

$$w(x,y,t)=\exp\big[\varphi(x,t)+\psi(y,t)\big],$$

где функции $\varphi(x,t)$, $\psi(y,t)$ находятся из двух независимых одномерных нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+a\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2-k\varphi,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=a\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+a\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big)^2-k\psi.$$

О решениях этих уравнений см. 1.6.3.4 при $f(t)=0$.

3°. Имеются точные решения вида

$$w(x,y,t)=\varphi(\xi)\psi(\eta),\qquad \xi=a_1x+b_1t,\qquad \eta=a_2y+b_2t,$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 — произвольные постоянные. Данное решение является частным случаем решения из п. 2°.

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994, стр. 114–117).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=aw\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big).$

1°. Точное решение:

$$w(x,y,t)=\varphi(t)(C_1x^2+C_2xy+C_3y^2+C_4x+C_5y+C_6),\qquad \varphi(t)=\frac{1}{C_7-2a(C_1+C_3)t},$$

где C_k — произвольные постоянные.

2°. Уравнение допускает более общее решение вида

$$w(x,y,t) = \frac{\Theta(x,y)}{A+Bt},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\Theta = \Theta(x,y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона

$$a\Delta\Theta + B = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$a(k_1^2 + k_2^2)\int \frac{dw}{\lambda \ln|w| + C_1} = k_1 x + k_2 y + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

4°. Уравнение имеет «двумерные» решения следующего вида:

$$\begin{aligned}
&w(x,y,t) = F(z,t), && z = k_1x + k_2y;\\
&w(x,y,t) = G(r,t), && r = \sqrt{x^2+y^2};\\
&w(x,y,t) = H(\xi_1,\xi_2), && \xi_1 = k_1x + \lambda_1 t, \quad \xi_2 = k_2 x + \lambda_2 t;\\
&w(x,y,t) = t^\beta U(\eta_1,\eta_2), && \eta_1 = x^2 t^{-\beta-1}, \quad \eta_2 = y^2 t^{-\beta-1};\\
&w(x,y,t) = e^{2t} V(\zeta_1,\zeta_2), && \zeta_1 = xe^{-t}, \quad \zeta_2 = ye^{-t},
\end{aligned}$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2, β — произвольные постоянные.

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = (\alpha + \beta w)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \gamma w^2 + \delta w + \varepsilon.$

Уравнение допускает решения вида

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\Theta(x,y).$$

Здесь $\Theta(x,y)$ — любое решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \varkappa\Theta = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1}$$

где $\varkappa = \gamma/\beta$ ($\beta \neq 0$). О решениях линейного уравнения (1) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Функции $f(t)$ и $g(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
f'_t &= \gamma f^2 + \delta f + \varepsilon,\\
g'_t &= (\gamma f + \delta - \alpha\varkappa)g.
\end{aligned} \tag{2}$$

Первое уравнение этой системы не зависит от функции $g(t)$ и представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. После определения $f(t)$ решается второе уравнение (2), которое линейно относительно функции $g(t)$.

Функции $f(t)$ и $g(t)$ имеют различный вид в зависимости от значений параметров уравнения. Выделим пять возможных случаев, ниже C_1, C_2 — произвольные постоянные.

1°. При $\gamma = \delta = 0$ имеем

$$f(t) = C_1 + \varepsilon t, \quad g(t) = C_2 e^{-\alpha\varkappa t}.$$

2°. При $\gamma = 0$, $\delta \neq 0$ имеем

$$f(t) = C_1 e^{\delta t} - \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad g(t) = C_2 e^{(\delta - \alpha\varkappa)t}.$$

3°. При $\gamma \neq 0$, $\delta^2 - 4\gamma\varepsilon = \mu^2 > 0$ ($\mu > 0$) имеем

$$f(t) = \frac{s_1 + s_2 C_1 e^{\mu t}}{1 + C_1 e^{\mu t}}, \quad g(t) = \frac{C_2}{1 + C_1 e^{\mu t}} e^{-(\gamma s_2 + \alpha\varkappa)t}, \qquad s_{1,2} = \frac{-\delta \pm \mu}{2\gamma}.$$

4°. При $\gamma \neq 0$, $\delta^2 - 4\gamma\varepsilon = 0$ имеем

$$f(t) = -\frac{\delta}{2\gamma} - \frac{1}{C_1 + \gamma t}, \quad g(t) = \frac{C_2}{C_1 + \gamma t} \exp\bigl[\bigl(\tfrac{1}{2}\delta - \alpha\varkappa\bigr)t\bigr].$$

5°. При $\gamma \neq 0$, $\delta^2 - 4\gamma\varepsilon = -\mu^2 < 0$ $(\mu > 0)$ имеем

$$f(t) = \frac{\mu}{2\gamma} \operatorname{tg}\bigl(\tfrac{1}{2}\mu t + C_1\bigr) - \frac{\delta}{2\gamma}, \quad g(t) = C_2 \frac{\exp\bigl[\bigl(\frac{1}{2}\delta - \alpha\varkappa\bigr)t\bigr]}{\cos\bigl(\frac{1}{2}\mu t + C_1\bigr)}.$$

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha w\Bigl(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr) - \alpha\Bigl[\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + \Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2\Bigr] - \beta.$

1°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = C_1 - \beta t + C_2 \exp\bigl[\alpha(\mu^2 + \nu^2)\bigl(C_1 t - \tfrac{1}{2}\beta t^2\bigr)\bigr] e^{\mu x + \nu y},$$

где μ, ν, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Точные решения при $\beta = 0$:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{A + \alpha\mu^2 t} + B(A + \alpha\mu^2 t)e^{\mu x} \pm \frac{\sin(\mu y + \eta_0)}{A + \alpha\mu^2 t},$$
$$w(x,y,t) = A \operatorname{cth}\theta(t) + B \operatorname{sh}\theta(t)\, e^{\mu x} \pm A\frac{\sin(\mu y + \eta_0)}{\operatorname{sh}\theta(t)},$$
$$w(x,y,t) = A \operatorname{ctg}\theta(t) + B \sin\theta(t)\, e^{\mu x} \pm A\frac{\sin(\mu y + \eta_0)}{\sin\theta(t)},$$
$$w(x,y,t) = \frac{A}{\cos\theta(t)} \pm A\frac{1 + \sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)} \operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA\frac{1 - \sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)} \sin(\mu y + \eta_0),$$
$$w(x,y,t) = -\frac{A}{\cos\theta(t)} \pm A\frac{1 - \sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)} \operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA\frac{1 + \sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)} \sin(\mu y + \eta_0),$$
$$w(x,y,t) = \frac{A}{\operatorname{sh}\theta(t)} \pm A\frac{1 - \operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)} \operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA\frac{1 + \operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)} \sin(\mu y + \eta_0),$$
$$w(x,y,t) = -\frac{A}{\operatorname{sh}\theta(t)} \pm A\frac{1 + \operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)} \operatorname{ch}(\mu x + \xi_0) + sA\frac{1 - \operatorname{ch}\theta(t)}{2\operatorname{sh}\theta(t)} \sin(\mu y + \eta_0),$$

где A, B, μ, ξ_0, η_0, τ_0 — произвольные постоянные, $\theta(t) = \alpha\mu^2 A t + \tau_0$, s — параметр, принимающий значения 1 или -1.

Делая в указанных формулах замену $x \rightleftarrows y$, можно получить другую группу решений (которые здесь не выписываются).

3°. Уравнение допускает решения в форме

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\varphi(x) + h(t)\psi(y). \tag{1}$$

В частности при $\varphi''_{xx} = \nu\varphi$, $\psi''_{yy} = -\nu\psi$, где ν — произвольная постоянная, имеем

$$\varphi(x) = A_1 \operatorname{ch}\mu x + A_2 \operatorname{sh}\mu x, \quad \psi(y) = B_1 \cos\mu y + B_2 \sin\mu y \quad (\nu = \mu^2 > 0),$$
$$\varphi(x) = A_1 \cos\mu x + A_2 \sin\mu x, \quad \psi(y) = B_1 \operatorname{ch}\mu y + B_2 \operatorname{sh}\mu y \quad (\nu = -\mu^2 < 0).$$

Здесь A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ в (1) описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = \alpha\nu(A_1^2 - sA_2^2)g^2 - \alpha\nu(B_1^2 + sB_2^2)h^2 - \beta,$$
$$g'_t = \alpha\nu f g,$$
$$h'_t = -\alpha\nu f h,$$

где $s = \operatorname{sign}\nu$. Можно понизить порядок этой системы на два и представить ее в виде (C_1, C_2 — произвольные постоянные)

$$f = \Phi(h), \quad g = C_2/h, \quad h'_t = -\alpha\nu h\Phi(h),$$

где

$$\Phi(h) = \pm\sqrt{C_1 + (A_1^2 - sA_2^2)\frac{C_2^2}{h^2} + \frac{2\beta}{\alpha\nu}\ln|h| + (B_1^2 + sB_2^2)h^2}.$$

При $\beta = 0$ в некоторых случаях можно получить решение в явном виде (см. п. 2°).

4°. Уравнение допускает решения в форме

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\varphi(x) + h(t)\psi(y) + u(t)\theta(x)\chi(y). \qquad (2)$$

При $\varphi''_{xx} = 4\nu\varphi$, $\psi''_{yy} = -4\nu\psi$, $\theta''_{xx} = \nu\theta$, $\chi''_{yy} = -\nu\chi$, где ν — произвольная постоянная, в формуле (2) следует положить

при $\nu = \mu^2 > 0$	при $\nu = -\mu^2 < 0$
$\varphi(x) = A_1 \operatorname{ch} 2\mu x + A_2 \operatorname{sh} 2\mu x$	$\varphi(x) = A_1 \cos 2\mu x + A_2 \sin 2\mu x$
$\psi(y) = B_1 \cos 2\mu y + B_2 \sin 2\mu y$	$\psi(y) = B_1 \operatorname{ch} 2\mu y + B_2 \operatorname{sh} 2\mu y$
$\theta(x) = C_1 \operatorname{ch} \mu x + C_2 \operatorname{sh} \mu x$	$\theta(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$
$\chi(y) = D_1 \cos \mu y + D_2 \sin \mu y$	$\chi(y) = D_1 \operatorname{ch} \mu y + D_2 \operatorname{sh} \mu y$

Функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $u(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений ($s = \operatorname{sign} \nu$)

$$\begin{aligned}
f'_t &= -4\alpha\nu(A_1^2 - sA_2^2)g^2 + 4\alpha\nu(B_1^2 + sB_2^2)h^2 - \beta,\\
g'_t &= -4\alpha\nu fg + \alpha\nu a_1(D_1^2 + sD_2^2)u^2,\\
h'_t &= 4\alpha\nu fh - \alpha\nu a_2(C_1^2 - sC_2^2)u^2,\\
u'_t &= -2\alpha\nu(a_3 g - a_4 h)u.
\end{aligned}$$

Произвольные постоянные A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 связаны двумя соотношениями

$$2A_1C_1C_2 = A_2(C_1^2 + sC_2^2), \quad 2B_1D_1D_2 = B_2(D_1^2 - sD_2^2).$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 определяются формулами

$$a_1 = \frac{C_1^2 + sC_2^2}{2A_1}, \quad a_2 = \frac{D_1^2 - sD_2^2}{2B_1}, \quad a_3 = A_2\frac{C_1^2 - sC_2^2}{C_1C_2}, \quad a_4 = B_2\frac{D_1^2 + sD_2^2}{D_1D_2},$$

при $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $C_1C_2 \neq 0$, $D_1D_2 \neq 0$.

Если $A_1 = 0$ ($A_2 \neq 0$), то следует положить $a_1 = C_1C_2/A_2$. Если $B_1 = 0$ ($B_2 \neq 0$), то $a_2 = D_1D_2/B_2$. Если $C_1 = 0$ ($C_2 \neq 0$), то $a_3 = -A_1$. Если $C_2 = 0$ ($C_1 \neq 0$), то $a_3 = A_1$. Если $D_1 = 0$ ($D_2 \neq 0$), то $a_4 = -B_1$. Если $D_2 = 0$ ($D_1 \neq 0$), то $a_4 = B_1$.

5°. Уравнение имеет точное решение типа бегущей волны $w = w(k_1x + k_2y + \lambda t)$, где k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

6°. Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t).$$

В частном случае $\varphi(t) = \psi(t) \equiv 0$ функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
f'_t &= \alpha(2fh - 2f^2 - g^2), & h'_t &= \alpha(2fh - 2h^2 - g^2),\\
g'_t &= -2\alpha g(f + h), & \chi'_t &= 2\alpha(f + h)\chi - \beta,
\end{aligned}$$

которая полностью интегрируется.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

5. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(bw + c)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$

1°. Точное решение линейное по переменной y:

$$w = f(x,t)y + g(x,t),$$

где функции f и g определяются путем решения одномерных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} - a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} - a\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = bf^2. \qquad (2)$$

Уравнение (1) является линейным однородным уравнением теплопроводности. Уравнение (2) при известной $f = f(x,t)$ можно рассматривать как линейное неоднородное уравнение теплопроводности. Об этих уравнениях см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2°. Уравнение имеет точное решение квадратичное по переменной y:

$$w = f(x,t)y^2 + g(x,t)y + h(x,t).$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big).$

Уравнение Буссинеска. Встречается в нелинейных задачах теории теплопроводности и нестационарных задачах теории фильтрации со свободной поверхностью [см. П. Я. Полубаринова — Кочина (1977, стр. 433)]. Частный случай уравнения 2.1.1.12 при $n = 1$.

1°. Точное решение линейное по всем независимым переменным:

$$w(x,y,t) = Ax + By + (A^2 + B^2)t + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны (k_1, k_2, λ — произвольные постоянные):

$$w = w(\xi), \qquad \xi = k_1x + k_2y + \lambda t,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda w'_\xi = (k_1^2 + k_2^2)(ww'_\xi)'_\xi.$$

Решение этого уравнения можно записать в неявном виде

$$\xi = B + \frac{k_1^2 + k_2^2}{\lambda^2}\big(\lambda w - A\ln|A + \lambda w|\big),$$

где A, B — произвольные постоянные.

3°. Точное решение квадратичное по пространственным переменным:

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2,$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = 6f^2 + 2fh + g^2, \tag{1}$$
$$g'_t = 6(f + h)g, \tag{2}$$
$$h'_t = 6h^2 + 2fh + g^2. \tag{3}$$

Из уравнений (1), (3) следует, что $f'_t - h'_t = 6(f + h)(f - h)$. Далее с помощью уравнения (2) при $g \not\equiv 0$ находим $f = h + Ag$, где A — произвольная постоянная. Используя это равенство, исключим из (2) и (3) функцию h. В итоге имеем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для $g(t)$

$$3gg''_{tt} - 5g'^2_t - 36(1 + A^2)g^4 = 0.$$

Решая это уравнение с помощью замены $u(g) = (g'_t)^2$, получим (B — произвольная постоянная)

$$g'_t = g\Phi(g), \qquad \Phi(g) = \pm\sqrt{Bg^{4/3} + 36(1 + A^2)g^2}, \tag{4}$$
$$h = \tfrac{1}{12}\Phi(g) - \tfrac{1}{2}Ag, \quad f = \tfrac{1}{12}\Phi(g) + \tfrac{1}{2}Ag,$$

где первое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, и его решение можно выписать в неявном виде.

В частном случае $B = 0$ имеем решение в явном виде (C — произвольная постоянная):

$$f(t) = \frac{\mu + A}{2(C - \mu t)}, \quad g(t) = \frac{1}{C - \mu t}, \quad h(t) = \frac{\mu - A}{2(C - \mu t)}, \qquad \mu = \pm\sqrt{1 + A^2}.$$

4°. Уравнение допускает решения вида

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f'_t &= 6f^2 + 2fh + g^2, & \varphi'_t &= 2(3f + h)\varphi + 2g\psi,\\ g'_t &= 6(f + h)g, & \psi'_t &= 2g\varphi + 2(f + 3h)\psi,\\ h'_t &= 6h^2 + 2fh + g^2, & \chi'_t &= \varphi^2 + \psi^2 + 2(f + h)\chi. \end{aligned}$$

Первые три уравнения решаются независимо (см. п. 3°).

Частный случай. Точное решение:

$$w(x,t) = -\frac{y^2}{6t} + Cxt^{-1/3} + \frac{3}{2}C^2t^{1/3},$$

где C — произвольная постоянная.

5°. Уравнение допускает решения вида

$$w(x,y,t) = (At+B)^{-1}\Theta(x,y),$$

где A и B — произвольные постоянные, а стационарное уравнение для функции Θ выписано в 2.1.1.12 при $n=\alpha=1$.

⊙ *Литература*: С. С. Титов, В. А. Устинов (1985), В. В. Пухначев (1995), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

7. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\alpha w+\beta)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\alpha w+\beta)\frac{\partial w}{\partial y}\right].$

Это двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса, когда коэффициент температуропроводности зависит от температуры по линейному закону.

Замена $U=\alpha w+\beta$ приводит к уравнению вида 2.1.1.6:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

8. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].$

Частный случай уравнения 2.1.1.12 при $n=-1$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(\xi) = -\frac{\alpha(k_1^2+k_2^2)}{\lambda(\xi+A)}, \quad \xi = k_1x+k_2y+\lambda t,$$

$$w(\xi) = \left\{A + B\exp\left[\frac{\lambda\xi}{\alpha A(k_1^2+k_2^2)}\right]\right\}^{-1},$$

где A, B, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = \frac{2\alpha t+B}{(\sin y + Ae^x)^2},$$

$$w(x,y,t) = \frac{2A^2\alpha t+C}{e^{2x}\operatorname{sh}^2(Ae^{-x}\sin y+B)},$$

$$w(x,y,t) = \frac{C-2A^2\alpha t}{e^{2x}\operatorname{ch}^2(Ae^{-x}\sin y+B)},$$

$$w(x,y,t) = \frac{2A^2\alpha t+C}{e^{2x}\cos^2(Ae^{-x}\sin y+B)},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. Указанные в п. 2° точные решения являются частными случаями более общего решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = (A\alpha t+B)e^{\Theta(x,y)},$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ является решением стационарного уравнения

$$\Delta\Theta - Ae^{\Theta} = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

которое встречается в теории горения. О решении этого уравнения см. 5.2.1.1.

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

4°. Другие точные решения:

$$w(x,y,t) = \frac{2\,\mathrm{sh}(\alpha t+C)\,\mathrm{ch}(\alpha t+C)}{(x+A)^2\,\mathrm{sh}^2(\alpha t+C)+(y+B)^2\,\mathrm{ch}^2(\alpha t+C)},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{1}{A+\alpha\mu^2 t} + B(A+\alpha\mu^2 t)e^{\mu x} \pm \frac{\sin(\mu y+\eta_0)}{A+\alpha\mu^2 t}\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[A\,\mathrm{cth}\,\theta(t) + B\,\mathrm{sh}\,\theta(t)\,e^{\mu x} \pm A\frac{\sin(\mu y+\eta_0)}{\mathrm{sh}\,\theta(t)}\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[A\,\mathrm{ctg}\,\theta(t) + B\sin\theta(t)\,e^{\mu x} \pm A\frac{\sin(\mu y+\eta_0)}{\sin\theta(t)}\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{A}{\cos\theta(t)} \pm A\frac{1+\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\,\mathrm{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\frac{1-\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\sin(\mu y+\eta_0)\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[-\frac{A}{\cos\theta(t)} \pm A\frac{1-\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\,\mathrm{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\frac{1+\sin\theta(t)}{2\cos\theta(t)}\sin(\mu y+\eta_0)\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[\frac{A}{\mathrm{sh}\,\theta(t)} \pm A\frac{1-\mathrm{ch}\,\theta(t)}{2\,\mathrm{sh}\,\theta(t)}\,\mathrm{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\frac{1+\mathrm{ch}\,\theta(t)}{2\,\mathrm{sh}\,\theta(t)}\sin(\mu y+\eta_0)\right]^{-1},$$

$$w(x,y,t) = \left[-\frac{A}{\mathrm{sh}\,\theta(t)} \pm A\frac{1+\mathrm{ch}\,\theta(t)}{2\,\mathrm{sh}\,\theta(t)}\,\mathrm{ch}(\mu x+\xi_0) + sA\frac{1-\mathrm{ch}\,\theta(t)}{2\,\mathrm{sh}\,\theta(t)}\sin(\mu y+\eta_0)\right]^{-1},$$

где $\theta(t) = \alpha\mu^2 At + \tau_0$; A, B, μ, ξ_0, η_0, τ_0 — произвольные постоянные; s — параметр, принимающий значения 1 или −1 (первое решение указал В. В. Пухначев, 1995).

Делая в указанных формулах замену $x \rightleftarrows y$, можно получить другую группу решений (которые здесь не выписываются).

5°. Решения с осевой симметрией:

$$w(r,t) = \frac{\lambda^2 r^{\lambda-2}}{r^\lambda + Ce^{\alpha t}},$$

$$w(r,t) = \frac{\lambda\varphi r^{\varphi-2}}{C_1 + r^\varphi(\varphi\ln r - 1)}, \quad \varphi = \frac{\lambda}{\alpha t + C_2},$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$; C, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: С. Н. Аристов (1999).

6°. Преобразование $w = 1/U$ приводит к уравнению вида 2.1.1.4 при $\beta = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U\Delta U - \alpha\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right].$$

9. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha w+\beta}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\alpha w+\beta}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

Это двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса, когда коэффициент температуропроводности задается гиперболической зависимостью от температуры.

Замена $U = \alpha w + \beta$ приводит к уравнению вида 2.1.1.8:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

10. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \beta w.$

1°. Преобразование

$$w(x,y,t) = e^{\beta t}u(x,y,\tau), \quad \tau = C - \frac{1}{\beta}e^{-\beta t},$$

где C — произвольная постоянная, приводит к более простому уравнению вида 2.1.1.8:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

2°. В работе В. М. Журавлева (2000) описан нелинейный принцип суперпозиции, позволяющий строить сложные многомодовые решения исходного уравнения (там же указаны некоторые точные решения).

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)\Big] + \beta w^2.$

Замена $w = 1/U$ приводит к уравнению 2.1.1.4 для функции U.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994).

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w^n\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)\Big].$

Двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса при степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры (показатель n может быть целым, дробным и отрицательным). Частный случай уравнения 2.1.2.10 при $f(w) = \alpha w^n$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2/n}C_2^{1/n}w(C_1x + C_3, C_1y + C_4, C_2t + C_5),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\alpha(k_1^2 + k_2^2)\int\frac{w^n\,dw}{\lambda w + C_1} = k_1x + k_2y + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = f(t)\Theta(x,y), \qquad f(t) = (A\alpha nt + B)^{-1/n}.$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ — любое решение двумерного стационарного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\Theta^n\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\Theta^n\frac{\partial\Theta}{\partial y}\Big) + A\Theta = 0.$$

Последнее уравнение при $n \neq -1$ можно преобразовать к следующей форме:

$$\Delta u + A(n+1)u^{\frac{1}{n+1}} = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad u = \Theta^{n+1}.$$

4°. Уравнение имеет «двумерные» решения следующего вида:

$$\begin{aligned}
&w(x,y,t) = F(z,t), && z = k_1x + k_2y;\\
&w(x,y,t) = G(r,t), && r = \sqrt{x^2+y^2};\\
&w(x,y,t) = H(\xi_1,\xi_2), && \xi_1 = k_1x + \lambda_1t, \quad \xi_2 = k_2x + \lambda_2t;\\
&w(x,y,t) = t^\beta U(\eta_1,\eta_2), && \eta_1 = xt^{-\frac{n\beta+1}{2}}, \quad \eta_2 = yt^{-\frac{n\beta+1}{2}};\\
&w(x,y,t) = e^{2\beta t}V(\zeta_1,\zeta_2), && \zeta_1 = xe^{-\beta nt}, \quad \zeta_2 = ye^{-\beta nt},
\end{aligned}$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2, β — произвольные постоянные.

5°. См. также уравнение 2.2.2.5 для случая двух пространственных переменных при $m = n+1$.

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983), С. С. Титов, В. А. Устинов (1985), J. R. King (1993), В. В. Пухначев (1995).

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a_1\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^{n_1}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + a_2\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w^{n_2}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + bw^k.$

Частный случай уравнения 2.1.2.11 при $f(w) = a_1w^{n_1}$, $g(w) = a_2w^{n_2}$.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,y,t) = u(z), \quad z = t - \lambda_1x - \lambda_2y,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u'_z = [(a_1\lambda_1^2u^{n_1} + a_2\lambda_2^2u^{n_2})u'_z]'_z + bu^k.$$

Общее решение этого уравнения при $b = 0$ в неявном виде:

$$\int\frac{a_1\lambda_1^2u^{n_1} + a_2\lambda_2^2u^{n_2}}{u + C_1}\,du = z + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: А. А. Самарский, И. М. Соболь (1963).

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = (\alpha t+\beta)^{\frac{1}{1-k}} F(\xi,\eta), \quad \xi = x(\alpha t+\beta)^{\frac{n_1-k+1}{2(k-1)}}, \quad \eta = y(\alpha t+\beta)^{\frac{n_2-k+1}{2(k-1)}},$$

где функция $F = F(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$\frac{\alpha}{1-k}F+\alpha\frac{n_1-k+1}{2(k-1)}\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}+\alpha\frac{n_2-k+1}{2(k-1)}\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}=a_1\frac{\partial}{\partial\xi}\left(F^{n_1}\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)+a_2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(F^{n_2}\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)+bF^k.$$

⊙ *Литература*: М. И. Бакирова, С. Н. Димова, В. А. Дородницын, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский, С. Р. Свирщевский (1988).

14. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\mu w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\mu w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].$

Двумерное нестационарное уравнение тепло- и массопереноса при экспоненциальной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры. Частный случай уравнения 2.1.2.10 при $f(w) = \alpha e^{\mu w}$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1x+C_3, C_1y+C_4, C_2t+C_5)+\frac{1}{\mu}\ln\frac{C_2}{C_1^2},$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta+y\cos\beta, t),$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \beta$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\alpha(k_1^2+k_2^2)\int\frac{e^{\mu w}\,dw}{\lambda w+C_1} = k_1x+k_2y+\lambda t+C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = f(t)+\frac{1}{\mu}\ln\Theta(x,y), \qquad f(t) = -\frac{1}{\mu}\ln(A\alpha t+B).$$

Здесь A, B, μ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ — любое решение уравнения Пуассона

$$\Delta\Theta + A = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

4°. Уравнение имеет «двумерные» решения следующего вида:

$$\begin{aligned}
&w(x,y,t) = F(z,t), && z = k_1x+k_2y;\\
&w(x,y,t) = G(r,t), && r = \sqrt{x^2+y^2};\\
&w(x,y,t) = G(\xi_1,\xi_2), && \xi_1 = k_1x+\lambda_1t, \quad \xi_2 = k_2x+\lambda_2t;\\
&w(x,y,t) = H(\eta_1,\eta_2), && \eta_1 = x^2/t, \quad \eta_2 = y^2/t;\\
&w(x,y,t) = \frac{2}{\mu}t+U(\zeta_1,\zeta_2), && \zeta_1 = xe^{-t}, \quad \zeta_2 = ye^{-t},
\end{aligned}$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983).

15. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\mu w}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\mu w}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\beta e^{\mu w}+\gamma+\delta e^{-\mu w}.$

Замена $w = \dfrac{1}{\mu}\ln U$, где $U = U(x,y,t)$ — новая зависимая переменная, приводит к уравнению вида 2.1.1.3:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+\beta\mu U^2+\mu\gamma U+\mu\delta.$$

⊙ ***Литература***: **В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994).**

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(|\nabla w|\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(|\nabla w|\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)\Big] + \beta w^2.$

Здесь $|\nabla w|^2 = \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^2$.

1°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{C_1 - \beta t} + \frac{C_2}{(C_1-\beta t)^2}\Theta(x,y),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $\Theta(x,y)$ — любое решение стационарного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(|\nabla\Theta|\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(|\nabla\Theta|\frac{\partial\Theta}{\partial y}\Big) + \varkappa\Theta^2 = 0, \qquad \varkappa = \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{sign} C_2.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\Theta(x,y).$$

Здесь функции $f(t)$, $g(t)$ определяются формулами

$$f(t) = \frac{1}{B-\beta t}, \quad g(t) = \frac{\beta}{(B-\beta t)[A + C(B-\beta t)]},$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ — любое решение стационарного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(|\nabla\Theta|\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(|\nabla\Theta|\frac{\partial\Theta}{\partial y}\Big) \pm \varkappa\Theta^2 = \mu\Theta, \qquad \varkappa = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \mu = \frac{A}{\alpha}.$$

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), N. H. Ibragimov (1994).

2.1.2. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + f(w).$

Двумерное нестационарное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, \pm y + C_2, t + C_3),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где C_1, C_2, C_3, β — произвольные постоянные, solsalso (знаки в w_1 выбираются независимо друг от друга).

2°. Решение типа бегущей волны (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w = w(\xi), \quad \xi = Ax + By + \lambda t,$$

где функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(A^2+B^2)w''_{\xi\xi} - \lambda w'_\xi + f(w) = 0.$$

О его решениях см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

3°. Уравнение имеет «двумерные» решения следующего вида:

$$w(x,y,t) = F(z,t), \qquad z = k_1x + k_2y;$$
$$w(x,y,t) = G(r,t), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2};$$
$$w(x,y,t) = H(\xi_1,\xi_2), \quad \xi_1 = k_1x + \lambda_1 t, \quad \xi_2 = k_2x + \lambda_2 t,$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(w)\Big[\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big].$

Замена

$$U = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\Big[\int f(w)\,dw\Big],$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности для функции $U = U(x,y,t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

О решениях этого уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + f(w).$

Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi, t), \qquad \xi^2 = \frac{4}{a(2-n)^2}x^{2-n} + \frac{4}{b(2-m)^2}y^{2-m},$$

где функция $w(\xi, t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w), \qquad A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}.$$

О решениях этого уравнения при $A = 0$ для различных функций $f(w)$ см. 1.1.1.1–1.1.1.7, 1.2.1.1–1.2.1.3, 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7, 1.4.1.8, 1.6.1.1.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\mu x} \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\nu y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + f(w).$

Точное решение при $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(\xi, t), \qquad \xi^2 = \frac{4}{a\mu^2}e^{-\mu x} + \frac{4}{b\nu^2}e^{-\nu y},$$

где функция $w(\xi, t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w).$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\nu y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + f(w).$

Точное решение при $n \neq 2$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(\xi, t), \qquad \xi^2 = \frac{4}{a(2-n)^2}x^{2-n} + \frac{4}{b\nu^2}e^{-\nu y},$$

где функция $w(\xi, t)$ описывается одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{n}{2-n}\,\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w).$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \big[aw + f(t)\big]\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + bw^2 + g(t)w + h(t), \qquad a \neq 0.$

Уравнение допускает точные решения вида

$$w(x, y, t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x, y),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = b\varphi^2 + g(t)\varphi + h(t), \tag{1}$$

$$\psi'_t = \big[b\varphi - \beta f(t) + g(t)\big]\psi, \qquad \beta = b/a, \tag{2}$$

а функция $\Theta(x, y)$ — любое решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \beta\Theta = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Первое уравнение системы (1) не зависит от ψ и представляет собой уравнение Риккати для функции φ. В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $g(t)$ и $h(t)$. После решения уравнения (1), подставляя зависимость $\varphi = \varphi(t)$ в (2), получим линейное уравнение относительно $\psi = \psi(t)$, которое легко интегрируется.

В частном случае $b = 0$ решение системы (1), (2) дается формулами

$$\varphi(t) = \exp\big[G(t)\big]\Big\{A + \int h(t)\exp\big[-G(t)\big]\,dt\Big\}, \quad G(t) = \int g(t)\,dt,$$

$$\psi(t) = B\exp\big[G(t) - \beta F(t)\big], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

О решениях линейного стационарного уравнения (3) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) - a\Big[\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big] + f(t).$

1°. Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(\xi), \qquad \xi = \beta x + \gamma y.$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, имеем $\Theta(\xi) = e^{\xi}$, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = f(t), \qquad \psi'_t = a(\beta^2 + \gamma^2)\varphi\psi.$$

В результате интегрирования находим решение

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + A\exp\Big[\beta x + \gamma y + a(\beta^2+\gamma^2)\int\varphi(t)\,dt\Big], \quad \varphi(t) = \int f(t)\,dt + B,$$

где A, B, β, γ — произвольные постоянные.

2°. Уравнение допускает также точные решения следующего вида:

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)(A_1 \operatorname{ch}\mu x + A_2 \operatorname{sh}\mu x) + \chi(t)(B_1\cos\mu y + B_2\sin\mu y),$$
$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)(A_1 \cos\mu x + A_2 \sin\mu x) + \chi(t)(B_1\operatorname{ch}\mu y + B_2\operatorname{sh}\mu y),$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, μ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (здесь не приводятся).

3°. Уравнение допускает точные решения вида

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)F(x) + \chi(t)G(y) + \eta(t)H(x)P(y),$$

где

$$F(x) = A_1\cos 2\mu x + A_2\sin 2\mu x, \qquad G(y) = B_1\operatorname{ch}2\mu y + B_2\operatorname{sh}2\mu y,$$
$$H(x) = C_1\cos\mu x + C_2\sin\mu x, \qquad P(y) = D_1\operatorname{ch}\mu y + D_2\operatorname{sh}\mu y,$$

где произвольные постоянные $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, \mu$ связаны двумя соотношениями, а функции $\varphi(t), \psi(t), \chi(t), \eta(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (здесь не приводятся).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w^n\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)\Big] + f(t)w.$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big]\big[\Theta(x,y)\big]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{1}$$

где функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Theta = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

О решении этого линейного стационарного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(t)\big[\Theta(x,y)\big]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{2}$$

где функция $\varphi(t)$ определяется из уравнения Бернулли (A — произвольная постоянная)

$$\varphi'_t - f(t)\varphi + Aa\varphi^{n+1} = 0, \tag{3}$$

а функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\Delta\Theta + A(n+1)\Theta^{\frac{1}{n+1}} = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Общее решение уравнения (2) дается формулой

$$\varphi(t) = \exp\big[F(t)\big]\Big\{Aan\int\exp\big[nF(t)\big]\,dt + B\Big\}^{-1/n}, \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где B — произвольная постоянная.

3°. Преобразование

$$w(x,y,t) = F(t)U(x,y,\tau), \quad \tau = \int F^n(t)\,dt, \qquad F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]$$

приводит к более простому уравнению вида 2.1.1.12:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a\Bigl[\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(U^n\frac{\partial U}{\partial x}\Bigr) + \frac{\partial}{\partial y}\Bigl(U^n\frac{\partial U}{\partial y}\Bigr)\Bigr].$$

9. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\Bigl[\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^{\mu w}\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + \frac{\partial}{\partial y}\Bigl(e^{\mu w}\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)\Bigr] + f(t).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x,y),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi'_t + A(a/\mu)\exp(\mu\varphi) - f(t) = 0, \tag{1}$$

а функция $\Theta(x,y)$ является решением двумерного уравнения Пуассона

$$\Delta\Theta + A = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(t) = F(t) - \frac{1}{\mu}\ln\Bigl\{B + Aa\int \exp\bigl[\mu F(t)\bigr]\,dt\Bigr\}, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt. \tag{3}$$

О решениях линейного стационарного уравнения (2) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Отметим, что в уравнение (2) и в выражение (3) входят произвольные постоянные A и B.

2°. Преобразование

$$w(x,y,t) = U(x,y,\tau) + F(t), \quad \tau = \int \exp[\mu F(t)]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению вида 2.1.1.14:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a\Bigl[\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(e^{\mu U}\frac{\partial U}{\partial x}\Bigr) + \frac{\partial}{\partial y}\Bigl(e^{\mu U}\frac{\partial U}{\partial y}\Bigr)\Bigr].$$

10. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + \frac{\partial}{\partial y}\Bigl[f(w)\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr].$

Двумерное нелинейное уравнение тепло- и массопереноса в случае изотропной среды.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1y + C_3, C_1^2t + C_4),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$(k_1^2 + k_2^2)\int \frac{f(w)\,dw}{\lambda w + C_1} = k_1x + k_2y + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Уравнение имеет «двумерные» решения следующего вида:

$$w(x,y,t) = F(z,t), \qquad z = k_1x + k_2y;$$
$$w(x,y,t) = G(r,t), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2};$$
$$w(x,y,t) = H(\xi_1,\xi_2), \quad \xi_1 = k_1x + \lambda_1t, \quad \xi_2 = k_2x + \lambda_2t;$$
$$w(x,y,t) = U(\eta_1,\eta_2), \quad \eta_1 = x^2/t, \quad \eta_2 = y^2/t,$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983).

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big].$

Двумерное нелинейное уравнение тепло- и массопереноса в случае анизотропной среды.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1y + C_3, C_1^2t + C_4),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{k_1^2 f(w) + k_2^2 g(w)}{\lambda w + C_1}\,dw = k_1x + k_2y + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Уравнение имеет «двумерные» решения следующего вида:

$$\begin{aligned} &w(x,y,t) = F(z,t), && z = k_1x + k_2y;\\ &w(x,y,t) = G(\xi_1,\xi_2), && \xi_1 = k_1x + \lambda_1t, \quad \xi_2 = k_2x + \lambda_2t;\\ &w(x,y,t) = U(\eta_1,\eta_2), && \eta_1 = x^2/t, \quad \eta_2 = y^2/t, \end{aligned}$$

где k_1, k_2, λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

4°. О групповой классификации и точных решениях данного уравнения для некоторых функций $f(w)$ и $g(w)$ см. В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский (1983).

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(w)\,\mathbf{L}[w] + g(t)w + h(t).$

Здесь $\mathbf{L}$ — произвольный линейный дифференциальный оператор по пространственным переменным x, y (который не зависит от t).

Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x,y),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются формулами (A — произвольная постоянная)

$$\varphi(t) = e^{G(t)}\Big[A + \int h(t)e^{-G(t)}\,dt\Big], \qquad \psi(t) = Be^{G(t)}, \qquad G(t) = \int g(t)\,dt,$$

а функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет линейному стационарному уравнению

$$\mathbf{L}[\Theta] = 0.$$

Замечание 1. В рассматриваемом уравнении порядок линейного оператора $\mathbf{L}$ и число пространственных переменных может быть любым. Коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ могут зависеть от пространственных переменных.

Замечание 2. В уравнении вместо $f(w)$ может стоять произвольная функция вида $f(x,y,t,w)$. При этом в частном случае $f(x,y,t,w) = f_1(t) + aw$, $\mathbf{L} = \Delta + b$, где Δ — оператор Лапласа, a, b — некоторые постоянные, получим уравнение вида 2.1.2.6.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] + kw\ln w.$

Нелинейное нестационарное уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения в анизотропном случае при произвольной зависимости главных коэффициентов температуропроводности от координат.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (A — произвольная постоянная):

$$w(x,y,t) = \exp(Ae^{kt})\Theta(x,y),$$

где функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[g(x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial y}\Big] + k\Theta\ln\Theta = 0.$$

2°. В частном случае $f(x,y) = f(x)$, $g(x,y) = g(y)$ имеются точные решения с неполным разделением переменных вида

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)\psi(y,t).$$

Здесь функции $\varphi(x,t)$, $\psi(y,t)$ находятся из двух независимых одномерных нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] + k\varphi\ln\varphi + C(t)\varphi,\\ \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] + k\psi\ln\psi - C(t)\psi,\end{aligned}$$

где $C(t)$ — произвольная функция.

3°. Замена $w(x,y,t) = \exp(Ae^{kt})u(x,y,t)$, где A — произвольная постоянная, приводит к уравнению такого же вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] + ku\ln u.$$

14. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y,t)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + h(t)w\ln w.$

Точное решение с неполным разделением переменных (решение разделяется по пространственным переменным x и y, но не разделяется по времени t):

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)\psi(y,t).$$

Здесь функции $\varphi(x,t)$, $\psi(y,t)$ находятся из двух одномерных нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] + h(t)\varphi\ln\varphi + C(t)\varphi,\\ \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y,t)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] + h(t)\psi\ln\psi - C(t)\psi,\end{aligned}$$

где $C(t)$ — произвольная функция.

15. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = f_1(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_2(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + f_3(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + {}$
$\displaystyle \qquad + g_1(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g_2(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} + \bigl[h(x,y) + s(t)\bigr]w + kw\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \exp\left[Ae^{kt} + e^{kt}\int e^{-kt}s(t)\,dt\right]\Theta(x,y),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\begin{aligned}f_1(x,y)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + f_2(x,y)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} + f_3(x,y)\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + {}&\\ + g_1(x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + g_2(x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + h(x,y)\Theta + k\Theta\ln\Theta = 0.&\end{aligned}$$

16. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\bigl[g(x,t)w + h(x,t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial y}\right\}.$

Существуют точные решения линейные и квадратичные по y:

$$\begin{aligned}w(x,y,t) &= \varphi(x,t)y + \psi(x,t),\\ w(x,y,t) &= \varphi(x,t)y^2 + \psi(x,t)y + \chi(x,t).\end{aligned}$$

2.2. Уравнения с тремя и более пространственными переменными

2.2.1. Уравнения, зависящие от трех пространственных переменных

В этом разделе div, ∇ и Δ — операторы дивергенции, градиента и Лапласа, записанные в декартовых координатах x, y, z (вместо декартовых могут быть использованы цилиндрические, сферические и другие ортогональные системы координат в пространстве).

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$

Уравнение допускает сдвиг по любой из переменных x, y, z, t.

1°. Для осесимметричных решений в цилиндрической и сферической системах координат оператор Лапласа соответственно имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

2°. «Двумерное» решение:

$$w = u(\xi,\eta,t), \qquad \xi = y + \frac{x}{C}, \quad \eta = (C^2-1)x^2 - 2Cxy + C^2z^2,$$

где C — произвольная постоянная ($C \neq 0$), а функция $u = u(\xi,\eta,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(1+\frac{1}{C^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 4C^2(\xi^2+\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - 4\xi\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + 2(2C^2-1)\frac{\partial u}{\partial\eta} + f(u).$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w = u(\xi,\eta,t), \qquad \xi = \frac{x+Ay+Bz}{B}, \quad \eta = B^2\left[(Ax-y)^2 + (Bx-z)^2 + (By-Az)^2\right],$$

где A, B — произвольные постоянные ($B \neq 0$), а функция $u = u(\xi,\eta,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (A^2+B^2+1)\left(\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 4\eta B^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 4B^2\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) + f(u).$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Delta w + f(t)w\ln w + g(t)w.$

Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x_1,x_2,x_3,t) = \exp\left[\sum_{n,m=1}^{3}\varphi_{nm}(t)x_nx_m + \sum_{n=1}^{3}\psi_n(t)x_n + \chi(t)\right].$$

Замечание. При $f(t)=b$, где $b=\text{const}$, уравнение (1) имеет также точные решения в виде суммы функций различных аргументов:

$$U(x_1,x_2,x_3,t) = \varphi(t) + \Theta(x_1,x_2,x_3).$$

Здесь $\varphi(t)$ определяется формулой

$$\varphi(t) = Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt, \qquad (A \text{ — произвольная постоянная}),$$

а $\Theta(x_1,x_2,x_3)$ — любое решение стационарного уравнения

$$a\Delta\Theta + a|\nabla\Theta|^2 + b\Theta = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\Delta w + f(t)|\nabla w|^2 + g(t)w + h(t).$

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x_1,x_2,x_3,t) = \sum_{k,l=1}^{3}\varphi_{kl}(t)x_kx_l + \sum_{k=1}^{3}\psi_k(t)x_k + \chi(t).$$

Замечание. Решения такого же вида имеет более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{n,m=1}^{3}a_{nm}(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_n\partial x_m} + \sum_{n=1}^{3}b_n(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x_n}\right)^2 + \sum_{n=1}^{3}c_n(t)\frac{\partial w}{\partial x_n} + g(t)w + h(t).$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + f(w)|\nabla w|^2.$

Замена

$$U = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\Bigl[\int f(w)\,dw\Bigr],$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности для функции $U = U(x,y,z,t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U.$$

О решениях этого уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Bigl(cz^n\dfrac{\partial w}{\partial z}\Bigr) + f(w).$

1°. Точное решение при $m \neq 2$, $n \neq 2$:

$$w = w(\xi,t), \qquad \xi^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{4\,y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{4\,z^{2-n}}{c(2-n)^2},$$

где функция $w(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w), \qquad A = \frac{2(4-m-n)}{(2-m)(2-n)}.$$

О решениях этого уравнения при $A=0$ для различных функций $f(w)$ см. 1.1.1.1–1.1.1.7, 1.2.1.1–1.2.1.3, 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7, 1.4.1.8, 1.6.1.1.

2°. Точное решение при $m \neq 2$, $n \neq 2$:

$$w = w(x,\xi,t), \qquad \xi^2 = \frac{4\,y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{4\,z^{2-n}}{c(2-n)^2},$$

где функция $w(x,\xi)$ определяется двумерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w), \qquad A = \frac{4-mn}{(2-m)(2-n)}.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Bigl(cz^l\dfrac{\partial w}{\partial z}\Bigr) + f(w).$

Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $l \neq 2$:

$$w = w(\xi,t), \qquad \xi^2 = 4\Bigl[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-l}}{c(2-l)^2}\Bigr],$$

где функция $w(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w), \qquad A = 2\Bigl(\frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2-l}\Bigr) - 1.$$

О решениях этого уравнения при $A=0$ для различных функций $f(w)$ см. 1.1.1.1–1.1.1.7, 1.2.1.1–1.2.1.3, 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7, 1.4.1.8, 1.6.1.1.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Bigl(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Bigr) + f(w).$

Точное решение при $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(\xi,t), \qquad \xi^2 = 4\Bigl(\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Bigr),$$

где функция $w(\xi,t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w).$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z} \dfrac{\partial w}{\partial z}\Big) + f(w).$

Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big],$$

где функция $w(\xi, t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w), \qquad A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}.$$

О решениях этого уравнения при $A = 0$ для различных функций $f(w)$ см. 1.1.1.1–1.1.1.7, 1.2.1.1–1.2.1.3, 1.4.1.2, 1.4.1.3, 1.4.1.7, 1.4.1.8, 1.6.1.1.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z} \dfrac{\partial w}{\partial z}\Big) + f(w).$

Точное решение при $n \neq 2$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$:

$$w = w(\xi, t), \qquad \xi^2 = 4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big],$$

где функция $w(\xi, t)$ определяется одномерным нестационарным уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{n}{2-n}\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + f(w).$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha w \Delta w - \alpha |\nabla w|^2 - \beta.$

Точные решения:

$$w(x, y, z, t) = Ax + By + Cz - [\alpha(A^2 + B^2 + C^2) + \beta]t + D,$$
$$w(x, y, z, t) = A - \beta t + B\exp\big[\alpha(\varkappa^2 + \mu^2 + \nu^2)\big(At - \tfrac{1}{2}\beta t\big)\big]e^{\varkappa x + \mu y + \nu z},$$

где A, B, C, D, $\varkappa$, μ, ν — произвольные постоянные.

В 2.2.1.11 указаны также решения другого вида.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha w \Delta w + f(t)|\nabla w|^2 + g(t)w + h(t).$

Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{k,l=1}^{3} \varphi_{kl}(t)x_k x_l + \sum_{k=1}^{3} \psi_k(t)x_k + \chi(t).$$

Замечание. Решения такого же вида имеет более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{n,m=1}^{3}\big[a_{nm}(t)w + b_{nm}(t)\big]\frac{\partial^2 w}{\partial x_n \partial x_m} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{3} c_n(t)\Big(\frac{\partial w}{\partial x_n}\Big)^2 + \sum_{n=1}^{3} s_n(t)\frac{\partial w}{\partial x_n} + g(t)w + h(t).$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = [aw + f(t)]\Delta w + bw^2 + g(t)w + h(t).$

Здесь $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ — произвольные функции; a, b — произвольные параметры ($a \neq 0$). Частный случай уравнения 2.2.1.14 при $\mathrm{L}[w] \equiv \Delta w$.

Отметим, что при $f(t) \equiv \mathrm{const}$, $g(t) \equiv \mathrm{const}$, $h(t) \equiv \mathrm{const}$ это уравнение рассмотрено в работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994).

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Delta(w^m).$

Частный случай уравнения 2.2.2.5 Это уравнение при $m > 1$ описывает фильтрацию газа через однородную пористую среду (w — плотность политропного газа).

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = [aw + f(t)]\,\mathbf{L}[w] + bw^2 + g(t)w + h(t).$

Здесь $f(t), g(t), h(t)$ — произвольные функции; a, b — произвольные параметры ($a \neq 0$); $\mathbf{L}[w]$ — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (любого) порядка, зависящий только от пространственных переменных $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{L}[\mathrm{const}] \equiv 0$:

$$\mathbf{L}[w] \equiv \sum_{n,m=1}^{3} p_{nm}(\vec{x}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_n \partial x_m} + \sum_{n=1}^{3} q_n(\vec{x}) \frac{\partial w}{\partial x_n}, \qquad \vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x_1, x_2, x_3),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = b\varphi^2 + g(t)\varphi + h(t), \tag{1}$$

$$\psi'_t = \big[b\varphi - \beta f(t) + g(t)\big]\psi, \qquad \beta = b/a, \tag{2}$$

а функция $\Theta(x_1, x_2, x_3)$ — любое решение линейного стационарного уравнения

$$\mathbf{L}[\Theta] + \beta\Theta = 0. \tag{3}$$

Первое уравнение системы (1) не зависит от ψ и представляет собой уравнение Риккати для функции φ. В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $g(t)$ и $h(t)$. После решения уравнения (1), подставляя зависимость $\varphi = \varphi(t)$ в (2), получим линейное уравнение относительно $\psi = \psi(t)$, которое легко интегрируется.

В частном случае $b = 0$ решение системы (1), (2) дается следующими формулами:

$$\varphi(t) = \exp\big[G(t)\big]\Big\{A + \int h(t)\exp\big[-G(t)\big]\,dt\Big\}, \quad G(t) = \int g(t)\,dt,$$

$$\psi(t) = B\exp\big[G(t) - \beta F(t)\big], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

В частном случае $\mathbf{L} \equiv \Delta$ о решениях линейного стационарного уравнения (3) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\,\mathrm{div}\big(w^n \nabla w\big) + f(t)w.$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x, y, z, t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big]\big[\Theta(x, y, z)\big]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{1}$$

где функция $\Theta(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Theta = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x, y, z, t) = \varphi(t)\big[\Theta(x, y, z)\big]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{2}$$

где функция $\varphi(t)$ определяется из уравнения Бернулли

$$\varphi'_t - f(t)\varphi + Aa\varphi^{n+1} = 0. \tag{3}$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\Theta(x, y, z)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\Delta\Theta + A(n+1)\Theta^{\frac{1}{n+1}} = 0.$$

Общее решение уравнения (3) дается формулой

$$\varphi(t) = \exp\big[F(t)\big]\Big\{Aan\int \exp\big[nF(t)\big]\,dt + B\Big\}^{-1/n}, \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

где B — произвольная постоянная.

3°. Преобразование

$$w(x,y,z,t) = F(t)U(x,y,z,\tau), \qquad \tau = \int F^n(t)\,dt, \qquad F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]$$

приводит к более простому уравнению $\dfrac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha \operatorname{div}(U^n \nabla U)$.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha \operatorname{div}(w^n \nabla w) + f(t)w + g(t)w^{1-n}$.

Замена $U = w^n$ приводит к частному случаю уравнения 2.2.1.12:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U \Delta U + \frac{\alpha}{n}|\nabla U|^2 + nf(t)U + ng(t).$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \alpha \operatorname{div}(e^{\mu w} \nabla w) + f(t)$.

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{\mu}\int f(t)\,dt + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x,y,z),$$

где функция $\Theta = \Theta(x,y,z)$ — любое решение уравнения Лапласа $\Delta\Theta = 0$.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y,z,t) = \varphi(t) + \frac{1}{\mu}\ln\Theta(x,y,z),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi'_t + A(\alpha/\mu)\exp(\mu\varphi) - f(t) = 0. \qquad (1)$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\Theta = \Theta(x,y,z)$ является решением уравнения Пуассона

$$\Delta\Theta + A = 0. \qquad (2)$$

Общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(t) = F(t) - \frac{1}{\mu}\ln\Bigl\{B + A\alpha\int \exp[\mu F(t)]\,dt\Bigr\}, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt. \qquad (3)$$

О решении линейного стационарного уравнения (2) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Отметим, что в уравнение (2) и в выражение (3) входят произвольные постоянные A и B.

3°. Преобразование

$$w(x,y,z,t) = U(x,y,z,\tau) + F(t), \quad \tau = \int \exp[\mu F(t)]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению $\dfrac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha \operatorname{div}(e^{\mu U}\nabla U)$.

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a \operatorname{div}\bigl(e^{\mu w}\nabla w\bigr) + be^{\mu w} + g(t) + h(t)e^{-\mu w}$.

Замена $U = e^{\mu w}$ приводит к уравнению вида 2.2.1.12 для функции $U = U(x,y,z,t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = aU\Delta U + b\mu U^2 + \mu g(t)U + \mu h(t).$$

Поэтому исходное уравнение имеет решения вида

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{\mu}\ln[\varphi(t) + \psi(t)\Theta(x,y,z)].$$

Отметим, что при $g(t) \equiv \text{const}$, $h(t) \equiv \text{const}$ исходное уравнение рассмотрено в работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994).

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\,\mathrm{N}_\beta[w] + g(t)w.$

Здесь $\mathrm{N}_\beta[w]$ — произвольный однородный нелинейный дифференциальный оператор степени β относительно w (т. е. $\mathrm{N}_\beta[\alpha w] = \alpha^\beta\,\mathrm{N}_\beta[w]$, $\alpha = \mathrm{const}$), действующий только по пространственным переменным x, y, z (который не зависит от t).

Преобразование

$$w(x,y,z,t) = G(t)U(x,y,z,\tau), \quad \tau = \int f(t)G^{\beta-1}(t)\,dt, \quad G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \mathrm{N}_\beta[U], \tag{1}$$

которое имеет точное решение в произведения функций разных аргументов $U = \varphi(\tau)\Theta(x,y,z)$.

Замечание 1. В рассматриваемом уравнении порядок (относительно производных) нелинейного оператора N_β и число пространственных переменных может быть любым. Коэффициенты оператора N_β могут зависеть от пространственных переменных.

Замечание 2. Если оператор N_β не зависит явно от пространственных координат, то уравнение (1) имеет также точное решение типа бегущей волны $U = U(\xi)$, где $\xi = k_1x + k_2y + k_3z + \lambda\tau$. Ниже приведены два примера таких операторов N_β:

$$\mathrm{N}_\beta[w] = a\,\mathrm{div}(w^{\beta-1}\nabla w) + b|\nabla w|^\beta + cw^\beta,$$
$$\mathrm{N}_\beta[w] = a\,\mathrm{div}(|\nabla w|^{\beta-1}\nabla w) + bw^\mu|\nabla w|^{\beta-\mu},$$

где a, b, c, μ — некоторые постоянные.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)w = \Delta w + f(w)|\nabla w|^2.$

Частный случай уравнения 2.2.2.7 при $n = 3$.

21. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)w = a\Delta w + a|\nabla w|^2 + f(\vec{x},t).$

Частный случай уравнения 2.2.2.8 при $n = 3$.

22. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f_1(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl[f_2(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr] + \dfrac{\partial}{\partial z}\Bigl[f_3(w)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Bigr] + g(w).$

О групповой классификации и точных решениях данного уравнения см. работу В. А. Дородницына, И. В. Князевой, С. Р. Свирщевского (1983).

23. $\dfrac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{w} = a\Delta\vec{w}.$

Векторное уравнение Бюргерса, $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$, где $w_n = w_n(x_1,x_2,x_3)$. Операторы Гамильтона ∇ и Лапласа Δ могут быть записаны в произвольной ортогональной системе координат.

Точное решение:

$$\vec{w} = -\frac{2a}{\theta}\nabla\theta,$$

где θ удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\Delta\theta.$$

О решениях этого уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

⊙ *Литература:* S. Nerney, E. J. Schmahl, Z. E. Musielak (1996).

2.2.2. Уравнения, зависящие от n пространственных переменных

Обозначения: $\Delta w = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}$, $|\nabla w|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x_k}\Bigr)^2$, $(\vec{v}\cdot\nabla)w = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k \dfrac{\partial w}{\partial x_k}$.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + f(w)|\nabla w|^2.$

Замена $U = \int F(w)\,dw$, где $F(w) = \exp\Bigl[\int f(w)\,dw\Bigr]$, приводит к линейному уравнению теплопроводности для функции $U = U(x_1, \dots, x_n, t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U.$$

О решениях этого уравнения см. А. Д. Полянин (2001 b).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\Delta w + g(t) w \ln w + h(t) w.$

Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x_1, \dots, x_n, t) = \exp\Biggl[\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}(t) x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) x_i + \chi(t)\Biggr].$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f_1(t)\Delta w + f_2(t)|\nabla w|^2 + f_3(t) w + \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(t) x_i x_j + \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(t) x_i + p(t).$

Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}(t) x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) x_i + \chi(t).$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f_1(t) w \Delta w + f_2(t)|\nabla w|^2 + f_3(t) w + \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(t) x_i x_j + \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(t) x_i + p(t).$

Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}(t) x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) x_i + \chi(t).$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Delta(w^m).$

Это уравнение при $m > 1$ описывает фильтрацию газа через однородную пористую среду (w — плотность политропного газа).

1°. Точное решение при $m > 1$:

$$w = \Bigl(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k\Bigr)^{-1} \Bigl(A - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\varphi_k^2}\Bigr)^{\frac{1}{m-1}},$$

где A — произвольная постоянная ($A > 0$), а функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} = \dots = \varphi_n \frac{d\varphi_n}{dt} = \frac{2m}{m-1} \Bigl(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k\Bigr)^{1-m}. \qquad (1)$$

Система (1) допускает $(n-1)$ первых интегралов:

$$\varphi_j^2 = \varphi_n^2 + C_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1, \qquad (2)$$

где C_j — произвольные постоянные.

Функция $\varphi_n = \varphi_n(t)$ задается в неявном виде (считается, что $C_j > 0$)

$$\int_B^{\varphi_n} z^m \Bigl[\prod_{j=1}^{n-1} (z^2 + C_j)\Bigr]^{\frac{m-1}{2}} dz = \frac{2mt}{m-1},$$

где B — произвольная постоянная, а остальные $\varphi_j(t)$ определяются положительными корнями квадратных уравнений (2).

⊙ *Литература*: С. С. Титов, В. А. Устинов (1985), J. R. King (1993), В. В. Пухначев (1995).

2°. Точное решение при $0 < m < 1$:

$$w = \Bigl(\prod_{k=1}^{n}\varphi_k\Bigr)^{-1}\Bigl(A + \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{\varphi_k^2}\Bigr)^{\frac{1}{m-1}},$$

где A — произвольная постоянная, а функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1).

⊙ *Литература*: J. R. King (1993), В. В. Пухначев (1995).

3°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w = \Bigl[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t)x_ix_j + \sum_{i=1}^{n}b_i(t)x_i + c(t)\Bigr]^{\frac{1}{m-1}}.$$

⊙ *Литература*: Г. А. Рудых, Э. И. Семенов (2000); в этой работе указаны также другие точные решения.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = [aw + f(t)]\Delta w + bw^2 + g(t)w + h(t).$

Здесь $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ — произвольные функции; a, b — произвольные параметры ($a \neq 0$).

Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x_1,\dots,x_n,t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x_1,\dots,x_n),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = b\varphi^2 + g(t)\varphi + h(t), \tag{1}$$

$$\psi'_t = \bigl[b\varphi - \beta f(t) + g(t)\bigr]\psi, \qquad \beta = b/a, \tag{2}$$

а функция $\Theta(x_1,\dots,x_n)$ — любое решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \beta\Theta = 0. \tag{3}$$

Первое уравнение системы (1) не зависит от ψ и представляет собой уравнение Риккати для функции φ. В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $g(t)$ и $h(t)$. После решения уравнения (1), подставляя зависимость $\varphi = \varphi(t)$ в (2), получим линейное уравнение относительно $\psi = \psi(t)$, которое легко интегрируется.

О решениях линейного стационарного уравнения (3) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)w = \Delta w + f(w)|\nabla w|^2.$

Здесь $\vec{v}$ — заданная вектор-функция, зависящая от пространственных координат и времени (которая не зависит от w).

Замена

$$\Theta = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\Bigl[\int f(w)\,dw\Bigr],$$

приводит к линейному уравнению конвективного тепло- и массопереноса для функции $\Theta = \Theta(x_1,\dots,x_n,t)$:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\Theta = \Delta\Theta.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)w = a\Delta w + a|\nabla w|^2 + f(\vec{x},t).$

Здесь $\vec{v}$ — заданная вектор-функция, зависящая от пространственных координат и времени (которая не зависит от w).

Замена $\Theta = e^w$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\Theta = a\Delta\Theta + f(\vec{x},t)\Theta.$$

3. Уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной

3.1. Уравнения со степенными нелинейностями

3.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = bw^k$.

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = c(x+\lambda t + A)^{\frac{2}{1-k}}, \qquad c = \left[\frac{2(1+k)(\lambda^2 - a)}{b(1-k)^2}\right]^{\frac{1}{k-1}},$$

$$w(x,t) = \left[as(t+A)^2 - s(x+B)^2\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad s = \frac{b(1-k)^2}{4a},$$

где λ, A, B — произвольные постоянные.

2°. Автомодельное решение (x_0, t_0 — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (t-t_0)^{\frac{2}{1-k}} u(\xi), \qquad \xi = \frac{x-x_0}{t-t_0},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a-\xi^2)u''_{\xi\xi} + \frac{2(1+k)}{1-k}\xi u'_\xi - \frac{2(1+k)}{(1-k)^2}u + bu^k = 0.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a(x^2 - t^2)w^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.2 при $f(w) = aw^k$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(x+bt)^n w^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.4 при $f(z,w) = cz^n w^k$. При $b = \pm 1$ см. также уравнения 3.4.1.13 и 3.4.1.14 при $f(\xi) = c\xi^n$, $g(w) = w^k$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a(x^2 - t^2)(xt)^n w^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.5 при $f(z,w) = az^n w^k$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a[b^2 kw - b(k+1)w^k + w^{2k-1}].$

Решения типа бегущей волны (A, C — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \left\{\frac{1}{kb} + A\exp\left[Cx \pm t\sqrt{C^2 + ab^2k(k-1)^2}\right]\right\}^{\frac{1}{1-k}}.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\beta t} w^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.7 при $f(w) = aw^k$.

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \left\{C \exp\left[\frac{\beta(k-1)}{4(k+1)}(t \pm x)\right] + \frac{\sqrt{a}}{\beta}(1-k)e^{\beta t/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

$$w(x,t) = \left\{C \exp\left[\frac{\beta(k-1)}{4(k+1)}(t \pm x)\right] - \frac{\sqrt{a}}{\beta}(1-k)e^{\beta t/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}}.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + be^{\beta t} w^k.$

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \left\{C \exp\left[\frac{k-1}{4\beta(k+1)}\left(\pm\sqrt{[\beta^2-(k-1)^2a][\beta^2-(k+3)^2a]}\,x + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + [\beta^2 + (k-1)(k+3)a]\,t\right)\right] + (k-1)\sqrt{\frac{b}{\beta^2-(k-1)^2a}}\,e^{\beta t/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

$$w(x,t) = \left\{C \exp\left[\frac{k-1}{4\beta(k+1)}\left(\pm\sqrt{[\beta^2-(k-1)^2a][\beta^2-(k+3)^2a]}\,x + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + [\beta^2 + (k-1)(k+3)a]\,t\right)\right] - (k-1)\sqrt{\frac{b}{\beta^2-(k-1)^2a}}\,e^{\beta t/2}\right\}^{\frac{2}{1-k}}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\beta t}(a + be^{\beta t}) w^k.$

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \left\{C \exp\left[\frac{\beta(k-1)}{2(k+1)}(t \pm x)\right] + \frac{1}{\beta\sqrt{b}}\left[a + \tfrac{1}{2}(1-k)be^{\beta t}\right]\right\}^{\frac{2}{1-k}},$$

$$w(x,t) = \left\{C \exp\left[\frac{\beta(k-1)}{2(k+1)}(t \pm x)\right] - \frac{1}{\beta\sqrt{b}}\left[a + \tfrac{1}{2}(1-k)be^{\beta t}\right]\right\}^{\frac{2}{1-k}}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\beta^2}{k^2+4} w + (a^2 e^{2\beta t} + abke^{\beta t} - b^2) w^{-3}, \qquad k \neq 0.$

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C \exp\left(\beta t + \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2+4}}\right) + \frac{\sqrt{k^2+4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C \exp\left(\beta t - \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2+4}}\right) + \frac{\sqrt{k^2+4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C \exp\left(\beta t + \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2+4}}\right) - \frac{\sqrt{k^2+4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)},$$

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C \exp\left(\beta t - \frac{\beta k x}{\sqrt{k^2+4}}\right) - \frac{\sqrt{k^2+4}}{\beta}\left(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\right)}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\beta^2}{k^2-4}w + \left(a^2 e^{2\beta t} + abke^{\beta t} + b^2\right)w^{-3}, \quad |k| > 2.$

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Bigl(\beta t + \frac{\beta kx}{\sqrt{k^2-4}}\Bigr) + \frac{\sqrt{k^2-4}}{\beta}\Bigl(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\Bigr)},$$
$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Bigl(\beta t - \frac{\beta kx}{\sqrt{k^2-4}}\Bigr) + \frac{\sqrt{k^2-4}}{\beta}\Bigl(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\Bigr)},$$
$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Bigl(\beta t + \frac{\beta kx}{\sqrt{k^2-4}}\Bigr) - \frac{\sqrt{k^2-4}}{\beta}\Bigl(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\Bigr)},$$
$$w(x,t) = \pm\sqrt{C\exp\Bigl(\beta t - \frac{\beta kx}{\sqrt{k^2-4}}\Bigr) - \frac{\sqrt{k^2-4}}{\beta}\Bigl(\frac{2a}{k}e^{\beta t} + b\Bigr)}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ae^{\beta x}w^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.6 при $f(w) = -aw^k$. Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \Bigl\{C\exp\Bigl[\frac{\beta(k-1)}{4(k+1)}(x \pm t)\Bigr] + \frac{\sqrt{a}}{\beta}(1-k)e^{\beta x/2}\Bigr\}^{\frac{2}{1-k}},$$
$$w(x,t) = \Bigl\{C\exp\Bigl[\frac{\beta(k-1)}{4(k+1)}(x \pm t)\Bigr] - \frac{\sqrt{a}}{\beta}(1-k)e^{\beta x/2}\Bigr\}^{\frac{2}{1-k}}.$$

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - aw - be^{\beta x}w^k.$

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \Bigl\{C\exp\Bigl[\frac{k-1}{4\beta(k+1)}\Bigl(\pm\sqrt{[\beta^2-(k-1)^2a][\beta^2-(k+3)^2a]}\,t + {}$$
$$+ [\beta^2 + (k-1)(k+3)a]\,x\Bigr)\Bigr] + (k-1)\sqrt{\frac{b}{\beta^2-(k-1)^2a}}\,e^{\beta x/2}\Bigr\}^{\frac{2}{1-k}},$$
$$w(x,t) = \Bigl\{C\exp\Bigl[\frac{k-1}{4\beta(k+1)}\Bigl(\pm\sqrt{[\beta^2-(k-1)^2a][\beta^2-(k+3)^2a]}\,t + {}$$
$$+ [\beta^2 + (k-1)(k+3)a]\,x\Bigr)\Bigr] - (k-1)\sqrt{\frac{b}{\beta^2-(k-1)^2a}}\,e^{\beta x/2}\Bigr\}^{\frac{2}{1-k}}.$$

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - e^{\beta x}(a + be^{\beta x})w^k.$

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \Bigl\{C\exp\Bigl[\frac{\beta(k-1)}{2(k+1)}(x \pm t)\Bigr] + \frac{1}{\beta\sqrt{b}}\bigl[a + \tfrac{1}{2}(1-k)be^{\beta x}\bigr]\Bigr\}^{\frac{2}{1-k}},$$
$$w(x,t) = \Bigl\{C\exp\Bigl[\frac{\beta(k-1)}{2(k+1)}(x \pm t)\Bigr] - \frac{1}{\beta\sqrt{b}}\bigl[a + \tfrac{1}{2}(1-k)be^{\beta x}\bigr]\Bigr\}^{\frac{2}{1-k}}.$$

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{ax+bt}w^k.$

Частный случай уравнения 3.4.1.8 при $f(w) = cw^k$.

3.1.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^m, \qquad a > 0.$

Это уравнение можно записать в эквивалентном виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{n}{x}\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^m.$$

При $n = 1$ и $n = 2$ это уравнение описывает нелинейные волны с осевой и центральной симметрией.

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = k\big[a(t+C)^2 - x^2\big]^{\frac{1}{1-m}}, \quad k = \Big[\frac{b(1-m)^2}{2a(2+n-nm)}\Big]^{\frac{1}{1-m}}, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная.

3°. Решение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4x^{2-n}\big]^{-\frac{n}{2}},$$

где функция $w = w(\xi)$ определяется из уравнения Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \frac{b}{4an^2}\xi^{-\frac{2(n+1)}{n}} w^m. \tag{2}$$

В частном случае $n = -1$ решение уравнения (2) имеет вид

$$\int \Big[C_1 + \frac{1}{2a(m+1)}w^{m+1}\Big]^{-1/2} dw = \pm\xi + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *a*) приведено более 20 точных решений уравнения (1) для некоторых значений параметров n и m.

4°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w = w(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} + aBw'_y + bw^m = 0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$w(y) = \Big[\frac{b(m-1)}{aB}y + C\Big]^{\frac{1}{1-m}}.$$

При $A \neq \pm B\sqrt{a}$ замена $u(w) = \dfrac{A^2 - aB^2}{aB}w'_y$ приводит (3) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = \frac{b(A^2 - aB^2)}{a^2B^2}w^m,$$

точные решения которого для $m = -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1$ приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *a*).

5°. Существует также автомодельное решение вида $w = t^{\frac{2}{1-m}} f(\xi)$, где $\xi = xt^{\frac{2}{n-2}}$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^m\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 3.4.2.3 при $f(w) = bw^m$.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \left[\frac{bm(x+\lambda t+C)}{(m+1)(a-\lambda^2)}\right]^{-1/m}, \qquad (1)$$

где λ, C — произвольные постоянные.

Решение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений типа бегущей волны:

$$\int \frac{dw}{A + bw^{m+1}} = \frac{x+\lambda t + C}{(m+1)(\lambda^2 - a)},$$

где λ, A, C — произвольные постоянные.

2°. Существует также автомодельное решение вида $w = t^{-1/m} f(x/t)$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw + st^n.$

Частный случай уравнения 3.4.2.4 при $f(t) = st^n$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw + sx^n.$

Частный случай уравнения 3.4.2.5 при $f(x) = sx^n$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bcw^2 + kw + s.$

Частный случай уравнения 3.4.2.10 при $f(t) = c$, $g(t) = k$, $h(t) = s$.

Пусть A — корень квадратного уравнения $bcA^2 + kA + s = 0$.

1°. Если выполнено неравенство $2Abc + k - ab = \sigma^2 > 0$, то точные решения имеют вид

$$w(x,t) = A + \big[C_1\exp(\sigma t) + C_2\exp(-\sigma t)\big]\exp\big(\pm x\sqrt{-b}\big),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Если выполнено неравенство $2Abc + k - ab = -\sigma^2 < 0$, то точные решения имеют вид

$$w(x,t) = A + \big[C_1\cos(\sigma t) + C_2\sin(\sigma t)\big]\exp\big(\pm x\sqrt{-b}\big).$$

О более сложных решениях см. 3.4.2.10.

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995, рассматривался случай $a = c$), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^n\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cx^m + st^k.$

Частный случай уравнения 3.4.2.8 при $f(x) = bx^n$, $g(x) = cx^m$, $h(t) = st^k$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ct^n\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bct^n w^2 + st^m w + pt^k.$

Частный случай уравнения 3.4.2.10 при $f(t) = ct^n$, $g(t) = st^m$, $h(t) = pt^k$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + ct^k x\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Это уравнение имеет точное решение квадратичное по переменной x:

$$w = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \mathrm{ch}(t).$$

3.1.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x+\beta)^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^m, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде.

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2°. Точное решение при $n \neq 2$:

$$w(x,t) = k\bigl[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4(x+\beta)^{2-n}\bigr]^{\frac{1}{1-m}}, \qquad k = \left[\frac{b(1-m)^2}{2a(2-n)(nm-3n+4)}\right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная.

3°. Решение (1) является частным случаем более широкого класса точных решений вида

$$w = w(z), \quad z = \bigl[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4(x+\beta)^{2-n}\bigr]^{\frac{n}{2(2-n)}},$$

где функция $w = w(z)$ определяется из уравнения Эмдена — Фаулера

$$w''_{zz} = \frac{b}{an^2} z^{\frac{4(1-n)}{n}} w^m. \quad (2)$$

При $n = 1$ решение уравнения (2) имеет вид

$$\int \left[C_1 + \frac{2b}{a(m+1)} w^{m+1}\right]^{-1/2} dw = \pm z + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *а*) приведено более 20 точных решений уравнения (1) для некоторых значений параметров n и m.

4°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x+\beta| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w = w(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} - aBw'_y + bw^m = 0. \quad (3)$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$w(y) = \left[\frac{b(1-m)}{aB} y + C\right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

При $A \neq \pm B\sqrt{a}$ замена $u(w) = \dfrac{aB^2 - A^2}{aB} w'_y$ приводит (3) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = \frac{b(A^2 - aB^2)}{a^2B^2} w^m,$$

точные решения которого для $m = -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1$ указаны в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *а*).

5°. Существуют также точные решения вида $w = t^{\frac{2}{1-m}} f(\xi)$, $\xi = (x+\beta)t^{\frac{2}{n-2}}$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + bw^m, \qquad a > 0.$

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2°. Точное решение при $n \neq 2$:

$$w(x,t) = k\bigl[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4x^{2-n}\bigr]^{\frac{1}{1-m}},$$
$$k = \left[\frac{b(1-m)^2}{2a(2-n)(4-n-nm)}\right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная.

3°. Решение (1) является частным случаем более широкого класса точных решений вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \left[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4(x)^{2-n}\right]^{\frac{n}{2(n-2)}},$$

где функция $w = w(\xi)$ определяется из уравнения Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \frac{b}{an^2}\xi^{-\frac{4}{n}}w^m. \tag{2}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *a*) приведено более 20 точных решений уравнения (2) для некоторых значений параметров n и m.

4°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(z), \quad z = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{zz} + aBw'_z + bw^m = 0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$w(z) = \left[\frac{b(m-1)}{aB}z + C\right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

При $A \neq \pm B\sqrt{a}$ замена $u(w) = \dfrac{A^2 - aB^2}{aB}w'_z$ приводит (3) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = \frac{b(A^2 - aB^2)}{a^2B^2}w^m,$$

точные решения которого для $m = -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1$ указаны в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *a*).

5°. Существуют также автомодельное решение вида $w = t^{\frac{2}{1-m}}f(\xi)$, $\xi = xt^{\frac{2}{n-2}}$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.5 при $f(w) = bw^m$.

1°. Точные решения, зависящие только от одной переменной:

$$w(t) = At + B,$$

$$\frac{1}{a(m+1)}\ln|x| + A = \int\frac{dw}{a(m+1)w - bw^{m+1} + B},$$

где A, B — произвольные постоянные (второе решение задано неявно).

2°. Точное решение при $n \neq 2$:

$$w = w(z), \quad z = \left[ka(2-n)^2(t+C)^2 - 4kx^{2-n}\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w = w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2}{a(2-n)}\left[a(1-n) + bw^m\right]\frac{1}{z}w'_z = 0. \tag{1}$$

Замена $u(w) = zw'_z$ приводит (1) к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После интегрирования получим решение в неявном виде:

$$\int\frac{dw}{anw - \dfrac{2b}{m+1}w^{m+1} + C_1} = \frac{1}{a(2-n)}\ln|z| + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(\xi), \quad z = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w = w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{\xi\xi} + B\bigl(bw^m - a\bigr)w'_\xi = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dw}{bw^{m+1} - a(m+1)w + C_1} = -\frac{B\xi}{(m+1)(aB^2 - A^2)}.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}w^m \dfrac{\partial w}{\partial x} + cw^k, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.6 при $f(w) = bw^m$, $g(w) = cw^k$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw^m, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. Частный случай уравнения 3.1.3.7 при $b = 0$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + cw^m, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.1.3.7 при $b = a\lambda$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x} \dfrac{\partial w}{\partial x} + cw^m, \qquad a > 0.$

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2°. Точное решение:

$$w = w(z), \quad z = \bigl[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t + C)^2\bigr]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w = w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2(a\lambda - b)}{a\lambda}\,\frac{1}{z}w'_z + \frac{c}{ak\lambda^2}w^m = 0. \tag{1}$$

Это уравнение имеет точное решение

$$w(z) = \left\{\frac{2k\lambda\bigl[a\lambda(m-3) + 2b(1-m)\bigr]}{c(1-m)^2 z^2}\right\}^{\frac{1}{m-1}}.$$

При $b = a\lambda$ общее решение уравнения (1) задается неявно:

$$\int \left[C_1 - \frac{2c}{ak\lambda^2(m+1)}w^{m+1}\right]^{-1/2} dw = \pm z + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $b \neq \frac{1}{2}a\lambda$ замена $\xi = z^{\frac{2b - a\lambda}{a\lambda}}$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} + \frac{ac}{k(2b - a\lambda)^2}\xi^{\frac{4(a\lambda - b)}{2b - a\lambda}}w^m = 0. \tag{2}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 a) приведено более 20 общих решений уравнения (2) для некоторых значений параметра m.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.10 при $f(w) = bw^n$.

3.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Частный случай уравнения 3.1.4.7 при $m = 1$.

1°. Точные решения:

$$w = C_1xt + C_2x + C_3t + C_4,$$
$$w = \frac{3x^2 + C_1x + C_2}{a(t + C_3)^2} + C_4(x + C_5)(t + C_3)^3,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w = U(z) + \frac{2C_1}{a}x, \quad z = \frac{C_1}{2}t^2 + C_2t - x,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aU - 2C_1z - C_2^2)U''_{zz} = C_1U'_z.$$

3°. Точное решение:

$$w = (x^2 + C_1x + C_2)f(t) + (C_3x + C_4)f(t)\int\frac{dt}{f^2(t)},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, а функция $f = f(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $f''_{tt} = 2af^2$.

2. $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(w\frac{\partial w}{\partial x}\Big)$.

Частный случай уравнения 3.1.4.8 при $m = 1$.

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = \frac{1}{a}\Big(\frac{x + A}{t + B}\Big)^2,$$
$$w(x,t) = \pm\big[A(x + a\lambda t) + B\big]^{1/2} + a\lambda^2,$$
$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}aA^2t^2 + Bt + Ax + C,$$
$$w(x,t) = \tfrac{1}{12}aA^{-2}(At + B)^4 + Ct + D + x(At + B),$$

где A, B, C, D, λ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: S. Tomotika, K. Tamada (1950).

2°. Точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = f(t)x^2 + g(t)x + h(t),$$

где функции $f = f(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} = 6af^2,$$
$$g''_{tt} = 6afg,$$
$$h''_{tt} = 2afh + ag^2.$$

Частное решение этой системы (C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные):

$$f = \frac{1}{at^2}, \quad g = \frac{C_1}{t^2} + C_2t^3, \quad h = \frac{aC_1^2}{4t^2} + \frac{C_3}{t} + C_4t^2 + \frac{1}{2}aC_1C_2t^3 + \frac{1}{54}aC_2^2t^8.$$

В это решение можно добавить еще одну произвольную постоянную путем сдвига по t.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 3.1.4.8 при $m = -1$.

1°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= (at^2 + At + B)(x + C)^{-2},\\
w(x,t) &= (-aA^2t^2 + Bt + C)\operatorname{ch}^{-2}(Ax + D),\\
w(x,t) &= (aA^2t^2 + Bt + C)\operatorname{sh}^{-2}(Ax + D),\\
w(x,t) &= (aA^2t^2 + Bt + C)\cos^{-2}(Ax + D),
\end{aligned}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\lambda^2 w = ak^2 \ln|w| + C_1(kx + \lambda t) + C_2,$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{w}}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 3.1.4.8 при $m = -1/2$. Замена $w = u^2$ приводит к уравнению вида 3.1.4.2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^n w^5.$

Частный случай уравнения 3.4.4.2 при $f(x) = bx^n$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x} w^5.$

Частный случай уравнения 3.4.4.2 при $f(x) = be^{\lambda x}$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = (C_2/C_1)^{2/m} w(C_1x + C_3, C_2t + C_4),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение (A, C_1, C_2 — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = k(x + C_1)^{\frac{2}{m}}(At + C_2)^{-\frac{2}{m}}, \qquad k = \left[\frac{A^2(m+2)}{a(2-m)}\right]^{\frac{1}{m}}. \tag{1}$$

3°. Выражение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = f(x)g(t),$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$ определяются путем решения уравнений

$$g''_{tt} - a\lambda g^{m+1} = 0, \tag{2}$$
$$f''_{xx} - \lambda f^{1-m} = 0. \tag{3}$$

Общие решения уравнений (2)–(3) можно записать в неявной форме

$$\begin{aligned}
\int\left(C_1 + \frac{2a\lambda}{m+2}g^{m+2}\right)^{-1/2} dg &= C_2 \pm t,\\
\int\left(C_3 + \frac{2\lambda}{2-m}f^{2-m}\right)^{-1/2} df &= C_4 \pm x,
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ имеем

$$g(t) = (At + C)^{-2/m}, \qquad A = \pm\sqrt{\frac{a\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

4°. Существуют также решения следующего вида:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= (t+A)^{-\frac{2k+2}{m}} F(z), && z = (x+B)(t+A)^k;\\ w(x,t) &= e^{-2\lambda t} U(y), && y = (x+A)e^{\lambda m t};\\ w(x,t) &= (At+B)^{-2/m} V(\xi), && \xi = x + k\ln(At+B) + C, \end{aligned}$$

где A, B, C, k, λ — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$.

Это уравнение встречается в задачах волновой и газовой динамики. Частный случай уравнения 3.4.4.4 при $f(w) = a^2 w^m$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = (C_2/C_1)^{2/m} w(C_1 x + C_3, C_2 t + C_4),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w = (At+B)(Cx+D)^{\frac{1}{m+1}},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = f(x)g(t),$$

где зависимости функций $f = f(x)$ и $g = g(t)$ задаются неявно

$$\int \Bigl(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} f^{m+2}\Bigr)^{-1/2} f^m\, df = C_2 \pm x, \tag{1}$$

$$\int \Bigl(C_3 + \frac{2a^2\lambda}{m+2} g^{m+2}\Bigr)^{-1/2} dg = C_4 \pm t, \tag{2}$$

C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные.

Функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$, заданные формулами (1) и (2), можно записать в явном виде соответственно при $C_1 = 0$ и $C_3 = 0$. Частному случаю $C_1 = C_3 = 0$ соответствует решение

$$w(x,t) = \Bigl(\frac{\pm bx + c}{abt + s}\Bigr)^{2/m}, \tag{3}$$

где b, c, s — произвольные постоянные.

4°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x \pm \lambda t,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы (A, B — произвольные постоянные)

$$\lambda^2 w - \frac{a^2}{m+1} w^{m+1} = Az + B. \tag{4}$$

При $m = -\frac{1}{2}, 1, 2, 3$ из формулы (4) можно получить явный вид зависимости $w = w(z)$.

5°. Автомодельное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{x+A}{t+B},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (C — произвольная постоянная):

$$(\xi^2 - a^2 w^m) w'_\xi = C. \tag{5}$$

Частному случаю $C = 0$ отвечает решение $w = (\xi/a)^{2/m}$, см. формулу (3). При $C \neq 0$ принимая в (5) w за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим уравнение Риккати

$$C\xi'_w = \xi^2 - a^2 w^m. \qquad (6)$$

Общее решение уравнения (6) выражается через функции Бесселя, см. книги Э. Камке (1976) и В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

⊙ *Литература*: W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams (1981), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

6°. Существует также более сложное автомодельное решение

$$w = (t+\beta)^{2k} F(z), \quad z = \frac{x+\alpha}{(t+\beta)^{mk+1}},$$

где α, β, k — произвольные постоянные, а функция $F = F(z)$ определяется путем решения обобщенно-однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$2k(2k-1)F + (mk+1)(mk-4k+2)zF'_z + (mk+1)^2 z^2 F''_{zz} = a^2(F^m F'_z)'_z,$$

которое допускает понижение порядка.

⊙ *Литература*: W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams (1981).

7°. Точное решение (μ — произвольная постоянная):

$$w = e^{-2\mu t}\varphi(y), \quad y = xe^{\mu m t},$$

где функция $\varphi = \varphi(y)$ определяются путем решения обобщенно-однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$4\mu^2\varphi + \mu^2 m(m-4)y\varphi'_y + (\mu m)^2 y^2 \varphi''_{yy} = a^2(\varphi^m \varphi'_y)'_y,$$

которое допускает понижение порядка.

8°. Точное решение (A, b, c — произвольные постоянные):

$$w = (\pm t + A)^{-2/m}\psi(u), \quad u = x + b\ln(\pm t + A) + c,$$

где функция $\psi = \psi(u)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{2(m+2)}{m^2}\psi - \frac{b(m+4)}{m}\psi'_u + b^2\psi''_{uu} = a^2(\psi^m\psi'_u)'_u. \qquad (7)$$

Отметим два частных случая, когда полученное уравнение интегрируется в квадратурах. При $m = -2$ уравнение (7) допускает первый интеграл, который представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. При $m = -4$ уравнение (7) заменой $G(\psi) = (\psi'_u)^2$ сводится к линейному уравнению первого порядка.

В общем случае уравнение (7) заменой $H(\psi) = \psi'_u$ сводится к уравнению первого порядка.

9°. При $m \neq -1$ преобразование

$$\tau = x, \quad \zeta = t, \quad V = w^{m+1}$$

приводит исходное уравнение к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = a^{-2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(V^{-\frac{m}{m+1}}\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right).$$

При $m = -1$ преобразование

$$\tau = x, \quad \zeta = t, \quad V = \ln w$$

приводит исходное уравнение к уравнению вида 3.2.3.2:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = a^{-2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(e^V\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right).$$

3.1.5. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n w^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

1°. Точное решение (A, C — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = kx^{\frac{2-n}{m}}(At+C)^{-\frac{2}{m}}, \qquad k = \left[\frac{2A^2(m+2)}{a(2-n)(2-n-m)}\right]^{\frac{1}{m}}. \tag{1}$$

Выражение (1) *является частным случаем более широкого семейства точных решений в виде произведения функций разных аргументов:*

$$w = f(x)g(t),$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$ определяются путем решения уравнений

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \tag{2}$$

$$f''_{xx} - (\lambda/a)x^{-n} f^{1-m} = 0. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) записывается в неявной форме

$$\int \left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} g^{m+2}\right)^{-1/2} dg = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ имеем

$$g(t) = (At+C)^{-2/m}, \qquad A = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 a) приведено более 20 точных решений уравнения Эмдена — Фаулера (3) для некоторых значений параметра m.

2°. Существует также автомодельное решение вида

$$w = t^{\frac{(n-2)k-2}{m}} F(y), \quad y = xt^k,$$

где k — произвольная постоянная.

3°. Преобразование

$$u(z,t) = \frac{1}{x} w(x,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = az^{4-n-m} u^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{4}$$

В частном случае $n = 4 - m$ уравнение (4) сильно упрощается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = au^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и допускает, например, решение типа бегущей волны $u = u(kz + \mu t)$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x} w^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.5.1 при $f(x) = ae^{\lambda x}$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.5.2 при $f(x) = ax^n$.

1°. Точное решение (A, C — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = kx^{\frac{2-n}{m}}(At+C)^{-\frac{2}{m}}, \qquad k = \left[\frac{2A^2(m+2)}{a(2-n)(m-n+2)}\right]^{\frac{1}{m}}. \tag{1}$$

Выражение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = f(x)g(t),$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$ определяются путем решения уравнений

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \tag{2}$$

$$a[x^n f^{m+1} f'_x]'_x - \lambda f = 0. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) записывается в неявной форме

$$\int \left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} f^{m+2}\right)^{-1/2} df = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $f(t)$ имеем

$$f(t) = (At+C)^{-2/m}, \qquad A = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

При $n \neq 1$, $m \neq -1$ преобразование

$$z = x^{1-n}, \quad \varphi = u^{m+1}$$

приводит (3) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$\varphi''_{zz} = \frac{\lambda(m+1)}{a(1-n)^2} z^{\frac{n}{1-n}} \varphi^{\frac{1}{m+1}}. \tag{4}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *a*) указано более 20 точных решений уравнения (4) для некоторых значений параметра m.

2°. Существует также автомодельное решение вида

$$w = (t+b)^{\frac{(n-2)k-2}{m}} F(y), \quad y = xt^k,$$

где b, k — произвольные постоянные.

3°. Пусть $m \neq -1$, $2m - 2n - nm + 3 \neq 0$. Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1-n}{m+1}} u(\xi,t), \quad \xi = x^{\frac{2m-2n-nm+3}{m+1}}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^{\frac{3m-3n-2nm+4}{2m-2n-nm+3}} u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \tag{5}$$

где $A = a\left(\dfrac{2m-2n-nm+3}{m+1}\right)^2$.

В частном случае $n = \dfrac{3m+4}{2m+3}$ уравнение (5) сильно упрощается и совпадает (с точностью до переобозначений) с уравнением 3.1.4.8:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

4. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k(ax^2+bx+c)^m w^{4-2m} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.}$

Частный случай уравнения 3.4.5.4 при $f(u) = ku^{-2m}$.

1°. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

приводит к уравнению вида 3.4.4.5:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ku^{4-2m}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k(ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^{5-2m},$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u = u(z+\lambda t)$ и решение в виде произведения функций разных аргументов $u = f(t)g(z)$.

2°. Исходное уравнение преобразованием

$$w(x,t) = \left[v(\xi,t)\right]^{\frac{1}{2m+3}}, \qquad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m} \tag{1}$$

приводится к дивергентному виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[F(\xi)v^{\frac{4-2m}{2m-3}}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right], \tag{2}$$

где функция $F(\xi)$ задается параметрически следующими формулами:

$$F(\xi) = \frac{k}{(ax^2+bx+c)^m}, \qquad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}. \tag{3}$$

Отметим некоторые частные случаи уравнения (2), когда функцию $F = F(\xi)$ в (3) можно записать в явном виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\cos^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=1,\ a=1,\ b=0,\ c=1;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=1,\ a=-1,\ b=0,\ c=1;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi^{-3/2}}{\cos\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=\tfrac{1}{2},\ a=-1,\ b=0,\ c=1.$$

3.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями

3.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda w}$.

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = be^{\lambda w}$.

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(B^2-a^2A^2)}{b\lambda(Ax+Bt+C)^2}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(B^2-a^2A^2)}{b\lambda\cos^2(Ax+Bt+C)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(a^2A^2-B^2)}{b\lambda\operatorname{ch}^2(Ax+Bt+C)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(B^2-a^2A^2)}{b\lambda\operatorname{sh}^2(Ax+Bt+C)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8a^2C}{b\lambda}\right) - \frac{2}{\lambda}\ln\left|(x+A)^2 - a^2(t+B)^2 + C\right|,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Преобразование независимых переменных

$$z = x - at, \quad y = x + at$$

приводит к уравнению Лиувилля 3.5.1.2:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = -\tfrac{1}{4}a^{-2}b\exp(\lambda w).$$

Поэтому общее решение исходного уравнения описывается формулами

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\bigl[f(z) + g(y)\bigr] - \frac{2}{\lambda}\ln\biggl|k\int \exp\bigl[f(z)\bigr]\,dz - \frac{b\lambda}{8a^2k}\int \exp\bigl[g(y)\bigr]\,dy\biggr|,$$
$$z = x - at, \qquad y = x + at,$$

где $f = f(z)$, $g = g(y)$ — произвольные функции, k — произвольная постоянная.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\lambda w} - be^{-\lambda w}.$

Замена

$$w(x,y) = u(x,y) + k, \quad k = \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{b}{a}$$

приводит к уравнению вида 3.3.1.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sqrt{ab}\,\mathrm{sh}(\lambda u).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{2\lambda w} - ae^{-\lambda w}.$

1°. Точное решение с функциональным разделением переменных указано в разд. А.3 (пример 12).

2°. Преобразование

$$t = \frac{1}{\sqrt{a\lambda}}(\xi + \eta), \quad x = \frac{1}{\sqrt{a\lambda}}(\xi - \eta), \quad w = -\frac{1}{\lambda}U$$

приводит к уравнению вида 3.5.1.3:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = e^U - e^{-2U}.$$

3°. Данное уравнение интегрируется методом обратной задачи рассеяния.

⊙ *Литература*: А. В. Михайлов (1979), A. P. Fordy, J. A. Gibbons (1980), Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985).

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\beta t}e^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 3.4.1.7 при $f(w) = ae^{\lambda w}$. Поэтому исходное уравнение может быть преобразовано к уравнению 3.2.1.1.

Точные решения (C_1, C_2, σ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = -\frac{\beta}{\lambda}t - \frac{2}{\lambda}\ln\Bigl(C_1 + C_2x \pm \sqrt{C_2^2 + \tfrac{1}{2}\lambda a}\,t\Bigr),$$
$$w(x,t) = -\frac{\beta}{\lambda}t - \frac{2}{\lambda}\ln\Bigl(C_1e^{-\sigma t} + C_2e^{\sigma x} - \frac{\lambda a}{8\sigma^2C_1}e^{\sigma t}\Bigr).$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\beta x}e^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 3.4.1.6 при $f(w) = ae^{\lambda w}$. Поэтому исходное уравнение может быть преобразовано к уравнению 3.2.1.1.

Точные решения (C_1, C_2, σ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = -\frac{\beta}{\lambda}x - \frac{2}{\lambda}\ln\Bigl(C_1 + C_2t \pm \sqrt{C_2^2 - \tfrac{1}{2}\lambda a}\,x\Bigr),$$
$$w(x,t) = -\frac{\beta}{\lambda}x - \frac{2}{\lambda}\ln\Bigl(C_1e^{-\sigma x} + C_2e^{\sigma t} + \frac{\lambda a}{8\sigma^2C_1}e^{\sigma x}\Bigr).$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{ax+bt}e^{\lambda w}$.

Частный случай уравнения 3.4.1.8 при $f(w) = ce^{\lambda w}$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{\lambda w} + (\alpha t + \gamma)e^{2\lambda w}$.

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Bigl\{C\exp\Bigl[-\frac{\beta^2\lambda}{2\alpha}(t \pm x)\Bigr] - \frac{1}{\beta}(\alpha t + \gamma) + \frac{\alpha^2}{\beta^3\lambda}\Bigr\}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{\lambda w} + (\alpha x + \gamma)e^{2\lambda w}$.

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Bigl\{C\exp\Bigl[\frac{\beta^2\lambda}{2\alpha}(x \pm t)\Bigr] - \frac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma) - \frac{\alpha^2}{\beta^3\lambda}\Bigr\}.$$

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{\lambda w} + (\alpha e^{kt} + \gamma)e^{2\lambda w}$.

1°. Точные решения при $k^2\gamma - \beta^2\lambda \neq 0$ (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Bigl[C\exp\Bigl(\pm\frac{k^2\gamma - \beta^2\lambda}{2k\gamma}x + \frac{k^2\gamma + \beta^2\lambda}{2k\gamma}t\Bigr) + \frac{\alpha\beta\lambda}{k^2\gamma - \beta^2\lambda}e^{kt} - \frac{\gamma}{\beta}\Bigr].$$

2°. Точные решения при $k^2\gamma - \beta^2\lambda = 0$ (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Bigl[Ce^{kt} + \frac{\alpha k}{2\beta}(t \pm x)e^{kt} - \frac{\lambda\beta}{k^2}\Bigr].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k\beta e^{\lambda w} + (\alpha e^{kt} + \lambda\beta^2)e^{2\lambda w}$.

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Bigl[Ce^{kt} + \frac{\alpha}{2\beta}(t \pm x)e^{kt} - \frac{\lambda\beta}{k}\Bigr].$$

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{\lambda w} + (\alpha e^{kx} + \gamma)e^{2\lambda w}$.

1°. Точные решения при $k^2\gamma + \beta^2\lambda \neq 0$ (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Bigl[C\exp\Bigl(\pm\frac{k^2\gamma + \beta^2\lambda}{2k\gamma}t + \frac{k^2\gamma - \beta^2\lambda}{2k\gamma}x\Bigr) - \frac{\alpha\beta\lambda}{k^2\gamma + \beta^2\lambda}e^{kx} - \frac{\gamma}{\beta}\Bigr].$$

2°. Точные решения при $k^2\gamma + \beta^2\lambda = 0$ (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Bigl[Ce^{kx} + \frac{\alpha k}{2\beta}(x \pm t)e^{kx} + \frac{\lambda\beta}{k^2}\Bigr].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k\beta e^{\lambda w} - (\alpha e^{kx} + \lambda\beta^2)e^{2\lambda w}$.

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Bigl[Ce^{kx} + \frac{\alpha}{2\beta}(x \pm t)e^{kx} - \frac{\lambda\beta}{k}\Bigr].$$

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{kt}e^{\lambda w} + (\alpha e^{2kt} + \gamma)e^{2\lambda w}$.

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Bigl[C\exp\Bigl(\pm\frac{4k^2\alpha - \beta^2\lambda}{4k\alpha}x - \frac{\beta^2\lambda}{4k\alpha}t\Bigr) + \frac{\beta\gamma\lambda}{4k^2\alpha - \beta^2\lambda}e^{-kt} - \frac{\alpha}{\beta}e^{kt}\Bigr].$$

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta e^{kx} e^{\lambda w} + (\alpha e^{2kx} + \gamma) e^{2\lambda w}.$

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left[C\exp\left(\pm\frac{4k^2\alpha+\beta^2\lambda}{4k\alpha}t + \frac{\beta^2\lambda}{4k\alpha}x\right) - \frac{\beta\gamma\lambda}{4k^2\alpha+\beta^2\lambda}e^{-kx} - \frac{\alpha}{\beta}e^{kx}\right].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

3.2.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 3.4.2.3 при $f(w) = be^{\lambda w}$.

Решение типа бегущей волны:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{\exp(Ax + A\mu t + B) - b}{A(a-\mu^2)}\right],$$

где μ, A, B — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.2.2.5 при $b = an$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^k}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^k\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

При $k=1$ и $k=2$ уравнение описывает нелинейные волны с осевой и центральной симметрией. Частный случай уравнения 3.2.2.5 при $n = 0$, $b = ak$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x+\beta)^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. Замена $z = x + \beta$ приводит к частному случаю уравнения 3.2.2.5 при $b = 0$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = az^n\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + ce^{\lambda w}.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2°. Точное решение при $n \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{4}a(2-n)^2(t+C)^2 - x^{2-n}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi} + Aw'_{\xi} = Be^{\lambda w}, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{a(4-3n)+2b}{2a(2-n)}, \qquad B = \frac{c}{a(2-n)^2}.$$

При $A \neq 1$ точное решение уравнения (1) дается формулой

$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big(\frac{1-A}{\lambda B\xi}\Big).$$

При $A = 1$, что соответствует $b = \frac{1}{2}an$, точные решения уравнения (1) имеют вид

$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2a(2-n)^2}{c\lambda\xi(\ln|\xi|+q)^2}\right],$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2ap^2(2-n)^2}{c\lambda\xi\cos^2(p\ln|\xi|+q)}\right],$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-2ap^2(2-n)^2}{c\lambda\xi\,\mathrm{ch}^2(p\ln|\xi|+q)}\right],$$

где p, q — произвольные постоянные.

При $A \neq 1$ замена $\xi = kz^{\frac{1}{1-A}}$ $(k = \pm 1)$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена—Фаулера

$$w''_{zz} = \frac{kB}{(1-A)^2} z^{\frac{2A-1}{1-A}} e^{\lambda w}. \qquad (2)$$

В частном случае $A = \frac{1}{2}$, что соответствует $b = a(n-1)$, решения уравнения (2) имеют вид

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{-a(2-n)^2}{2kc\lambda(z+q)^2}\Big],$$
$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{ap^2(2-n)^2}{2kc\lambda\,\mathrm{ch}^2(pz+q)}\Big],$$
$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{-ap^2(2-n)^2}{2kc\lambda\cos^2(pz+q)}\Big],$$

где p, q — произвольные постоянные.

3°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w = w(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} + (b-a)Bw'_y + ce^{\lambda w} = 0. \qquad (3)$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$w(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{c\lambda}{B(b-a)}y + C_1\Big].$$

Решения уравнения (3) при $b = a$:

$$w(y) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{2(A^2 - aB^2)}{c\lambda(y+q)^2}\Big],$$
$$w(y) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{2p^2(aB^2 - A^2)}{c\lambda\,\mathrm{ch}^2(py+q)}\Big],$$
$$w(y) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{2p^2(A^2 - aB^2)}{c\lambda\cos^2(py+q)}\Big],$$

где p, q — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.6 при $f(w) = be^{\lambda w}$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + ce^{\mu w}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.2.2.9 при $b = a\lambda$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{\mu w}, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. Частный случай уравнения 3.2.2.9 при $b = 0$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\mu w}, \qquad a > 0.$

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2°. Точное решение (C — произвольная постоянная):

$$w = w(z), \quad z = \big[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t+C)^2\big]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где функция $w = w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2(a\lambda - b)}{a\lambda}\frac{1}{z}w'_z + \frac{c}{ak\lambda^2}e^{\mu w} = 0. \qquad (1)$$

Точное решение уравнения (1) имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{2k\lambda(a\lambda - 2b)}{c\mu z^2}\right].$$

Укажем некоторые другие точные решения уравнения (1):

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{-2ak\lambda^2}{c\mu(z+B)^2}\right] \quad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{2aA^2k\lambda^2}{c\mu\,\mathrm{ch}^2(Az+B)}\right] \quad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{-2aA^2k\lambda^2}{c\mu\,\mathrm{sh}^2(Az+B)}\right] \quad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{-2aA^2k\lambda^2}{c\mu\cos^2(Az+B)}\right] \quad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{8ABak\lambda^2}{c\mu(Az^2+B)^2}\right] \quad \text{при } b = \tfrac{1}{2}a\lambda,$$

где A, B — произвольные постоянные.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x + \mu w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.10 при $f(w) = be^{\mu w}$.

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x + \mu w}\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\beta w}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.11 при $f(w) = be^{\mu w}$, $g(w) = ce^{\beta w}$.

3.2.3. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

1°. Точные решения:

$$w(x,t) = Axt + Bx + Ct + D,$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{B^2}{a}\frac{(x+A)^2}{\mathrm{ch}^2(Bt+C)}\right], \qquad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{1}{aA^2}\frac{\mathrm{ch}^2(Ax+B)}{(t+C)^2}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\mathrm{sh}^2(Ax+B)}{\mathrm{ch}^2(Ct+D)}\right], \qquad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\mathrm{ch}^2(Ax+B)}{\mathrm{sh}^2(Ct+D)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\cos^2(Ax+B)}{\mathrm{ch}^2(Ct+D)}\right], \qquad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\mathrm{ch}^2(Ax+B)}{\cos^2(Ct+D)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{4BC\beta^2(x+A)^2}{a(Be^{\beta t}+Ce^{-\beta t})^2}\right], \qquad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{(Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x})^2}{4aAB\beta^2(t+C)^2}\right],$$

где A, B, C, D, β — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 458).

2°. Автомодельное решение:

$$w = w(z), \quad z = \frac{x+A}{t+B},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(ae^{\lambda w} - z^2)w''_{zz} - zw'_z = 0,$$

которое допускает понижение порядка с помощью замены $U(z) = w'_z$.

3°. Точное решение:

$$w = \frac{2(k-1)}{\lambda}\ln(t+C_1) + f(\zeta), \qquad \zeta = \frac{x+C_2}{(t+C_1)^k},$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функция $f = f(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k^2\zeta^2 f''_{\zeta\zeta} + k(k+1)\zeta f'_\zeta - \frac{2(k-1)}{\lambda} = ae^{\lambda f} f''_{\zeta\zeta}.$$

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial x}\Big), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.4.4 при $f(w) = ae^{\lambda w}$.

1°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{2}{\lambda}\ln|Ax+B| - \frac{2}{\lambda}\ln|\pm A\sqrt{a}\,t + C|, \tag{1}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(aA^2x^2 + Bx + C) - \frac{2}{\lambda}\ln(aAt + D), \tag{2}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{p^2}{aA\cos^2(pt+q)}\Big], \tag{3}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{p^2}{aA\,\mathrm{sh}^2(pt+q)}\Big], \tag{4}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{-p^2}{aA\,\mathrm{ch}^2(pt+q)}\Big], \tag{5}$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные. Формулы (1)—(5) исчерпывают все решения, которые являются суммой функций разных переменных.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 458).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x \pm \mu t,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы (A, B — произвольные постоянные)

$$\lambda\mu^2 w - ae^{\lambda w} = Az + B.$$

3°. Автомодельное решение:

$$w = u(\xi), \quad \xi = \frac{x+A}{t+B}.$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\xi^2 u'_\xi)'_\xi = (ae^{\lambda u}u'_\xi)'_\xi,$$

которое допускает первый интеграл

$$\big(\xi^2 - ae^{\lambda u}\big)u'_\xi = C. \tag{6}$$

Частному случаю $C = 0$ отвечает решение вида (1). При $C \neq 0$ принимая в (6) u за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(u)$ получим уравнение Риккати

$$C\xi'_u = \xi^2 - ae^{\lambda u},$$

которое рассмотрено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

⊙ *Литература*: W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams (1981).

4°. Точное решение:

$$w = \frac{2(k-1)}{\lambda}\ln(t+C_1) + f(\zeta), \qquad \zeta = \frac{x+C_2}{(t+C_1)^k},$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функция $f = f(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k^2\zeta^2 f''_{\zeta\zeta} + k(k+1)\zeta f'_\zeta - \frac{2(k-1)}{\lambda} = a(e^{\lambda f} f'_\zeta)'_\zeta.$$

⊙ *Литература*: W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams (1981).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a e^{\lambda x+\mu t+\beta w} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a>0.$

Замена $\beta u = \lambda x + \mu t + \beta w$ приводит к уравнению вида 3.2.3.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a e^{\beta u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры

3.3.1. Уравнения с гиперболическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\,\mathrm{sh}(\lambda w).$

Уравнение sh-*Гордон*. Встречается в некоторых областях физики. Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = b\,\mathrm{sh}(\lambda w)$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \pm\frac{2}{\lambda}\ln\left[\mathrm{tg}\,\frac{b\lambda(kx+\mu t+\theta_0)}{2\sqrt{b\lambda(\mu^2-ak^2)}}\right],$$
$$w(x,t) = \pm\frac{4}{\lambda}\,\mathrm{Arth}\left[\exp\frac{b\lambda(kx+\mu t+\theta_0)}{\sqrt{b\lambda(\mu^2-ak^2)}}\right],$$

где k, μ, θ_0 — произвольные постоянные. В обеих формулах считается, что $b\lambda(\mu^2 - ak^2) > 0$.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \frac{4}{\lambda}\,\mathrm{Arth}\big[f(t)g(x)\big], \qquad \mathrm{Arth}\,z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},$$

где функции $f = f(t)$ и $g = g(x)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$(f_t')^2 = Af^4 + Bf^2 + C,$$
$$a(g_x')^2 = Cg^4 + (B - b\lambda)g^2 + A,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. О других точных решениях этого уравнения см. уравнение 3.4.1.1 при $f(w) = b\,\mathrm{sh}(\lambda w)$, п. 2°.

⊙ *Литература*: В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b e^{\beta t}\,\mathrm{sh}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.1.7 при $f(w) = b\,\mathrm{sh}^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.1.1.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b e^{\beta x}\,\mathrm{sh}^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.1.6 при $f(w) = b\,\mathrm{sh}^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.1.1.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + k\,\mathrm{sh}(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.2.1 при $f(w) = k\,\mathrm{sh}(\lambda w)$, $n = b/a$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a\,\mathrm{ch}(\lambda w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \qquad a>0.$

Частный случай уравнения 3.4.4.16 при $f(w) = a\,\mathrm{ch}(\lambda w)$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a\,\mathrm{sh}(\lambda w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \qquad a>0.$

Частный случай уравнения 3.4.4.16 при $f(w) = a\,\mathrm{sh}(\lambda w)$.

3.3.2. Уравнения с логарифмическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\ln w + kw.$

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = bw\ln w + kw$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:
$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$
где функции $\varphi(t)$, $\psi(x)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями
$$\varphi''_{tt} - b\varphi\ln\varphi - k\varphi = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + b\psi\ln\psi = 0,$$
общие решения которых можно представить в неявном виде.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\ln w + (cx^k + st^n)w.$

Частный случай уравнения 3.4.1.10 при $f(x) = cx^k$, $g(t) = st^n$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^k\ln w.$

Частный случай уравнения 3.4.1.1 при $f(w) = bw^k\ln w$. Для $k = 1$ см. также уравнение 3.4.1.9 при $f(t) = 0$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a(x^2 - t^2)\ln^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.1.2 при $f(w) = a\ln^k(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta t}w\ln w.$

Преобразование
$$\xi(x,t) = \tfrac{1}{2}\beta\exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta t\bigr)\operatorname{sh}\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr), \quad \tau(x,t) = \tfrac{1}{2}\beta\exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta t\bigr)\operatorname{ch}\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)$$
приводит к более простому уравнению вида 3.3.2.1:
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + bw\ln w.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta x}w\ln w.$

Преобразование
$$\xi(x,t) = \tfrac{1}{2}\exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\operatorname{ch}\bigl(\tfrac{1}{2}\beta t\bigr), \quad \tau(x,t) = \tfrac{1}{2}\exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\operatorname{sh}\bigl(\tfrac{1}{2}\beta t\bigr)$$
приводит к более простому уравнению вида 3.3.2.1:
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + bw\ln w.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + cw^k\ln w.$

Частный случай уравнения 3.4.2.1 при $f(w) = cw^k\ln w$, $b = an$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\ln^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.3.2 при $\beta = 0$, $f(w) = b\ln^k(\lambda w)$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}\ln^k(\lambda w)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 3.4.3.5 при $f(w) = b\ln^k(\lambda w)$.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\ln^k(\lambda w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Частный случай уравнения 3.4.4.4 при $f(w) = a\ln^k(\lambda w)$.

3.3.3. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\sin(\lambda w).$

Уравнение синус-Гордона. Встречается в дифференциальной геометрии и различных областях физики (сверхпроводимость, дислокация в кристаллах, волны в ферромагнитных материалах, лазерные импульсы в двухфазной среде и др.).

1°. Пусть $w = \varphi(x,t)$ — решение уравнения синус-Гордона. Тогда функции

$$w_1 = \frac{2\pi n}{\lambda} \pm \varphi(C_1 \pm x, C_2 \pm t), \qquad n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$$

$$w_2 = \pm\varphi\Big(x\operatorname{ch}\sigma + t\sqrt{a}\operatorname{sh}\sigma,\ x\frac{\operatorname{sh}\sigma}{\sqrt{a}} + t\operatorname{ch}\sigma\Big),$$

где C_1, C_2, σ — произвольные постоянные, также являются точными решениями этого уравнения. В первой формуле знаки функции и аргументов выбираются независимо в любой комбинации.

2°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left\{\exp\left[\pm\frac{b\lambda(kx+\mu t+\theta_0)}{\sqrt{b\lambda(\mu^2-ak^2)}}\right]\right\} \quad \text{при} \quad b\lambda(\mu^2-ak^2) > 0,$$

$$w(x,t) = -\frac{\pi}{\lambda} + \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left\{\exp\left[\pm\frac{b\lambda(kx+\mu t+\theta_0)}{\sqrt{b\lambda(ak^2-\mu^2)}}\right]\right\} \quad \text{при} \quad b\lambda(\mu^2-ak^2) < 0,$$

где k, μ, θ_0 — произвольные постоянные. Первое решение отвечает односолитонному решению.

3°. Решения, указанные выше в п. 2°, являются частными случаями более общего решения вида

$$w(x,t) = 4\operatorname{arctg}\big[f(x)g(t)\big], \tag{1}$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned}(f'_x)^2 &= Af^4 + Bf^2 + C,\\ (g'_t)^2 &= -aCg^4 + (aB+b\lambda)g^2 - aA,\end{aligned} \tag{2}$$

где A, B, C — произвольные постоянные. Отметим некоторые точные решения, являющиеся следствием (1) — (2).

3.1. При $A = 0$, $B = k^2 > 0$, $C > 0$ имеем

$$w(x,t) = \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left[\frac{\mu\operatorname{sh}(kx+A_1)}{k\sqrt{a}\operatorname{ch}(\mu t+B_1)}\right], \quad \mu^2 = ak^2 + b\lambda > 0, \tag{3}$$

где k, A_1, B_1 — произвольные постоянные. Формула (3) отвечает двухсолитонному решению Перринга — Скирма.

3.2. При $A = 0$, $B = -k^2 < 0$, $C > 0$ имеем

$$w(x,t) = \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left[\frac{\mu\sin(kx+A_1)}{k\sqrt{a}\operatorname{ch}(\mu t+B_1)}\right], \quad \mu^2 = b\lambda - ak^2 > 0, \tag{4}$$

где k, A_1, B_1 — произвольные постоянные.

3.3. При $A = k^2 > 0$, $B = k^2\gamma^2 > 0$, $C = 0$ имеем

$$w(x,t) = \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left[\frac{\gamma}{\mu}\,\frac{e^{\mu(t+A_1)} + ak^2e^{-\mu(t+A_1)}}{e^{k\gamma(x+B_1)} + e^{-k\gamma(x+B_1)}}\right], \quad \mu^2 = ak^2\gamma^2 + b\lambda > 0, \tag{5}$$

где k, A_1, B_1, γ — произвольные постоянные.

4°. N-солитонное решение описывается формулами ($a = 1$, $b = -1$, $\lambda = 1$):

$$w(x,t) = \arccos\left[1 - 2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)(\ln F)\right],$$

$$F = \det\|M_{ij}\|, \quad M_{ij} = \frac{2}{a_i + a_j}\operatorname{ch}\Big(\frac{z_i + z_j}{2}\Big),$$

$$z_i = \pm\frac{x - \mu_i t + C_i}{\sqrt{1-\mu_i^2}}, \quad a_i = \pm\sqrt{\frac{1-\mu_i}{1+\mu_i}},$$

где μ_i, C_i — произвольные постоянные.

5°. О других точных решениях этого уравнения см. уравнение 3.4.1.1 при $f(w) = b\sin(\lambda w)$, п. 3°.

6°. Уравнение синус-Гордона интегрируется методом обратной задачи рассеяния, см. книгу В. Е. Захарова, С. В. Манакова, С. П. Новикова, Л. П. Питаевского (1980, стр. 98–111). Е. Д. Белоколос (1995) получил общую формулу для решения уравнения синус-Гордона с произвольными начальными и граничными условиями.

7°. Преобразование

$$z = x - at, \quad y = x + at$$

приводит к уравнению вида 3.5.1.5: $\partial_{zy} w = -\frac{1}{4} a^{-2} \sin w$.

⊙ *Литература*: M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur (1973), В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев (1974), Дж. Уизем (1977), И. М. Кричевер (1980), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), M. J. Ablowitz, H. Segur (1981), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), J. Weiss (1984), M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson (1991).

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\sin(\lambda w) + c\sin\left(\tfrac{1}{2}\lambda w\right).$

Двойное уравнение синус-Гордона. Оно встречается в нелинейной оптике (распространение ультракоротких импульсов в резонансной пятикратно вырожденной среде) и физике низких температур (распространение спиновых волн в анизотропных спиновых жидкостях).

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{4b^2 - c^2}}{2b - c}\operatorname{th}\frac{\lambda\sqrt{4b^2 - c^2}(kx + \mu t + \theta_0)}{4\sqrt{b\lambda(ak^2 - \mu^2)}}\right] \quad \text{при} \quad c^2 < 4b^2,$$

$$w(x,t) = \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{c^2 - 4b^2}}{c - 2b}\operatorname{tg}\frac{\lambda\sqrt{c^2 - 4b^2}(kx + \mu t + \theta_0)}{4\sqrt{b\lambda(ak^2 - \mu^2)}}\right] \quad \text{при} \quad c^2 > 4b^2,$$

Здесь k, μ, θ_0 — произвольные постоянные. В обеих формулах считается, что $b\lambda(ak^2 - \mu^2) > 0$.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = A + \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left(B_1 e^\theta + C_1\right) + \frac{4}{\lambda}\operatorname{arctg}\left(B_2 e^\theta + C_2\right), \quad \theta = \mu t \pm kx + \theta_0,$$

где параметры A, B_1, B_2, C_1, C_2, μ, k алгебраическими соотношениями связаны с параметрами исходного уравнения a, b, c, λ; θ_0 — произвольная постоянная.

Выделим интересные частные случаи, встречающиеся в приложениях.

2.1. При $a = 1$, $b = -1$, $c = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 1$:

$$w(x,t) = 4\operatorname{arctg}\left(e^{\theta-\Delta}\right) + 4\operatorname{arctg}\left(e^{\theta+\Delta}\right); \qquad \Delta = \ln\left(\sqrt{5} + 2\right), \quad k = \mu + \tfrac{5}{4}\mu^{-1}.$$

2.2. При $a = 1$, $b = -1$, $c = -\frac{1}{2}$, $\lambda = 1$:

$$w(x,t) = 2\pi + 4\operatorname{arctg}\left(e^{\theta-\Delta}\right) - 4\operatorname{arctg}\left(e^{\theta+\Delta}\right); \qquad \Delta = \ln\left(\sqrt{3} + 2\right), \quad k = \mu + \tfrac{3}{4}\mu^{-1}.$$

2.3. При $a = 1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$:

$$w(x,t) = \delta - 2\pi + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\sqrt{15}}e^\theta + \frac{1}{\sqrt{15}}\right); \qquad \delta \text{ — любое}, \quad k = \mu + \tfrac{15}{16}\mu^{-1}.$$

2.4. При $a = 1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$:

$$w(x,t) = 2\pi - \delta + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\sqrt{15}}e^\theta - \frac{1}{\sqrt{15}}\right); \qquad \delta \text{ — любое}, \quad k = \mu + \tfrac{15}{16}\mu^{-1}.$$

⊙ *Литература*: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985).

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\cos(\lambda w).$

Замена $w = u + \dfrac{\pi}{2\lambda}$ приводит к уравнению вида 3.3.3.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\sin(\lambda u).$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta t}\sin^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.1.7 при $f(w) = b\sin^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.3.1.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta x}\sin^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.1.6 при $f(w) = b\sin^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.3.1.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta t}\cos^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.1.7 при $f(w) = b\cos^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.3.3.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta x}\cos^k(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.1.6 при $f(w) = b\cos^k(\lambda w)$. Поэтому при $k = 1$ это уравнение сводится к более простому уравнению 3.3.3.3.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + k\sin(\lambda w).$

Частный случай уравнения 3.4.3.4 при $f(w) = k\sin(\lambda w)$, $b = an$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a\cos^n(\lambda w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.4.4 при $f(w) = a\cos^n(\lambda w)$.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a\sin^n(\lambda w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.4.4 при $f(w) = a\sin^n(\lambda w)$.

3.3.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(be^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1 x + C_2) + C_3 e^{-at} + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(\lambda C_1 x^2 + C_2 x + C_3) + u(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u = u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{tt} + au'_t = 2bC_1 e^{\lambda u}.$$

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{be^{\lambda w} - \lambda^2}{a\lambda w + C_1}\,dw = x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[a(w+b)^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr].$

1°. Точное решение при $n \neq -1$:

$$w(x,t) = (x + C_2)^{1/(1+n)}(C_1 e^{-kt} + C_2) - b,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = (x + C)^{2/n} u(t) - b,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $u = u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{tt} + ku'_t = \frac{2a(n+2)}{n^2} u^{n+1}.$$

Это уравнение легко интегрируется при $n=-2$ и $n=-1$; при $n=-3/2$, -3 его точные решения приведены в справочнике В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int_0^{w+b} \frac{bu^n - \lambda^2}{k\lambda u + C_1}\, dw = x + \lambda t + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

4°. Точное решение при $n = -1$:

$$w(x,t) = \frac{2at + C_1 e^{-kt} + C_2}{k(x + C_3)^2} - b,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

5°. Точное решение при $n = 1$:

$$w(x,t) = f(t)x^2 + g(t)x + h(t) - b,$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f''_{tt} + kf'_t &= 6af^2, \\ g''_{tt} + kg'_t &= 6afg, \\ h''_{tt} + kh'_t &= 2afh + ag^2. \end{aligned}$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

Преобразование

$$\tau = t + \ln|w|, \quad dz = aw^{-2}w_x dt + (w + w_t)dx, \quad u = 1/w \qquad (dz = z_t\, dt + z_x\, dx),$$

где индексы снизу обозначают соответствующие частные производные, приводит к линейному телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

⊙ *Литература*: C. Rogers, T. Ruggeri (1985), C. Rogers, W. F. Ames (1989).

3.3.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr]$

Уравнения этого вида допускают решения типа бегущей волны $w = w(kx+\lambda t)$ (значению $k=0$ соответствует однородное решение, зависящее только от t, а значению $\lambda = 0$ — стационарное решение, зависящее только от x). При $g(w) = \text{const}$ такие уравнения встречаются в теории электрического поля при нелинейных законах Ома, где w — напряженность электрического поля.

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w^n \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Решения типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \frac{(n+1)dw}{w^{n+1}+C_1} = -\frac{a(x-at)}{1-a^2} + C_2 \quad \text{при} \quad n \neq -1,$$

$$\int \frac{dw}{\ln|w|+C_1} = -\frac{a(x-at)}{1-a^2} + C_2 \quad \text{при} \quad n = -1,$$

где C_1, C_2, a — произвольные постоянные ($a \neq 0, \pm 1$).

Частный случай 1. Решение типа бегущей волны при $n \neq 0, -1$:

$$w = \Bigl(\frac{n}{n+1}\xi + C\Bigr)^{-1/n}, \quad \xi = \frac{a(x-at)}{1-a^2},$$

где C, a — произвольные постоянные ($a \neq 0, \pm 1$).

Частный случай 2. Решения типа бегущей волны при $n = 1$:

$$w = 2C_1 \operatorname{th}(C_1\xi + C_2), \qquad w = -2C_1 \operatorname{tg}(C_1\xi + C_2), \qquad \xi = \frac{a(x-at)}{1-a^2},$$

где C_1, C_2, a — произвольные постоянные, $a \neq 0, \pm 1$.

2°. Автомодельное решение:

$$w = t^{-1/n}\varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t},$$

где функция $\varphi = \varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(1-\xi^2)\varphi''_{\xi\xi} + \Bigl[\varphi^n - \frac{2(n+1)}{n}\Bigr]\xi\varphi'_\xi + \frac{1}{n}\varphi^{n+1} + \frac{n+1}{n^2}\varphi = 0.$$

⊙ *Литература:* Ю. П. Емец, В. Б. Таранов (1972), N. H. Ibragimov (1995).

3°. Точное решение при $n = 1$:

$$w = \varphi(x)\Bigl[t + C_1 + C_2 \int \frac{dx}{\varphi^2(x)}\Bigr].$$

Здесь функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi''_{xx} = \varphi^2$, которое имеет частное решение $\varphi = 6(x+C)^{-2}$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + aw^n \dfrac{\partial w}{\partial t} = b\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = u(z)t^{-1/n}, \quad z = xt^{-1},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$n^2(z^2-b)u''_{zz} + nz(2n+2-nau^n)u'_z + u(1+n-nau^n) = 0.$$

2°. Переходя к новым независимым переменным $\tau = at$, $z = a\beta^{-1/2}x$, приходим к уравнению вида 3.3.5.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + w^n \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + aw^n \dfrac{\partial w}{\partial t} = b\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^k \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$.

Автомодельное решение:

$$w(x,t) = u(z)t^{-1/n}, \quad z = xt^{(k-2n)/(2n)},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl[4bn^2u^k - (2n-k)^2z^2\bigr]u''_{zz} + 4bkn^2u^{k-1}(u'_z)^2 + {} + (2n-k)(k-4-4n+2nau^n)zu'_z = 4u(1+n-anu^n).$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + e^w \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,t) = -\ln\Big\{\frac{1}{C_1}\Big[\exp\Big(\frac{C_1}{a^2-1}(ax-t)+C_2\Big)-1\Big]\Big\},$$
$$w(x,t) = -\ln\Big\{\frac{1}{a^2-1}(ax-t)+C_1\Big\},$$

где C_1, C_2, a — произвольные постоянные ($a \neq \pm 1$).

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = -\ln\Big(\frac{t+Cx}{1-C^2} + 2a\sqrt{|t^2-x^2|}\,\Big|\frac{x+t}{x-t}\Big|^a\Big),$$
$$w(x,t) = -\ln\Big(\mp\frac{x}{2} + C(x\pm t) + \frac{1}{4}(x\pm t)\ln\Big|\frac{x+t}{x-t}\Big|\Big),$$

где C, a — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: Ю. П. Емец, В. Б. Таранов (1972), N. H. Ibragimov (1995).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + ae^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial t} = b\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = u(z) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad z = xt^{-1},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda(z^2-b)u''_{zz} + \lambda z(2-ae^{\lambda u})u'_z + 1 - ae^{\lambda u} = 0.$$

2°. Переходя к новым независимым переменным $\tau = at$, $z = a\beta^{-1/2}x$, приходим к уравнению вида 3.3.5.4:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + e^w \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + ae^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial t} = b\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\mu w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$.

Точное решение:

$$w(x,t) = u(z) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad z = xt^{(\lambda-2\mu)/(2\mu)},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\big[(\mu-2\lambda)^2z^2 - 4b\lambda^2e^{\mu u}\big]u''_{zz} - 4b\mu\lambda^2e^{\mu u}(u'_z)^2 +$$
$$+ (\mu-2\lambda)(\mu-4\lambda+2a\lambda e^{\lambda u})zu'_z + 4\lambda(1-ae^{\lambda u}) = 0.$$

3.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

3.4.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)$.

Нелинейное уравнение Клейна — Гордона общего вида.

1°. Пусть $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, \pm t + C_2),$$
$$w_2 = w\Big(x\operatorname{ch}\beta - t\sqrt{a}\operatorname{sh}\beta,\ t\operatorname{ch}\beta - x\frac{\operatorname{sh}\beta}{\sqrt{a}}\Big),$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения (знаки в w_1 выбираются независимо друг от друга).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = \mu x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $(\lambda^2 - a\mu^2)w''_{zz} = f(w)$. Его решения можно представить в неявном виде:

$$\int \left[A + \frac{2}{\lambda^2 - a\mu^2} \int f(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = B \pm z, \tag{1}$$

где A, B — произвольные постоянные.

С. В. Нестеров (1978) указал несколько случаев, когда решение (1) можно записать в явном виде ($a = \mu = 1$):

$$f(w) = -b^2 \frac{\operatorname{th} w}{\operatorname{ch}^2 w}, \quad w(z) = \operatorname{Arsh}\left[\operatorname{sh} k \sin\left(\frac{bz + c}{\operatorname{ch} k\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)\right],$$
$$f(w) = -b^2 \frac{\operatorname{tg} w}{\cos^2 w}, \quad w(z) = \arcsin\left[\sin k \sin\left(\frac{bz + c}{\cos k\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)\right],$$

где k, c — произвольные постоянные. В этих случаях периодическим решениям по z с периодом 2π отвечают следующие зависимости скорости волны λ от амплитуды b:

$$\lambda^2 = 1 + b^2 \operatorname{ch}^{-2} k,$$
$$\lambda^2 = 1 + b^2 \cos^{-2} k.$$

3°. Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{4}a(t + C_1)^2 - \tfrac{1}{4}(x + C_2)^2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi} + w'_\xi - \frac{1}{a} f(w) = 0.$$

4°. О точных решениях нелинейного уравнения Клейна — Гордона при $f(w) = bw^m$, $f(w) = be^{\lambda w}$, $f(w) = b\operatorname{sh}(\lambda w)$, $f(w) = bw\ln w$, $f(w) = b\sin(\lambda w)$ см. соответственно уравнения 3.1.1.1, 3.2.1.1, 3.3.1.1, 3.3.2.1, 3.3.3.1. О решениях этого уравнения для некоторых других зависимостей $f = f(w)$ см. разд. A.3.3-2, пример 12.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (x^2 - t^2) f(w).$

1°. Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{2}(x^2 - t^2),$$

где функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi} + w'_\xi + \xi f(w) = 0.$$

2°. Автомодельное решение:

$$w = w(\zeta), \qquad \zeta = xt.$$

Здесь функция $w = w(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\zeta\zeta} = f(w),$$

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int \left[C_1 + 2F(w)\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm \zeta, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w = w(z), \qquad z = \tfrac{1}{2}(x^2 + t^2).$$

Здесь функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + f(w) = 0,$$

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int \left[C_1 - 2F(w)\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm z, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 + t^2), \quad \tau = xt$$

приводит к более простому уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$$

Это уравнение для произвольной зависимости $f = f(w)$ допускает точное решение типа бегущей волны $w = w(kz + \lambda\tau)$, где A, B — произвольные постоянные.

5°. Преобразование (β — произвольная постоянная)

$$\xi = x \operatorname{ch}\beta + t \operatorname{sh}\beta, \quad \tau = x \operatorname{sh}\beta + t \operatorname{ch}\beta,$$

приводит к уравнению такого же вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (\xi^2 - \tau^2) f(w).$$

Поэтому, если удалось построить точное решение $w(x,t)$, то функция

$$w_1 = w(x \operatorname{ch}\beta + t \operatorname{sh}\beta,\ x \operatorname{sh}\beta + t \operatorname{ch}\beta)$$

также будет решением исходного уравнения при любом значении β.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (t^2 - x^2)^n f(w), \qquad n = 2,\ 3,\ \ldots.$

Частный случай уравнения 3.4.1.16 при $f(y) = y^n$, $g(z) = z^n$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x + bt, w).$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = x + bt,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a - b^2) w''_{\xi\xi} + f(\xi, w) = 0.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (x^2 - t^2) f(xt,\ w).$

1°. Точное решение

$$w = w(\tau), \qquad \tau = xt.$$

Здесь функция $w = w(\tau)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\tau\tau} = f(\tau, w).$$

2°. Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 + t^2), \quad \tau = xt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(\tau, w).$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\beta x} f(w).$

1°. Существует решение, зависящее от одной переменной $w = w(x)$.

2°. Преобразование

$$\xi(x,t) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\beta x\right) \operatorname{ch}\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right), \quad \tau(x,t) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\beta x\right) \operatorname{sh}\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right)$$

приводит к более простому уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 4\beta^{-2} f(w).$$

Это уравнение для произвольной зависимости $f = f(w)$ допускает точное решение типа бегущей волны $w = w(k\xi + \lambda\tau)$ и решение вида $w = w(\xi^2 - \tau^2)$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\beta t} f(w).$

1°. Существует решение, зависящее от одной переменной $w = w(t)$.

2°. Преобразование

$$\xi(x,t) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right) \operatorname{sh}\left(\tfrac{1}{2}\beta x\right), \quad \tau(x,t) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right) \operatorname{ch}\left(\tfrac{1}{2}\beta x\right)$$

приводит к более простому уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 4\beta^{-2} f(w).$$

Это уравнение для произвольной зависимости $f = f(w)$ допускает точное решение типа бегущей волны $w = w(k\xi + \lambda\tau)$ и решение вида $w = w(\xi^2 - \tau^2)$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{ax+bt} f(w).$

1°. Существует решение вида $w = w(ax + bt)$.

2°. При $b \neq \pm a$ преобразование

$$\xi = ax + bt, \quad \tau = bx + at$$

приводит к уравнению вида 3.4.1.6:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} e^{\xi} f(w).$$

3°. При $b = a$ см. уравнение 3.4.1.13 для $f(z) = e^{az}$; при $b = -a$ см. уравнение 3.4.1.14 для $f(z) = e^{-az}$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw \ln w + f(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \left[b \ln \varphi + f(t) + C\right]\varphi = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + \left(b \ln \psi - C\right)\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw \ln w + \left[f(x) + g(t)\right]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \left[b \ln \varphi + g(t) + C\right]\varphi = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + \left[b \ln \psi + f(x) - C\right]\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w\ln w + \big[bf(t)x + g(t)\big]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bx}\varphi(t),$$

где функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{tt} = f(t)\varphi\ln\varphi + \big[g(t) + ab^2\big]\varphi.$$

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w\ln w + \big[bf(x)t + g(x)\big]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bt}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f(x)\varphi\ln\varphi + \big[g(x) - b^2\big]\varphi = 0.$$

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t+x)g(w).$

Преобразование (a — произвольная постоянная)

$$\xi = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{2}(t-x), \quad \tau = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2}(t-x)$$

приводит к уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + g(w).$$

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t-x)g(w).$

Преобразование (a — произвольная постоянная)

$$\xi = \frac{1}{2}(t+x) - \frac{1}{2}\int_b^{t-x} f(\sigma)\,d\sigma, \quad \tau = \frac{1}{2}(t+x) + \frac{1}{2}\int_b^{t-x} f(\sigma)\,d\sigma$$

приводит к уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + g(w).$$

15. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t+x)g(t-x)e^{\beta w}.$

Преобразование (a, b — произвольные постоянные)

$$\xi = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{2}\int_b^{t-x} g(\sigma)\,d\sigma, \quad \tau = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2}\int_b^{t-x} g(\sigma)\,d\sigma$$

приводит к уравнению вида 3.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + e^{\beta w}.$$

16. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t+x)g(t-x)h(w).$

Преобразование (a, b — произвольные постоянные)

$$\xi = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{2}\int_b^{t-x} g(\sigma)\,d\sigma, \quad \tau = \frac{1}{2}\int_a^{t+x} f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2}\int_b^{t-x} g(\sigma)\,d\sigma$$

приводит к уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + h(w).$$

17. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{kt-\mu f(t)}e^{\mu w} + f''_{tt}(t).$

Точные решения (C_1, C_2, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = f(t) - \frac{k}{\mu}t - \frac{2}{\mu}\ln\Bigl(C_1 + C_2 x \pm \sqrt{C_2^2 + \tfrac{1}{2}\mu a\, t}\Bigr),$$
$$w(x,t) = f(t) - \frac{k}{\mu}t - \frac{2}{\mu}\ln\Bigl(C_1 e^{-\lambda t} + C_2 e^{\lambda x} - \frac{\mu a}{8\lambda^2 C_1}e^{\lambda t}\Bigr).$$

3.4.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{b}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w).$

1°. Частный случай уравнения 3.4.3.4 при $n = 0$, $b = am$. Это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{a}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(x^m \frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + f(w), \qquad m = \frac{b}{a}.$$

Значениям $m=1$ и $m=2$ соответствуют нелинейные волны с осевой и центральной симметрией.

2°. Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = \sqrt{ak(t+C)^2 - kx^2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{a+b}{a\xi}w'_\xi = \frac{1}{ak}f(w).$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\ln w + \bigl[g(x) + h(t)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \bigl[b\ln\varphi + h(t) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + f(x)\psi'_x + \bigl[b\ln\psi + g(x) - C\bigr]\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = \pm x + \lambda t,$$

где функция $w = w(z)$ задается неявно с помощью формул (A, B, λ — произвольные постоянные)

$$(\lambda^2 - a)\int \frac{dw}{F(w) + A} = z + B, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw.$$

Стационарному решению соответствует значение $\lambda = 0$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + cw + f(t).$

Точные решения:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \Theta(\xi), \quad \xi = \pm x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функции $\varphi(t)$ и $\Theta(\xi)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - c\varphi - f(t) = 0, \tag{1}$$
$$(a - \lambda^2)\Theta''_{\xi\xi} + b(\Theta'_\xi)^2 + c\Theta = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(t) = C_1 \operatorname{ch}(kt) + C_2 \operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]\, d\tau \quad \text{при} \quad c = k^2 > 0,$$

$$\varphi(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) + \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]\, d\tau \quad \text{при} \quad c = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Решение уравнения (2) можно найти с помощью замены $z(\Theta) = \bigl(\Theta'_\xi\bigr)^2$, которая приводит к линейному уравнению первого порядка.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + cw + f(x).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t).$$

Здесь

$$\psi(t) = C_1 \operatorname{ch}(kt) + C_2 \operatorname{sh}(kt) \quad \text{при} \quad c = k^2 > 0,$$
$$\psi(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) \quad \text{при} \quad c = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + b\bigl(\varphi'_x\bigr)^2 + c\varphi + f(x) = 0.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + cw\dfrac{\partial w}{\partial x} + kw^2 + f(t)w + g(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корни квадратного уравнения $b\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = k\varphi^2 + f(t)\varphi + g(t), \tag{1}$$
$$\psi''_{tt} = \bigl[(c\lambda + 2k)\varphi + f(t) + a\lambda^2\bigr]\psi. \tag{2}$$

В частном случае при $f(t) = \text{const}$, $g(t) = \text{const}$ уравнение (1) имеет частные решения вида $\varphi = \text{const}$ и ввиду его автономности может быть проинтегрировано в квадратурах. Уравнение (2) линейно относительно функции ψ, поэтому при $\varphi = \text{const}$ его общее решение выражается через экспоненты или синус и косинус.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + g(t)w + h(t).$

Точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t), \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{tt} = 4f\varphi^2 + g\varphi, \tag{2}$$
$$\psi''_{tt} = (4f\varphi + g)\psi, \tag{3}$$
$$\chi''_{tt} = g\chi + f\psi^2 + h + 2a\varphi. \tag{4}$$

Уравнение (2) имеет тривиальное частное решение $\varphi(t) \equiv 0$, которому соответствует решение (1) линейное по координате x.

Если удается найти решение $\varphi = \varphi(t)$ нелинейного уравнения (2), то функции $\psi = \psi(t)$ и $\chi = \chi(t)$ можно найти последовательно путем решения уравнений (3) и (4), которые линейны относительно ψ и χ.

Отметим, что уравнение (3) имеет частное решение $\psi = \bar{\varphi}(t)$, где $\bar{\varphi}(t)$ — любое нетривиальное частное решение уравнения (2). Поэтому общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\psi(t) = C_1\bar{\varphi}(t) + C_2\bar{\varphi}(t)\int \frac{dt}{\bar{\varphi}^2(t)},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Если функции f и g пропорциональны, то частное решение уравнения (2) определяется формулой $\varphi = -\frac{1}{4}g/f$ ($\varphi = \text{const}$).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(x) + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}At^2 + Bt + C + \int_0^t (t-\tau)h(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f(x)\big(\varphi'_x\big)^2 + g(x) - A = 0.$$

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bw + g(x) + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - h(t) = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + f(x)(\psi'_x)^2 + b\psi + g(x) = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t h(\tau)\operatorname{sh}\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$

$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t h(\tau)\sin\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\big(\pm x\sqrt{-b}\big), \qquad b < 0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{tt} = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$
$$\psi''_{tt} = (2bf\varphi + g - ab)\psi. \tag{3}$$

Если удается найти решение $\varphi = \varphi(t)$ уравнения (2), то функцию $\psi = \psi(t)$ можно получить путем решения уравнения (3), линейного относительно ψ.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha,\ \beta = \text{const}),$$

то частные решения уравнения (2) имеют вид

$$\varphi = k_1, \quad \varphi = k_2, \tag{4}$$

где k_1, k_2 — корни квадратного уравнения $bk^2 + \alpha k + \beta = 0$. В этом случае уравнение (3) записывается так

$$\psi''_{tt} = \big[(2bk_n + \alpha)f - ab\big]\psi, \qquad n = 1,\ 2. \tag{5}$$

В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений линейного уравнения (5) для различных зависимостей $f = f(t)$. В частном случае $f = \text{const}$ общее решение уравнения (5) является суммой экспонент (или синуса и косинуса).

2°. Точные решения более общего вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\left[A\exp\left(x\sqrt{-b}\right) + B\exp\left(-x\sqrt{-b}\right)\right], \qquad b<0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{tt} = bf\left(\varphi^2 + 4AB\psi^2\right) + g\varphi + h, \tag{7}$$

$$\psi''_{tt} = \left(2bf\varphi + g - ab\right)\psi. \tag{8}$$

Из уравнения (8) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (7). В итоге получается нелинейное уравнение четвертого порядка для функции ψ (при f, g, $h = \text{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{ch}\left(x\sqrt{-b}\right), \qquad A=\tfrac{1}{2},\ B=\tfrac{1}{2},$$

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}\left(x\sqrt{-b}\right), \qquad A=\tfrac{1}{2},\ B=-\tfrac{1}{2}.$$

3°. Точное решение (c — произвольная постоянная):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\left(x\sqrt{b}+c\right), \qquad b>0, \tag{9}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{tt} = bf\left(\varphi^2 + \psi^2\right) + g\varphi + h, \tag{10}$$

$$\psi''_{tt} = \left(2bf\varphi + g - ab\right)\psi. \tag{11}$$

⦿ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995, рассматривался случай $f=a$, $g=\text{const}$, $h=\text{const}$), **В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).**

11. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left[g_1(t)x + g_0(t)\right]\frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w + p_2(t)x^2 + p_1(t)x + p_0(t).$

Это уравнение имеет точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t).$$

12. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k + g(x)\frac{\partial w}{\partial x} + bw + h_1(t) + h_2(x).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t).$$

Здесь

$$\psi(t) = \begin{cases} C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^t \operatorname{sh}\bigl[k(t-\tau)\bigr]h_1(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad b = k^2 > 0,\\ C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^t \sin\bigl[k(t-\tau)\bigr]h_1(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad b = -k^2 < 0,\\ C_1 + C_2 t + \displaystyle\int_0^t (t-\tau)h_1(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad b = 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f(x)\left(\varphi'_x\right)^k + g(x)\varphi'_x + b\varphi + h_2(x) = 0.$$

13. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}At^2 + Bt + C + \int_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi''_{xx} + f\left(x, \varphi'_x\right) - A = 0.$$

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - g(t) = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + f\big(x, \psi'_x\big) + b\psi = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\operatorname{sh}\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$
$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\sin\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

15. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\Big(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}\varphi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{tt} = \big[a\lambda^2 + f(t,\lambda)\big]\varphi.$$

3.4.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (ax^2 + b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w).$

Замена $z = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}}$ приводит к уравнению вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x+\beta)^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w), \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. При $n = 0$ см. уравнение 3.4.1.1.

1°. Замена $y = x + \beta$ приводит к частному случаю уравнения 3.4.3.4 при $b = 0$.

2°. Точное решение при $n \neq 2$:

$$w = w(z), \qquad z = \big[\tfrac{1}{4}a(2-n)^2(t+C)^2 - (x+\beta)^{2-n}\big]^{\frac{n}{2(2-n)}},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ определяется из обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера

$$w''_{zz} - \frac{4}{an^2}z^{\frac{4(1-n)}{n}}f(w) = 0. \tag{1}$$

В частном случае $n = 1$ решение уравнения (1) имеет вид

$$\int\Big[C_1 + \frac{8}{a}F(w)\Big]^{-1/2}dw = \pm z + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведен ряд точных решений уравнения (1) для некоторых зависимостей $f = f(w)$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[a(x+\beta)^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + f(w), \qquad a > 0.$

Сделаем замену $z = x + \beta$, а затем продифференцируем по z выражение в квадратных скобках в правой части уравнения. В результате приходим к частному случаю уравнения 3.4.3.4 при $b = an$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = az^n \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + anz^{n-1}\frac{\partial w}{\partial z} + f(w).$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w), \qquad a > 0.$

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2°. Точное решение при $n \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{4}a(2-n)^2(t+C)^2 - x^{2-n}.$$

Здесь C — произвольная постоянная, а функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi} + Aw'_\xi - Bf(w) = 0, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{a(4-3n)+2b}{2a(2-n)}, \quad B = \frac{1}{a(2-n)^2}.$$

При $A \neq 1$ замена $\xi = kz^{\frac{1}{1-A}}$ $(k = \pm 1)$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{zz} - \frac{kB}{(1-A)^2} z^{\frac{2A-1}{1-A}} f(w) = 0. \tag{2}$$

В частном случае $A = \frac{1}{2}$, что соответствует $b = a(n-1)$, решение уравнения (2) имеет вид

$$\int \Big[C_1 + 8kBF(w)\Big]^{-1/2} dw = \pm z + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина приведен ряд точных решений уравнения (2) для некоторых зависимостей $f = f(w)$.

3°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} + (b-a)Bw'_y + f(w) = 0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$(b-a)B\int \frac{dw}{f(w)} = -y + C_1.$$

Решения уравнения (3) при $b = a$:

$$\int \Big[C_1 + \frac{2}{A^2 - aB^2}F(w)\Big]^{-1/2} dw = \pm y + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw.$$

При $A \neq \pm B\sqrt{a}$ и $b \neq a$ замена $u(w) = \dfrac{aB^2 - A^2}{B(a-b)} w'_y$ приводит (3) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = \frac{A^2 - aB^2}{B^2(a-b)^2} f(w),$$

точные решения которого для различных функций $f = f(w)$ приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *a*).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{n-1} f(w) \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Решения, зависящие только от одной переменной:

$$w(t) = At + B;$$

$$\frac{1}{a} \ln|x| + A = \int \frac{dw}{aw - F(w) + B}, \quad F(w) = \int f(w)\, dw,$$

где A, B — произвольные постоянные (второе решение задано неявно).

2°. Точное решение при $n \neq 2$:

$$w = w(z), \quad z = \left[ka(2-n)^2(t+C)^2 - 4kx^{2-n}\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2}{a(2-n)} \left[a(1-n) + f(w)\right] \frac{1}{z} w'_z = 0. \tag{1}$$

Замена $u(w) = zw'_z$ приводит (1) к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После интегрирования получим решение в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{anw - 2F(w) + C_1} = \frac{1}{a(2-n)} \ln|z| + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\, dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение при $n \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = xt^{\frac{2}{n-2}},$$

где функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\left[a\xi^{n-1} - \frac{4}{(n-2)^2}\xi\right] w''_{\xi\xi} + \left[\xi^{n-2} f(w) + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2}\right] w'_\xi = 0.$$

4°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2) w''_{yy} + B\left[f(w) - a\right] w'_y = 0,$$

решение которого при $A \neq \pm B\sqrt{a}$ дается формулой

$$\frac{aB^2 - A^2}{B} \int \frac{dw}{F(w) - aw + C_1} = -y, \qquad F(w) = \int f(w)\, dw.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{n-1} f(w) \dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2°. Точное решение при $n \neq 2$:

$$w = w(z), \quad z = \left[ka(2-n)^2(t+C)^2 - 4kx^{2-n}\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2}{a(2-n)} \left[a(1-n) + f(w)\right] \frac{1}{z} w'_z - \frac{1}{ak(2-n)^2} g(w) = 0.$$

3°. Точное решение при $n = 2$:

$$w = w(\xi), \quad z = At + B\ln|x| + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(aB^2 - A^2)w''_{\xi\xi} + B\big[f(w) - a\big]w'_\xi + g(w) = 0. \qquad (1)$$

Решение уравнения (1) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$B\int\big[f(w) - a\big]\frac{dw}{g(w)} = -\xi + C_1.$$

В общем случае замена $u(w) = w'_\xi$ приводит (1) к уравнению Абеля, точные решения которого для различных функций $f = f(w)$ и $g = g(w)$ можно найти в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *a*).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.9 при $b = 0$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(w), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 3.4.3.9 при $b = a\lambda$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w), \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде.

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2°. Точное решение (C — произвольная постоянная):

$$w = w(z), \quad z = \big[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t + C)^2\big]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где функция $w = w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2(a\lambda - b)}{a\lambda}\frac{1}{z}w'_z + \frac{1}{ak\lambda^2}f(w) = 0. \qquad (1)$$

При $b = a\lambda$ решение уравнения (1) имеет вид

$$\int\Big[C_1 - \frac{2}{ak\lambda^2}F(w)\Big]^{-1/2}dw = \pm z + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $b \neq \frac{1}{2}a\lambda$ замена $\xi = z^{\frac{2b - a\lambda}{a\lambda}}$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} + \frac{a}{k(2b - a\lambda)^2}\xi^{\frac{4(a\lambda - b)}{2b - a\lambda}}f(w) = 0. \qquad (2)$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведен ряд точных решений уравнения (2) для некоторых зависимостей $f = f(w)$.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\lambda x}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. При $\lambda = 0$ см. уравнение 3.4.3.3.

2°. Точное решение при $\lambda \neq 0$:

$$w = w(z), \quad z = \big[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t + C)^2\big]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2}{z}\Big[1 - \frac{1}{a\lambda}f(w)\Big]w'_z = 0. \qquad (1)$$

Замена $u(w) = zw'_z$ приводит (1) к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После интегрирования получим решение в неявном виде:

$$\int\frac{dw}{2F(w) - a\lambda w + C_1} = \frac{1}{a\lambda}\ln|z| + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = t^2 e^{\lambda x},$$

где функция $w = w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a\lambda^2\xi^2 - 4\xi)w''_{\xi\xi} + \left[\lambda\xi f(w) + a\lambda^2\xi - 2\right]w'_\xi = 0.$$

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\lambda x} f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2°. Точное решение при $\lambda \neq 0$:

$$w = w(z), \quad z = \left[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t+C)^2\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} + \frac{2}{z}\left[1 - \frac{1}{a\lambda}f(w)\right]w'_z + \frac{1}{ak\lambda^2}g(w) = 0.$$

3°. При $\lambda = 0$ существует точное решение типа бегущей волны $w = w(\alpha x + \beta t)$.

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + aw\ln w + \left[h(x) + p(t)\right]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$f(x)\varphi''_{xx} + g(x)\varphi'_x + a\varphi\ln\varphi + \left[C + h(x)\right]\varphi = 0,$$
$$\psi''_{tt} - a\psi\ln\psi + \left[C - p(t)\right]\psi = 0.$$

3.4.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\left(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(t)w + h_2(t)x^2 + h_1(t)x + h_0(t).$

Точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = 2[2f(t) + a]\varphi^2 + g(t)\varphi + h_2(t),$$
$$\psi''_{tt} = 2[2f(t) + a]\varphi\psi + g(t)\psi + h_1(t),$$
$$\chi''_{tt} = 2a\varphi\chi + f(t)\psi^2 + g(t)\chi + h_0(t).$$

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995); рассматривался случай $f = \text{const}$, $h_1 = h_2 = 0$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w^5.$

1°. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} + f(x)u = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$\xi = \int \frac{dx}{u^2}, \quad z = \frac{w}{u}$$

упрощает исходное уравнение и приводит его к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = az^4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Это уравнение имеет, например, такие решения (A, B, C, D, λ — произвольные постоянные):

$$z(\xi,t) = A\xi t + B\xi + Ct + D,$$

$$z(\xi,t) = \lambda^{-1/4}(t+C)^{-1/2}\left[\frac{3\lambda}{4A^2a} + (A\xi+B)^2\right]^{1/2}.$$

Второе решение является частным случаем решения в виде произведения функций разных аргументов $z(\xi,t) = f(\xi)g(t)$. Существует также решение типа бегущей волны $z = z(\alpha\xi + \beta t)$ и автомодельное решение вида

$$z = t^k\varphi(\zeta), \quad \zeta = \xi t^{-2k-1},$$

где k — произвольная постоянная.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (\pm 2\lambda t + C)^{-1/2}g(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $g = g(x)$ определяется из уравнения Ермакова

$$ag''_{xx} + f(x)g - 3\lambda^2 g^{-3} = 0. \qquad (2)$$

Если известно частное решение $u = u(x)$ линейного уравнения (1), то общее решение нелинейного уравнения (2) имеет вид (см., например, В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 a):

$$Ag^2 = \frac{3\lambda^2}{a}u^2 + u^2\left(B + A\int\frac{dx}{u^2}\right)^2,$$

где A, B — произвольные постоянные ($A \neq 0$).

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + f(x)w^{-1/3}, \quad a > 0.$

1°. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} - \tfrac{1}{3}f(x)u = 0. \qquad (1)$$

Преобразование

$$\xi = \int\frac{dx}{u^2}, \quad z = wu^3 \qquad (2)$$

приводит исходное уравнение к более простому уравнению вида 3.1.4.8 при $m = -4/3$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial\xi}\left(z^{-4/3}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right).$$

2°. При $f = b = \text{const}$ решение вспомогательного уравнения (1), которое входит в преобразование (2), описывается формулами:

$$u(x) = \begin{cases} C_1\exp(\lambda x) + C_2\exp(-\lambda x) & \text{при } ab > 0, \\ C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x) & \text{при } ab < 0, \end{cases}$$

где $\lambda = \left|\frac{1}{3}b/a\right|^{1/2}$; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $f(x) = bx^m$ или $f(x) = be^{\beta x}$ решения уравнения (1) выражаются через функции Бесселя.

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right].$

Это уравнение встречается в задачах волновой и газовой динамики.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование
$$x = \tau, \quad t = z, \quad u = \int f(w)\,dw$$
приводит к уравнению аналогичного вида
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[g(u)\frac{\partial w}{\partial z}\right],$$
где функция $g = g(u)$ задается параметрически
$$u = \int f(w)\,dw, \quad g(u) = \frac{1}{f(w)}.$$
3°. Решение типа бегущей волны:
$$w = w(z), \quad z = x \pm \lambda t,$$
где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы (A, B — произвольные постоянные)
$$\lambda^2 w - \int f(w)\,dw = Az + B.$$
⊙ *Литература*: W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams (1981).

4°. Автомодельное решение:
$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{x+a}{t+b},$$
где a, b — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$(\xi^2 w'_\xi)'_\xi = [f(w)w'_\xi]'_\xi,$$
которое допускает первый интеграл
$$[\xi^2 - f(w)]\,w'_\xi = C. \tag{1}$$
Частному случаю $C = 0$ отвечает решение
$$\xi^2 = f(w).$$
При $C \neq 0$ принимая в (1) w за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим уравнение Риккати
$$C\xi'_w = \xi^2 - f(w). \tag{2}$$
В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $f = f(w)$.

Уравнение (2) подстановкой $\xi = -Cy'_w/y$ сводится к линейному уравнению второго порядка $y''_{ww} = C^{-2} f(w)y$.

⊙ *Литература*: W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams (1981), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

5°. Точное решение в параметрической форме:
$$x = C_1 v^2 + C_2 v + \int f(w)(2C_1 w + C_3)\,dw + C_4,$$
$$t = (2C_1 w + C_3)v + C_2 w + C_5.$$
Здесь и далее C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

6°. Точное решение в параметрической форме:
$$x = [C_1 F(w) + C_2]v + C_3 F(w) + C_4, \quad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
$$t = \frac{1}{2}C_1 v^2 + C_3 v + \int [C_1 F(w) + C_2]\,dw + C_5.$$
7°. Точное решение в параметрической форме:
$$x = [C_1 F(w) + C_2]v^2 + C_3 F(w) + C_4 + 2\int \left\{ f(w)\int [C_1 F(w) + C_2]\,dw \right\} dw,$$
$$t = \frac{1}{3}C_1 v^3 + C_3 v + 2v\int [C_1 F(w) + C_2]\,dw + C_5.$$

8°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = (C_1 e^{\lambda v} + C_2 e^{-\lambda v}) H(w) + C_3,$$
$$t = \frac{1}{\lambda}(C_1 e^{\lambda v} - C_2 e^{-\lambda v}) \frac{1}{f(w)} H'_w(w) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные, функция $H = H(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_f[H] - \lambda^2 H = 0$, а дифференциальный оператор $\mathbf{L}_f$ определяется выражением

$$\mathbf{L}_f[\varphi] \equiv \frac{d}{dw}\left[\frac{1}{f(w)} \frac{d\varphi}{dw}\right]. \tag{3}$$

9°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [C_1 \sin(\lambda v) + C_2 \cos(\lambda v)] Z(w) + C_3,$$
$$t = \frac{1}{\lambda}[C_2 \sin(\lambda v) - C_1 \cos(\lambda v)] \frac{1}{f(w)} Z'_w(w) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные, функция $Z = Z(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_f[Z] + \lambda^2 Z = 0$, а дифференциальный оператор $\mathbf{L}_f$ определяется выражением (3).

10°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [2C_1 F(w) + C_3] v + C_2 F(w) + C_5, \quad F(w) = \int f(w)\, dw,$$
$$t = C_1 v^2 + C_2 v + \int [2C_1 F(w) + C_3]\, dw + C_4.$$

11°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{2} C_1 v^2 + C_3 v + \int f(w)(C_1 w + C_2)\, dw + C_5,$$
$$t = (C_1 w + C_2) v + C_3 w + C_4.$$

12°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{3} C_1 v^3 + C_3 v + 2v \int f(w)(C_1 w + C_2)\, dw + C_5,$$
$$t = (C_1 w + C_2) v^2 + C_3 w + C_4 + 2 \int \left\{ \int f(w)(C_1 w + C_2)\, dw \right\} dw.$$

13°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{\lambda}(C_1 e^{\lambda v} - C_2 e^{-\lambda v}) H'_w(w) + C_3,$$
$$t = (C_1 e^{\lambda v} + C_2 e^{-\lambda v}) H(w) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные, а функция $H = H(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $H''_{ww} - \lambda^2 f(w) H = 0$.

14°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{\lambda}[C_2 \sin(\lambda v) - C_1 \cos(\lambda v)] Z'_w(w) + C_3,$$
$$t = [C_1 \sin(\lambda v) + C_2 \cos(\lambda v)] Z(w) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные, а функция $Z = Z(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $Z''_{ww} + \lambda^2 f(w) Z = 0$.

15°. Исходное уравнение можно представить в виде системы уравнений

$$f(w) \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Преобразование годографа

$$x = x(w, v), \quad t = t(w, v) \tag{5}$$

(w, v принимаются за независимые переменные, а x и t — за зависимые переменные) приводит (4) к линейной системе

$$f(w)\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial t}{\partial w}. \tag{6}$$

Исключая отсюда t, для функции $x = x(w,v)$ получим линейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{f(w)}\frac{\partial x}{\partial w}\right] - \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \tag{7}$$

Аналогичным образом из системы (6) для функции $t = t(w,v)$ имеем другое линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 t}{\partial w^2} - f(w)\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} = 0. \tag{8}$$

Процедура построения точных решений исходного нелинейного уравнения состоит из двух этапов. Сначала строится точное решение линейного уравнения (7) для $x = x(w,v)$. Затем это решение подставляется в линейную систему (6), откуда определяется функция $t = t(w,v)$ в виде

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{f(w)}\frac{\partial x}{\partial w}(w,\xi)\,d\xi + \int_{w_0}^{w} \frac{\partial x}{\partial v}(\eta, v_0)\,d\eta, \tag{9}$$

где w_0 и v_0 — любые. Полученные указанным способом выражения вида (5) будут давать точное исходного уравнения в параметрической форме.

Аналогичным образом сначала можно строить точное решение линейного уравнения (8) для $t = t(w,v)$, а затем из (6) определять функцию $x = x(w,v)$.

16°. Точные решения уравнения (7), содержащие четные степени v:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(w) v^{2k}, \tag{10}$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(w)$ описываются рекуррентными формулами

$$\varphi_n(w) = A_n F(w) + B_n, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

$$\varphi_{k-1}(w) = A_k F(w) + B_k + 2k(2k-1)\int f(w)\left\{\int \varphi_k(w)\,dw\right\}dw,$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные($k = n, \ldots, 1$).

Зависимость $t = t(w,v)$ определяется по формуле (9) и вместе с выражением (10) дает решение исходного нелинейного уравнения в параметрической форме.

17°. Точные решения уравнения (7), содержащие нечетные степени v:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(w) v^{2k+1}, \tag{11}$$

где функции $\psi_k = \psi_k(w)$ описываются рекуррентными формулами

$$\psi_n(w) = A_n F(w) + B_n, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

$$\psi_{k-1}(w) = A_k F(w) + B_k + 2k(2k+1)\int f(w)\left\{\int \psi_k(w)\,dw\right\}dw,$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные($k = n, \ldots, 1$).

Зависимость $t = t(w,v)$ определяется по формуле (9) и вместе с выражением (11) дает решение исходного нелинейного уравнения в параметрической форме.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *b*).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w) - \lambda^2]w''_{zz} + g(w)w'_z + h(w) = 0.$$

Последнее с помощью замены $u(w) = w'_z$ приводится к уравнению Абеля

$$[f(w) - \lambda^2]uu'_w + g(w)u + h(w) = 0. \qquad (1)$$

Подстановка $\xi = -\displaystyle\int \frac{g(w)\,dw}{f(w) - \lambda^2}$ приводит (1) к каноническому виду

$$uu'_\xi - u = F(\xi), \qquad (2)$$

где функция $F = F(\xi)$ задается параметрически с помощью формул

$$F(\xi) = \frac{h(w)}{g(w)}, \qquad \xi = -\int \frac{g(w)\,dw}{f(w) - \lambda^2}.$$

Большое число точных решений уравнений Абеля (2) для различных зависимостей $F = F(\xi)$ приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *a*).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\{[f(w) - \lambda^2]w'_z\}'_z + g(w)w'_z + h(w) = 0.$$

Последнее с помощью замены

$$u(w) = [f(w) - \lambda^2]w'_z$$

приводится к уравнению Абеля

$$uu'_w + g(w)u + h(w)[f(w) - \lambda^2] = 0. \qquad (1)$$

Подстановка $\xi = -\displaystyle\int g(w)\,dw$ приводит (1) к каноническому виду

$$uu'_\xi - u = F(\xi), \qquad (2)$$

где функция $F = F(\xi)$ задается параметрически с помощью формул

$$F(\xi) = \frac{h(w)}{g(w)}[f(w) - \lambda^2], \qquad \xi = -\int g(w)\,dw.$$

Большое число точных решений уравнений Абеля (2) для различных зависимостей $F = F(\xi)$ приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 2001 *a*).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + af'_w(w)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2.$

Уравнения этого вида встречаются в теории жидких кристаллов и других приложениях.

1°. В общем случае это уравнение имеет точные решения вида

$$w(x,t) = w(z), \qquad z = kx + \lambda t,$$
$$w(x,t) = w(\xi), \qquad \xi = \frac{x+b}{t+c},$$

где k, λ, b, c — произвольные постоянные.

2°. Структура других точных решений для конкретных функций $f(w)$:

$$f(w) = Aw + B, \qquad w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t);$$
$$f(w) = Aw^k, \qquad w(x,t) = \varphi(x)\psi(t);$$
$$f(w) = Ae^{\beta w}, \qquad w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t).$$

3°. Качественный анализ структуры решений исходного уравнения рассматривался в работах R. T. Glassey, J. K. Hunter, Y. Zheng (1997), A. A. Melikyan (1998).

3.4.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Big(x,t,w,\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)w^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = g(t)h(x),$$

где функции $g = g(t)$ и $h = h(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \qquad (1)$$
$$h''_{xx} - \lambda\big[f(x)\big]^{-1} h^{1-m} = 0, \qquad (2)$$

где λ — произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (1) записывается в неявной форме:

$$\int \Big(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} g^{m+2}\Big)^{-1/2} dg = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ имеем

$$g(t) = (at + C)^{-2/m}, \qquad a = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

При $m = 1$ общее решение уравнения (2) имеет вид

$$h(x) = \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\, d\xi + Ax + B,$$

где A, B, x_0 — произвольные постоянные.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*, разд. 2.3, 2.7) приведено много точных решений обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера (2) для различных функций $f = f(x)$.

2°. Преобразование

$$u(z,t) = \frac{1}{x} w(x,t), \qquad z = \frac{1}{x}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = z^{4-m} f\Big(\frac{1}{z}\Big) u^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = g(t)h(x),$$

где функции $g = g(t)$ и $h = h(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \qquad (1)$$
$$[f(x)h^m h'_x]'_x - \lambda h = 0, \qquad (2)$$

λ — произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (1) записывается в неявной форме:

$$\int \left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} g^{m+2}\right)^{-1/2} dg = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ имеем

$$g(t) = (at + C)^{-2/m}, \qquad a = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

Преобразование

$$z = \int \frac{dx}{f(x)}, \quad \Phi = h^{m+1}$$

приводит (2) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$\Phi''_{zz} - F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}} = 0, \tag{3}$$

где функция $F = F(z)$ задается параметрически с помощью формул

$$F = \lambda(m+1)f(x), \qquad z = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*, разд. 2.3, 2.7) приведено много точных решений уравнения (3) для различных функций $F = F(z)$.

2°. Преобразование

$$w(x,t) = \left[\psi(x)\right]^{\frac{1}{m+1}} u(\xi, t), \quad \xi = \int \left[\psi(x)\right]^{\frac{m+2}{m+1}} dx, \qquad \psi(x) = \int \frac{dx}{f(x)}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mathcal{F}(\xi) u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right],$$

где функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\xi)$ задается параметрически с помощью формул

$$\mathcal{F} = f(x)\left[\psi(x)\right]^{\frac{3m+4}{m+1}}, \quad \xi = \int \left[\psi(x)\right]^{\frac{m+2}{m+1}} dx, \qquad \psi(x) = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w^4 f\left(\frac{w}{x}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = Axt + Bx + Ct + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Преобразование

$$u(z,t) = \frac{1}{x} w(x,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u^4 f(u) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$ и автомодельное решения вида $u = u(z/t)$.

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w^4 f\left(\frac{w}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = Axt + Bx + Ct + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Преобразование
$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$
приводит к уравнению вида 3.4.4.5:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u^4 f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^5 f(u),$$
которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u = u(z+\lambda t)$.

3.4.6. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t,w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\Big(x,t,w,\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$.

1°. Точные решения:
$$w(x,t) = (C_1t+C_2)(C_3x+C_4)^{1/2},$$
$$w(x,t) = (C_1t+C_2)x + \int_a^t (t-\tau)(C_1\tau+C_2)^2 f(\tau)\,d\tau + C_3t + C_4,$$
где C_1, C_2, C_3, C_4, a — произвольные постоянные.

2°. Точное решение квадратичное по переменной x:
$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$
где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\varphi''_{tt} = 6f(t)\varphi^2,$$
$$\psi''_{tt} = 6f(t)\varphi\psi,$$
$$\chi''_{tt} = 2f(t)\varphi\chi + f(t)\psi^2.$$

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:
$$w(x,t) = \Phi(t)\Psi(x),$$
где функции $\Phi = \Phi(t)$, $\Psi = \Psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)
$$\Phi''_{tt} = Cf(t)\Phi^2,$$
$$(\Psi\Psi'_x)'_x = C\Psi.$$
Последнее уравнение является автономным и имеет частное решение $\Psi = \frac{1}{6}Cx^2$; в общем случае оно интегрируется в квадратурах.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + g(t)w + h_2(t)x^2 + h_1(t)x + h_0(t)$.

Точное решение квадратичное по переменной x:
$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$
где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\varphi''_{tt} = 6f(t)\varphi^2 + g(t)\varphi + h_2(t),$$
$$\psi''_{tt} = 6f(t)\varphi\psi + g(t)\psi + h_1(t),$$
$$\chi''_{tt} = 2f(t)\varphi\chi + f(t)\psi^2 + g(t)\chi + h_0(t).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = [a(t)w + b(t)]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + d(t)w + e(t)x^2 + f(t)x + g(t)$.

Существует точное решение квадратичное по переменной x:
$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t).$$

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995); рассматривался случай $a=1$, $b=e=f=0$, $c=\mathrm{const}$.

3.4.7. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a(t)\dfrac{\partial w}{\partial t} = b(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$.

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1x + C_2) + C_3\int A(t)\,dt + C_4, \qquad A(t) = \exp\Big[-\int a(t)\,dt\Big],$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(\lambda C_1x^2 + C_2x + C_3) + u(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u = u(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$u''_{tt} + a(t)u'_t = 2C_1b(t)e^{\lambda u}.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$.

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w = w(z)$ задается неявно (A, B — произвольные постоянные):

$$\int \frac{g(w) - \lambda^2}{\lambda F(w) + A}dw = z + B, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw.$$

Другие точные решения описаны в работе В. А. Байкова, Р. К. Газизова, Н. Х. Ибрагимова (1989).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw + g(t)$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - g(t) = 0,$$
$$a\psi''_{xx} + f(x, \psi'_x) + b\psi = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\operatorname{ch}(kt) + C_2\operatorname{sh}(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\operatorname{sh}\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \qquad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$

$$\varphi(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\sin\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + g\Big(t, \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big)$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$a\varphi''_{xx} + f(x, \varphi'_x) = C,$$
$$\psi''_{tt} - g(t, \psi'_t) = C.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Bigl(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + g\Bigl(t, \dfrac{\partial w}{\partial t}\Bigr) + bw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$a\varphi''_{xx} + f(x, \varphi'_x) + b\varphi = C,$$
$$\psi''_{tt} - g(t, \psi'_t) - b\psi = C.$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + wf\Bigl(x, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + wg\Bigl(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial t}\Bigr) + bw\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$a\varphi''_{xx} + \varphi f(x, \varphi'_x/\varphi) + b\varphi\ln\varphi + C\varphi = 0,$$
$$\psi''_{tt} - \psi g(t, \psi'_t/\psi) - b\psi\ln\psi + C\psi = 0.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

При $f(z) = -z$ это уравнение встречается в аэродинамике (в теории околозвуковых течений газа).

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1}w(C_1x + C_2, C_1t + C_3) + C_4t + C_5,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = Ax + Bx + Cx + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At^2 + Bt + \varphi(x).$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2A = f(\varphi'_x)\varphi''_{xx},$$

общее решение которого можно представить в параметрическом виде (C_1, C_2 — произвольные постоянные):

$$x = \frac{1}{2A}\int f(\xi)\,d\xi + C_1, \quad \varphi = \frac{1}{2A}\int \xi f(\xi)\,d\xi + C_2.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w = x\psi(z), \quad z = x/t,$$

где функция $\psi = \psi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(z\psi'_z + \psi) - z^2](z\psi''_{zz} + 2\psi'_z) = 0.$$

Приравнивая выражение в квадратных скобках нулю, имеем

$$f(z\psi'_z + \psi) - z^2 = 0.$$

Общее решение этого уравнения в параметрическом виде:

$$z = \pm\sqrt{f(\tau)}, \quad \psi = \frac{1}{2\sqrt{f(\tau)}}\int \frac{\tau f'_\tau(\tau)}{\sqrt{f(\tau)}}\,d\tau + C.$$

5°. Замена $v(x,t) = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению вида 3.4.4.4:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right].$$

6°. Преобразование Лежандра

$$u(z,\tau) = tz + x\tau - w(x,t), \quad z = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \tau = \frac{\partial w}{\partial x},$$

где u — новая зависимая переменная, а z и τ — новые независимые переменные, приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = f(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

⦿ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994).

Частный случай $f(U) = aU$.

1°. Точное решение квадратичное по переменной x:

$$w = (C_1t + C_2)x^2 + \left[\tfrac{1}{3}aC_1^{-2}(C_1t + C_2)^4 + C_3t + C_4\right]x +$$
$$+ \tfrac{1}{63}a^2C_1^{-4}(C_1t + C_2)^7 + \tfrac{1}{6}aC_1C_3t^4 + \tfrac{1}{3}a(C_1C_4 + C_2C_3)t^3 + aC_2C_4t^2 + C_5t + C_6,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде полинома третьей степени по x:

$$w = f(t)x^3 + g(t)x^2 + h(t)x + p(t),$$

где функции $f = f(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$, $p = p(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} = 18af^2,$$
$$g''_{tt} = 18afg,$$
$$h''_{tt} = 6afh + 4ag^2,$$
$$p''_{tt} = 2agh.$$

Частное решение первых трех уравнений имеет вид

$$f = \frac{1}{3a(t + C_1)^2}, \quad g = \frac{C_2}{(t + C_1)^2} + C_3(t + C_1)^3,$$
$$h = \frac{C_4}{t + C_1} + C_5(t + C_1)^2 + \frac{aC_2^2}{(t + C_1)^2} + 2aC_2C_3(t + C_1)^3 + \frac{2aC_3^2}{27}(t + C_1)^8,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные. Функция $p = p(t)$ определяется из последнего уравнения простым интегрированием правой части.

3°. Имеется точное решение в виде произведения функций разных аргументов $w = \varphi(x)\psi(t)$.

Частный случай $f(U) = aU^n$. Имеется точное решение в виде произведения функций разных аргументов $w = \varphi(x)\psi(t)$.

Частный случай $f(U) = a\exp(\lambda U)$. Имеется точное решение вида $w = x\varphi(t) + \psi(x)$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Преобразование Лежандра

$$u(z,\tau) = tz + x\tau - w(x,t), \quad z = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \tau = \frac{\partial w}{\partial x},$$

где u — новая зависимая переменная, а z и τ — новые независимые переменные, приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = f(z,\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

О решениях этого уравнения для некоторых $f(z,\tau)$ см. книгу А. Д. Полянина (2001 *b*).

3.5. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$

3.5.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = kw^n$.

Частный случай уравнения 3.5.2.1 при $f(w) = kw^n$.

1°. Решение типа бегущей волны (a, b — любые):

$$w = w(z), \quad z = ax + by,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $abw''_{zz} = kw^n$.

2°. Автомодельное решение:

$$w = x^{\frac{\beta - 1}{n-1}} U(\xi), \quad \xi = yx^{\beta},$$

где β — произвольная постоянная, а функция $U(\xi)$ описывается модифицированным уравнением Эмдена — Фаулера

$$\beta \xi U''_{\xi\xi} + \frac{n\beta - 1}{n - 1} U'_{\xi} = kU^n.$$

О точных решения этого уравнения см. книгу В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*).

2. $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = ae^{\lambda w}$.

Уравнение Лиувилля. Частный случай уравнения 3.5.2.1 при $f(w) = ae^{\lambda w}$.

1°. Общее решение:

$$w = \frac{1}{\lambda}\bigl[f(x) + g(y)\bigr] - \frac{2}{\lambda} \ln\left|k \int \exp\bigl[f(x)\bigr]\,dx + \frac{a\lambda}{2k} \int \exp\bigl[g(y)\bigr]\,dy\right|,$$

где $f = f(x)$ и $g = g(y)$ — произвольные функции, k — произвольная постоянная.

2°. Уравнение Лиувилля связано с линейным уравнением $\partial_{xy} u = 0$ преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2k}{\lambda} \exp\left[\frac{1}{2}\lambda(w + u)\right],$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{a}{k} \exp\left[\frac{1}{2}\lambda(w - u)\right].$$

3°. Линеаризация исходного уравнения может быть произведена также любой из двух дифференциальных подстановок:

$$w = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{2}{v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad v = v(x, y);$$
$$w = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{2}{\cos^2 z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad z = z(x, y).$$

⊙ *Литература*: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), N. H. Ibragimov (1994).

4°. Точные решения (при $a = \lambda = 1$):

$$w = \ln\left[f(x) g(y) \operatorname{ch}^{-2}\left(C_1 + C_2 \int g(y)\,dy - \frac{1}{2C_2} \int f(x)\,dx\right)\right],$$
$$w = \ln\left[f(x) g(y) \operatorname{sh}^{-2}\left(C_1 + C_2 \int g(y)\,dy + \frac{1}{2C_2} \int f(x)\,dx\right)\right],$$
$$w = \ln\left[f(x) g(y) \cos^{-2}\left(C_1 + C_2 \int g(y)\,dy + \frac{1}{2C_2} \int f(x)\,dx\right)\right],$$

где $f(x)$, $g(y)$ — произвольные функции, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: С. В. Хабиров (1990).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = e^w - e^{-2w}$.

Частный случай уравнения 3.5.2.1 при $f(w) = e^w - e^{-2w}$.

1°. Точные решения:

$$w = \ln\Big[1 - 2\frac{\partial^2(\ln\zeta_k)}{\partial x \partial y}\Big], \qquad (1)$$

где

$$\zeta_1 = 1 + A\exp\Big(kx + \frac{3}{k}y\Big),$$

$$\zeta_2 = 1 + A_1\exp\Big(k_1x + \frac{3}{k_1}y\Big) + A_2\exp\Big(k_2x + \frac{3}{k_2}y\Big) +$$

$$+ A_1A_2\frac{(k_1 - k_2)^2(k_1^2 - k_1k_2 + k_2^2)}{(k_1 + k_2)^2(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2)}\exp\Big[(k_1 + k_2)x + \Big(\frac{3}{k_1} + \frac{3}{k_2}\Big)y\Big],$$

$$\zeta_3 = 1 + A(k^2x - 3y)\exp\Big(kx + \frac{3}{k}y\Big) - \frac{A^2k^2}{12}\exp\Big(2kx + \frac{6}{k}y\Big),$$

$$\zeta_4 = \sin\Big(kx - \frac{3}{k}y\Big) + \sqrt{3}\,\Big(kx + \frac{3}{k}y\Big),$$

A, A_1, A_2, k, k_1, k_2 — произвольные постоянные.

2°. Замена $u = e^w$ приводит к *уравнению Цицейки*:

$$\frac{\partial^2(\ln u)}{\partial x \partial y} = u - \frac{1}{u^2}.$$

⦿ *Литература*: О. В. Капцов, Ю. В. Шанько (1999); в этой работе описаны также другие точные решения.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a \operatorname{sh} w$.

Уравнение sh-*Гордона.* Об этом уравнении см. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), A. Grauel (1985).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a \sin w$.

Уравнение синус-Гордона. Частный случай уравнения 3.5.2.1 при $f(w) = a\sin w$.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,y) = \begin{cases} 4\,\mathrm{arctg}\Big[\exp\Big(\sqrt{\dfrac{a}{AB}}\,(Ax + By + C)\Big)\Big] & \text{при } aAB > 0, \\ 4\,\mathrm{Arth}\Big[\exp\Big(\sqrt{-\dfrac{a}{AB}}\,(Ax + By + C)\Big)\Big] & \text{при } aAB < 0, \end{cases}$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Автомодельное решение:

$$w = U(\xi), \qquad \xi = xy,$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка $\xi U''_{\xi\xi} + U'_\xi = a\sin U$.

3°. Преобразование Беклунда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} + 2k\sin\Big(\frac{w + u}{2}\Big), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2a}{k}\sin\Big(\frac{w - u}{2}\Big) \end{aligned} \qquad (1)$$

переводит исходное уравнение в такое же уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a\sin u.$$

Формулы (1) позволяют по одному точному решению последовательно генерировать другие решения этого уравнения.

4°. Рассматриваемое уравнение связано с уравнением

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z\sqrt{a^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

преобразованием

$$z = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = a \sin w.$$

⊙ *Литература*: И. М. Крнчевер (1980), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), N. H. Ibragimov (1994).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a \sin w + b \sin\left(\frac{1}{2} w\right).$

Об этом уравнении см. Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + a \dfrac{\partial w}{\partial x} \dfrac{\partial w}{\partial y} + b \dfrac{\partial w}{\partial x} + c \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Это уравнение встречается в некоторых задачах химической технологии и хромотографии. Замена $u = e^{aw}$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

⊙ *Литература*: H. C. Thomas (1944), G. B. Whitham (1972).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{w} \sqrt{1 - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2}.$

Об этом и некоторых других интегрируемых нелинейных гиперболических уравнениях см. статью А. В. Жибера, В. В. Соколова (2001).

3.5.2. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(w).$

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = ax + by,$$

где a, b — любые, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $abw''_{zz} = f(w)$.

2°. Автомодельное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = xy,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка $\xi w''_{\xi\xi} + w'_\xi = f(w)$.

3°. Переходя к новым независимым переменным $z = x - y$, $t = x + y$, получим уравнение вида 3.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f(w).$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x) g(y) e^{\beta w}.$

Преобразование

$$\xi = \int f(x)\, dx, \quad \eta = \int g(y)\, dy$$

приводит к уравнению вида 3.5.1.2:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = e^{\beta w}.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x)g(y)h(w).$

Преобразование

$$\xi = \int f(x)\,dx, \quad \eta = \int g(y)\,dy$$

приводит к уравнению вида 3.5.2.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = h(w).$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x)g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}.$

1°. Решение в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{G(w)} = \varphi(y) + \int f(x)\,dx, \qquad \text{где} \quad G(w) = \int g(w)\,dw.$$

Здесь $\varphi(y)$ — произвольная функция.

2°. Интегрируя исходное уравнение по y, приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f(x) \int g(w)\,dw + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x, w)\dfrac{\partial w}{\partial y} + g(x, y).$

Интегрируя исходное уравнение по y, приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int_a^w f(x, \tau)\,d\tau + \int_b^y g(x, s)\,ds + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция, a и b — произвольные постоянные. Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(x)$ с параметром y.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + f(x, y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x, y)\dfrac{\partial w}{\partial y} + h(x, y).$

Замена $u = e^{aw}$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + ah(x, y)u.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2\sqrt{f(x, y)\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}}.$

Уравнение Гурса. Введем функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ по формулам (дифференциальные подстановки):

$$u = \sqrt{\frac{\partial w}{\partial x}}, \quad v = \sqrt{\frac{\partial w}{\partial y}}.$$

Дифференцируя эти соотношения соответственно по y и x и исключая w с помощью рассматриваемого уравнения, получим систему

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v\sqrt{f(x, y)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = u\sqrt{f(x, y)}.$$

Исключая v, приходим к линейному уравнению для функции $u = u(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u, \qquad \text{где} \quad g(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x, y).$$

⊙ *Литература*: Е. И. Ганжа (2000).

8. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x)g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}.$

1°. Решение в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{\sqrt{G(w)}} = \varphi(y) \pm \int \sqrt{2f(x)}\,dx, \qquad \text{где} \quad G(w) = \int g(w)\,dw.$$

Здесь $\varphi(y)$ — произвольная функция.

2°. Интегрируя исходное уравнение по y, приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 2f(x)\int g(w)\,dw + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = f(x,w)\dfrac{\partial w}{\partial y} + g(x,y).$

Интегрируя исходное уравнение по y, приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 2\int_a^w f(x,\tau)\,d\tau + 2\int_b^y g(x,s)\,ds + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция, a и b — произвольные постоянные. Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(x)$ с параметром y.

10. $f\left(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = g(x,w)\dfrac{\partial w}{\partial y} + h(x,y).$

Интегрируя исходное уравнение по y, приходим к уравнению с частными производными первого порядка

$$\int_a^{w_x} f(x,\lambda)d\lambda = \int_b^w g(x,\tau)\,d\tau + \int_c^y h(x,s)\,ds + \psi(x),$$

где w_x — частная производная от w по x; $\psi(x)$ — произвольная функция; a, b, c — произвольные постоянные. Полученное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(x)$ с параметром y.

4. Уравнения гиперболического типа с двумя пространственными переменными

4.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

4.1.1. Уравнения с квадратичной и степенной нелинейностью

► *Все уравнения, рассматриваемые в разд. 4.1.1–4.1.2, допускают точные решения типа бегущей волны* $w = w(z)$, *где* $z = k_1x + k_2y + \lambda t$.

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\alpha + \beta w)\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + \gamma w^2 + \delta w + \varepsilon.$

Точное решение:

$$w(x, y, t) = f(t) + g(t)\Theta(x, y). \qquad (1)$$

Здесь функция $\Theta(x, y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \varkappa\Theta = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где $\varkappa = \gamma/\beta$ ($\beta \neq 0$). О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*). Функции $f(t)$ и $g(t)$ в (1) находятся из автономной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} = \gamma f^2 + \delta f + \varepsilon, \qquad (2)$$

$$g''_{tt} = (\gamma f + \delta - \alpha\varkappa)g. \qquad (3)$$

Уравнение (2) не зависит от функции $g(t)$. Частные решения этого уравнения имеют вид $f = \text{const}$, где $\gamma f^2 + \delta f + \varepsilon = 0$. При $\gamma = 0$ уравнение (2) является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. При $\gamma \neq 0$ общее решение уравнения (2) можно представить в неявном виде (C_1, C_2 — произвольные постоянные)

$$\int \frac{df}{\sqrt{\frac{2}{3}\gamma f^3 + \delta f^2 + 2\varepsilon f + C_1}} = C_2 \pm t.$$

Уравнение (3) линейно относительно функции $g(t)$. Для частных решений вида $f = \text{const}$ оно является линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha w\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) - \alpha\Big[\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big] - \beta.$

1°. Уравнение допускает решения в форме

$$w(x, y, t) = f(t) + g(t)\varphi(x) + h(t)\psi(y).$$

В частности при $\varphi''_{xx} = \nu\varphi$, $\psi''_{yy} = -\nu\psi$, где ν — произвольная константа, имеем (A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные)

$$\varphi(x) = A_1 \operatorname{ch}\mu x + A_2 \operatorname{sh}\mu x, \quad \psi(y) = B_1\cos\mu y + B_2\sin\mu y \quad (\nu = \mu^2 > 0),$$

$$\varphi(x) = A_1\cos\mu x + A_2\sin\mu x, \quad \psi(y) = B_1\operatorname{ch}\mu y + B_2\operatorname{sh}\mu y \quad (\nu = -\mu^2 < 0).$$

Функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} = \alpha\nu(A_1^2 - sA_2^2)g^2 - \alpha\nu(B_1^2 + sB_2^2)h^2 - \beta,$$

$$g''_{tt} = \alpha\nu fg,$$

$$h''_{tt} = -\alpha\nu fh,$$

где $s = \operatorname{sign}\nu$.

2°. Уравнение допускает решения в форме

$$w(x,y,t) = f(t) + g(t)\varphi(x) + h(t)\psi(y) + u(t)\theta(x)\chi(y). \qquad (1)$$

При $\varphi''_{xx} = 4\nu\varphi$, $\psi''_{yy} = -4\nu\psi$, $\theta''_{xx} = \nu\theta$, $\chi''_{yy} = -\nu\chi$, где ν — произвольная константа, в формуле (1) следует положить

при $\nu = \mu^2 > 0$	при $\nu = -\mu^2 < 0$
$\varphi(x) = A_1 \operatorname{ch} 2\mu x + A_2 \operatorname{sh} 2\mu x$	$\varphi(x) = A_1 \cos 2\mu x + A_2 \sin 2\mu x$
$\psi(y) = B_1 \cos 2\mu y + B_2 \sin 2\mu y$	$\psi(y) = B_1 \operatorname{ch} 2\mu y + B_2 \operatorname{sh} 2\mu y$
$\theta(x) = C_1 \operatorname{ch} \mu x + C_2 \operatorname{sh} \mu x$	$\theta(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$
$\chi(y) = D_1 \cos \mu y + D_2 \sin \mu y$	$\chi(y) = D_1 \operatorname{ch} \mu y + D_2 \operatorname{sh} \mu y$

Функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $u(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений ($s = \operatorname{sign} \nu$)

$$\begin{aligned}
f''_{tt} &= -4\alpha\nu(A_1^2 - sA_2^2)g^2 + 4\alpha\nu(B_1^2 + sB_2^2)h^2 - \beta,\\
g''_{tt} &= -4\alpha\nu fg + \alpha\nu a_1(D_1^2 + sD_2^2)u^2,\\
h''_{tt} &= 4\alpha\nu fh - \alpha\nu a_2(C_1^2 - sC_2^2)u^2,\\
u''_{tt} &= -2\alpha\nu(a_3 g - a_4 h)u.
\end{aligned}$$

Произвольные постоянные A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 связаны двумя соотношениями

$$2A_1C_1C_2 = A_2(C_1^2 + sC_2^2), \quad 2B_1D_1D_2 = B_2(D_1^2 - sD_2^2).$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 определяются формулами

$$a_1 = \frac{C_1^2 + sC_2^2}{2A_1}, \quad a_2 = \frac{D_1^2 - sD_2^2}{2B_1}, \quad a_3 = A_2\frac{C_1^2 - sC_2^2}{C_1C_2}, \quad a_4 = B_2\frac{D_1^2 + sD_2^2}{D_1D_2},$$

при $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $C_1C_2 \neq 0$, $D_1D_2 \neq 0$.

Если $A_1 = 0$ ($A_2 \neq 0$), то следует положить $a_1 = C_1C_2/A_2$. Если $B_1 = 0$ ($B_2 \neq 0$), то $a_2 = D_1D_2/B_2$. Если $C_1 = 0$ ($C_2 \neq 0$), то $a_3 = -A_1$. Если $C_2 = 0$ ($C_1 \neq 0$), то $a_3 = A_1$. Если $D_1 = 0$ ($D_2 \neq 0$), то $a_4 = -B_1$. Если $D_2 = 0$ ($D_1 \neq 0$), то $a_4 = B_1$.

3°. Уравнение имеет точные решения вида

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t).$$

В частном случае $\varphi(t) = \psi(t) \equiv 0$ функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
f''_{tt} &= \alpha(2fh - 2f^2 - g^2), & h''_{tt} &= \alpha(2fh - 2h^2 - g^2),\\
g''_{tt} &= -2\alpha g(f + h), & \chi''_{tt} &= 2\alpha(f + h)\chi - \beta.
\end{aligned}$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(bw + c)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right].$

1°. Точное решение линейное по переменной y:

$$w = f(x,t)y + g(x,t),$$

где функции f и g определяются путем решения одномерных уравнений

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - a\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = bf^2. \qquad (2)$$

Первое уравнение является линейным однородным волновым уравнением. Уравнение (2) при известной функции $f = f(x,t)$ представляет собой линейное неоднородное волновое уравнение. Об этих уравнениях см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2°. Уравнение имеет точное решение квадратичное по переменной y:

$$w = f(x,t)y^2 + g(x,t)y + h(x,t).$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big).$

Частный случай уравнения 4.1.1.10 при $n = 1$.

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w = \frac{\lambda^2 \pm \sqrt{A(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + B}}{k_1^2 + k_2^2},$$

где A, B, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение линейное по пространственным переменным:

$$w(x,y,t) = (A_1 t + B_1)x + (A_2 t + B_2)y + \\ + \tfrac{1}{12}(A_1^2 + A_2^2)t^4 + \tfrac{1}{3}(A_1B_1 + A_2B_2)t^3 + \tfrac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2)t^2 + Ct + D.$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C, D — произвольные постоянные.

3°. Уравнение допускает решения вида

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2,$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_{tt} = 6f^2 + 2fh + g^2, \qquad (1)$$
$$g''_{tt} = 6(f+h)g, \qquad (2)$$
$$h''_{tt} = 6h^2 + 2fh + g^2. \qquad (3)$$

Частное решение системы (1)–(3) имеет вид

$$h(t) = f(t), \quad g(t) = \pm 2f(t), \quad \text{где} \quad f''_{tt} = 12f^2$$

(решение уравнения для f можно записать в неявной форме).

4°. Уравнение допускает решения вида

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f''_{tt} &= 6f^2 + 2fh + g^2, & \varphi''_{tt} &= 2(3f+h)\varphi + 2g\psi, \\ g''_{tt} &= 6(f+h)g, & \psi''_{tt} &= 2g\varphi + 2(f+3h)\psi, \\ h''_{tt} &= 6h^2 + 2fh + g^2, & \chi''_{tt} &= \varphi^2 + \psi^2 + 2(f+h)\chi. \end{aligned}$$

Первые три уравнения решаются независимо (см. п. 3°).

5°. Уравнение имеет решение в виде произведения функций разных аргументов $w(x,y,t) = (At+B)^{-2}\Theta(x,y)$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(aw+b)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(aw+b)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big].$

Замена $U = aw + b$ приводит к уравнению вида 4.1.1.4:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(U\frac{\partial U}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(U\frac{\partial U}{\partial y}\Big).$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(a_1 w+b_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(a_2 w+b_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big].$

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w = \frac{\lambda^2 - b_1k_1^2 - b_2k_2^2 \pm \sqrt{A(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + B}}{a_1k_1^2 + a_2k_2^2},$$

где A, B, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение линейное по пространственным переменным:

$$w(x,y,t) = (A_1 t + B_1)x + (A_2 t + B_2)y + \\ + \tfrac{1}{12}(a_1 A_1^2 + a_2 A_2^2)t^4 + \tfrac{1}{3}(a_1 A_1 B_1 + a_2 A_2 B_2)t^3 + \tfrac{1}{2}(a_1 B_1^2 + a_2 B_2^2)t^2 + Ct + D.$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C, D — произвольные постоянные.

3°. Уравнение допускает решения вида

$$w(x,y,t) = f(t)x^2 + g(t)xy + h(t)y^2 + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t).$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)\Big].$

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде при $n \neq -1$:

$$a(k_1^2 + k_2^2)\ln|w| - \lambda^2 w = A(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + B,$$

где A, B, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = \frac{at^2 + At + B}{(\sin y + Ce^x)^2},$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_1^2(at^2 + At + B)}{e^{2x}\,\mathrm{sh}^2(C_1 e^{-x}\sin y + C_2)},$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_1^2(-at^2 + At + B)}{e^{2x}\,\mathrm{ch}^2(C_1 e^{-x}\sin y + C_2)},$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_1^2(at^2 + At + B)}{e^{2x}\cos^2(C_1 e^{-x}\sin y + C_2)},$$

где A, B, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. А. Байков (1990), N. Ibragimov (1994, p. 225).

3°. Указанные в п. 2° точные решения являются частными случаями более общего решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = (\tfrac{1}{2}Aat^2 + Bt + C)e^{\Theta(x,y)},$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x,y)$ является решением стационарного уравнения

$$\Delta\Theta - Ae^{\Theta} = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

которое встречается в теории горения. О решении этого уравнения см. 5.2.1.1.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{1}{aw+b}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{1}{aw+b}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big).$

Замена $U = aw + b$ приводит к уравнению вида 4.1.1.7:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial y}\Big).$$

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w^n\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big).$

Частный случай уравнения 4.2.1.1 при $g(w) = bw^n$.

1°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = V(z)y^{2/n}, \quad z = x^2 - at^2,$$

где функция $V = V(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2an^2(zV''_z + V'_z) + b(n+2)V^{n+1} = 0.$$

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(x,t)y^{2/n},$$

где функция $u = u(x,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2b(n+2)}{n^2}u^{n+1}.$$

При $n = -1$ и $n = -2$ полученное уравнение является линейным.

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(x,t)y^{1/(n+1)},$$

где функция $U = U(x,t)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Замечание. Решения из пп. 2°, 3° являются частными случаями решения в виде произведения функций разных аргументов $w = u(x,t)\varphi(y)$, где $\varphi = \varphi(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $(\theta^n\theta'_y)'_y = C\theta$.

⊙ *Литература*: N. Ibragimov (1994).

10. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial y}\right).$

Частный случай уравнения 4.2.1.2 при $f(w) = w^n$.

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\frac{ak_1^2 + bk_2^2}{n+1}w^{n+1} - \lambda^2 w = C_1(k_1x + k_2y + \lambda t) + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = V(\xi), \quad \xi = (bx^2 + ay^2)t^{-2},$$

где функция $V = V(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2\xi^2 V''_{\xi\xi} + 3\xi V'_\xi = 2ab(\xi V^n V'_\xi)'_\xi.$$

Преобразование

$$Z(q) = \xi^{(n-1)/n}V'_\xi, \quad q = V\xi^{-1/n}$$

приводит к уравнению первого порядка

$$2(q - abq^{n+1})(nZ - q)Z'_q + [(n+2)q - 2abq^n(n^2Z + q)]Z = 0.$$

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = f(t)\Theta(x,y),$$

где функция $f(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f''_{tt} = f^{n+1}, \tag{1}$$

а функция $\Theta = \Theta(x,y)$ — любое решение двумерного стационарного уравнения

$$a\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta^n\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta^n\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) - \Theta = 0. \tag{2}$$

Частное решение уравнения (1) имеет вид (C — произвольная постоянная):

$$f = (C \pm kt)^{-2/n}, \quad k = \frac{n}{\sqrt{2(n+2)}}.$$

4°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = y^{2/n}u(z,t), \quad z = xy^{-1},$$

где функция $u = u(z,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a + bz^2)\left[u^n\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + nu^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{2b(n+2)}{n^2}u^n\left(u - nz\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

⊙ *Литература*: N. Ibragimov (1994).

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b\dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^k \dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

Частный случай уравнения 4.2.1.3 при $f(w) = aw^n$, $g(w) = bw^k$.

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\frac{a\beta_1^2}{n+1}w^{n+1} + \frac{b\beta_2^2}{k+1}w^{k+1} - \lambda^2 w = C_1(\beta_1 x + \beta_2 y + \lambda t) + C_2,$$

где C_1, C_2, β_1, β_2, λ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = x^{2/n} t^{2/n} U(\xi), \quad \xi = x^{-k/n} y t^{k/n-1},$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl[ak^2\xi^2 U^n + bn^2 U^k - \xi^2(n-k)^2\bigr]U''_{\xi\xi} + nk(ak\xi^2 U^{n-1} + bnU^{k-1})(U'_\xi)^2 + \\ + \bigl[(2n-k+4)(k-n) + ak(k-3n-4)U^n\bigr]\xi U'_\xi + 2(n+2)U(aU^n - 1) = 0.$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = x^{2/n} u(z,t), \quad z = x^{-k/n} y,$$

где функция $u = u(z,t)$ описывается уравнением

$$n^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \bigl(ak^2 z^2 u^n + bn^2 u^k\bigr)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + nk\bigl(akz^2 u^{n-1} + bnu^{k-1}\bigr)\Bigl(\frac{\partial u}{\partial z}\Bigr)^2 + \\ + akzu^n(k-3n-4)\frac{\partial u}{\partial z} + 2a(n+2)u^{n+1} = 0.$$

⊙ *Литература*: N. Ibragimov (1994).

4.1.2. Уравнения с экспоненциальной нелинейностью

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^w \dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

Частный случай уравнения 4.2.1.1 при $f(w) = a$, $g(w) = be^w$.

1°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = V(\xi) + 2\ln y, \quad \xi = x^2 - at^2,$$

где функция $V = V(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $2a\xi V''_{\xi\xi} + 2aV'_\xi + be^V = 0$. После однократного интегрирования имеем

$$a\xi^2(V'_\xi)^2 + 2a\xi V'_\xi + b\xi e^V = C.$$

Преобразование $\xi = e^\zeta$, $r(\zeta) = V + \zeta$ приводит к автономному уравнению первого порядка, которое легко интегрируется.

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(x,t) + 2\ln y,$$

где функция $U = U(x,t)$ описывается уравнением вида 3.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2be^U.$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(y,z), \quad z = x^2 - at^2,$$

где функция $u = u(y,z)$ описывается уравнением

$$4a\Bigl(z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}\Bigr) + b\frac{\partial}{\partial y}\Bigl(e^u\frac{\partial u}{\partial y}\Bigr) = 0.$$

⊙ *Литература*: N. Ibragimov (1994).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + b\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big).$

1°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}u(\zeta), \quad \zeta = \frac{bx^2 + ay^2}{t^2},$$

где функция $u = u(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2\zeta^2 u''_{\zeta\zeta} + 3\zeta u'_\zeta = 2abe^u\big[\zeta u''_{\zeta\zeta} + \zeta(u'_\zeta)^2 + u'_\zeta\big].$$

Преобразование $U(q) = \zeta u'_\zeta$, $q = u - \ln\zeta$ приводит к уравнению первого порядка

$$2U'_q(U-1) + U = 2abe^q\big[U'_q(U-1) + U^2\big].$$

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = f(t) + \frac{1}{\lambda}\ln U(\xi,\eta), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{b}},$$

где функция $f = f(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $f''_{tt} = e^{\lambda f}$, а функция $U = U(\xi,\eta)$ — любое решение уравнения Пуассона

$$\Delta U - \lambda = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}.$$

Об этом линейном уравнении см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{\lambda}u(z,t) + \frac{2}{\lambda}\ln y, \quad z = \frac{y}{x},$$

где функция $u = u(z,t)$ описывается уравнением

$$e^{-u}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = az^3\Big[z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + z\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial z}\Big] + b\Big[z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + z^2\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2 + 4z\frac{\partial u}{\partial z} + 2\Big].$$

4°. О других точных решениях см. уравнение 2.2.1.3 при $f(w) = ae^{\lambda w}$, $g(w) = be^{\lambda w}$.

⊙ *Литература*: N. Ibragimov (1994).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + b\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big).$

1°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi) + 2\ln(x/t), \quad \xi = x^{-\lambda}yt^{\lambda-1},$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\big[a\lambda^2\xi^2 e^U + be^{\lambda U} - (\lambda-1)^2\xi^2\big]U''_{\xi\xi} + \lambda\big(a\lambda\xi^2 e^U + be^{\lambda U}\big)(U'_\xi)^2 +$$
$$+ \xi\big[a\lambda(\lambda-3)e^U - (\lambda-1)(\lambda-2)\big]U'_\xi + 2(ae^U - 1) = 0.$$

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(z,t) + 2\ln x, \quad z = x^{-\lambda}y,$$

где функция $u = u(z,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \big(a\lambda^2 z^2 e^u + be^{\lambda u}\big)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda\big(a\lambda z^2 e^u + be^{\lambda u}\big)\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2 + a\lambda(\lambda-3)ze^u\frac{\partial u}{\partial z} + 2ae^u.$$

3°. О других точных решениях см. уравнение 4.2.1.3 при $f(w) = ae^w$, $g(w) = be^{\lambda w}$.

⊙ *Литература*: N. Ibragimov (1994).

4.2. Уравнения, содержащие произвольные функции

4.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]$.

1°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = U(\xi), \quad \xi = (x^2 - at^2)y^{-2},$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2a\xi U''_{\xi\xi} + 2aU'_\xi + 2\xi^2[g(U)U'_\xi]'_\xi + 3\xi g(U)U'_\xi = 0.$$

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(y,z), \quad z = x^2 - at^2,$$

где функция $u = u(y,z)$ описывается уравнением

$$4a\Big(z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big[g(u)\frac{\partial u}{\partial y}\Big] = 0.$$

3°. О других точных решениях см. уравнение 4.2.1.3 при $f(w) = a$.

⦿ *Литература*: N. Ibragimov (1994).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1 x + C_2, C_1 y + C_3, C_1^2 t + C_4),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta, x\sin\beta + y\cos\beta, t),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$(k_1^2 + k_2^2)\int f(w)\,dw - \lambda^2 w = C_1(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = U(\zeta), \quad \zeta = (x^2 + y^2)t^{-2},$$

где функция $U = U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2\zeta^2 U''_{\zeta\zeta} + 3\zeta U'_\zeta = 2[\zeta f(U)U'_\zeta]'_\zeta.$$

4°. «Двумерное» решение с осевой симметрией:

$$w(x,y,t) = u(r,t), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где функция $u = u(r,t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[rf(u)\frac{\partial u}{\partial r}\Big].$$

5°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(\xi,\eta), \quad \xi = xt^{-1}, \quad \eta = yt^{-1},$$

где функция $u = u(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2\xi\frac{\partial u}{\partial\xi} + 2\eta\frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi}\Big[f(u)\frac{\partial u}{\partial\xi}\Big] + \frac{\partial}{\partial\eta}\Big[f(u)\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big].$$

6°. О других точных решениях см. уравнение 4.2.1.3 при $f(w) = g(w)$.

⦿ *Литература*: N. Ibragimov (1994).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right].$

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \left[k_1^2 f(w) + k_2^2 g(w)\right] dw - \lambda^2 w = C_1(k_1 x + k_2 y + \lambda t) + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

2°. «Двумерное» решение (a, b — произвольные постоянные):

$$w(x,y,t) = u(z,t), \quad z = ax + by,$$

где функция $u = u(z,t)$ описывается уравнением вида 3.4.4.4:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right], \quad \varphi(u) = a^2 f(u) + b^2 g(u).$$

3°. «Двумерное» решение (a, b — произвольные постоянные):

$$w(x,y,t) = v(x,\xi), \quad \xi = ay + bt,$$

где функция $v = v(x,\xi)$ описывается уравнением вида 5.4.4.8:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\psi(v)\frac{\partial v}{\partial z}\right] = 0, \quad \psi(v) = a^2 g(v) - b^2.$$

4°. Существуют более общие «двумерные» решения вида

$$w(x,y,t) = U(z_1,z_2), \quad z_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t, \quad z_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 t.$$

5°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = V(\xi,\eta), \quad \xi = xt^{-1}, \quad \eta = yt^{-1},$$

где функция $V = V(\xi,\eta)$ описывается уравнением

$$\xi^2\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + 2\xi\eta\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\partial\eta} + \eta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2} + 2\xi\frac{\partial V}{\partial\xi} + 2\eta\frac{\partial V}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[f(V)\frac{\partial V}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[g(V)\frac{\partial V}{\partial\eta}\right].$$

6°. О результатах группового анализа данного уравнения см. N. Ibragimov (1994).

4.2.2. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left[aw + f(t)\right]\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + bw^2 + g(t)w + h(t), \qquad a \neq 0.$

Точное решение:

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)\Theta(x,y),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = b\varphi^2 + g(t)\varphi + h(t),$$
$$\psi'_{tt} = \left[b\varphi - \beta f(t) + g(t)\right]\psi, \qquad \beta = b/a,$$

а функция $\Theta = \Theta(x,y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Theta + \beta\Theta = 0, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - a\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] + f(t).$

1°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)e^{\beta x+\gamma y},$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = f(t), \qquad \psi''_{tt} = a(\beta^2+\gamma^2)\varphi\psi.$$

Решение первого уравнения дается формулой (C_1, C_2 — произвольные постоянные)

$$\varphi(t) = \int_0^t (t-\tau)f(\tau)\,d\tau + C_1 t + C_2.$$

Решение второго уравнения, которое линейно относительно ψ, для многих функций $f(t)$ можно найти в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

2°. Уравнение допускает точные решения следующего вида:

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)(A_1\operatorname{ch}\mu x + A_2\operatorname{sh}\mu x) + \chi(t)(B_1\cos\mu y + B_2\sin\mu y),$$
$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)(A_1\cos\mu x + A_2\sin\mu x) + \chi(t)(B_1\operatorname{ch}\mu y + B_2\operatorname{sh}\mu y),$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, μ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ определяются путем решения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (здесь не приводятся).

3°. Уравнение допускает также точные решения вида

$$w(x,y,t) = \varphi(t) + \psi(t)F(x) + \chi(t)G(y) + \eta(t)H(x)P(y),$$

где

$$F(x) = A_1\cos 2\mu x + A_2\sin 2\mu x, \qquad G(y) = B_1\operatorname{ch}2\mu y + B_2\operatorname{sh}2\mu y,$$
$$H(x) = C_1\cos\mu x + C_2\sin\mu x, \qquad P(y) = D_1\operatorname{ch}\mu y + D_2\operatorname{sh}\mu y.$$

Произвольные постоянные A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, μ связаны двумя соотношениями, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, $\eta(t)$ удовлетворяют системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (здесь не приводятся).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[f_2(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + aw\ln w + [g(t) + h_1(x) + h_2(y)]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(x)\psi(y)\chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$, $\chi = \chi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C_1, C_2 — произвольные постоянные)

$$[f_1(x)\varphi'_x]'_x + a\varphi\ln\varphi + [h_1(x) + C_1]\varphi = 0,$$
$$[f_2(y)\psi'_y]'_y + a\psi\ln\psi + [h_2(y) + C_2]\psi = 0,$$
$$\chi''_{tt} - a\chi\ln\chi - [g(t) - C_1 - C_2]\chi = 0.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + kw\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(t)\Theta(x,y),$$

где функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (A — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{tt} - k\varphi\ln\varphi - A\varphi = 0, \qquad (1)$$

а функция $\Theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right] + k\Theta\ln\Theta + A\Theta = 0.$$

Частное решение уравнения (1) дается формулой (B — произвольная постоянная)

$$\varphi(t) = \exp\left[\frac{k}{4}(t+B)^2 + \frac{k-2A}{2k}\right],$$

а общее решение можно записать в неявном виде (B, C — произвольные постоянные)

$$\int \left[k\varphi^2 \ln\varphi + (A - \tfrac{1}{2}k)\varphi^2 + B\right]^{-1/2} d\varphi = C \pm t.$$

5. $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f_1(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_2(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f_3(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g_1(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g_2(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} + \left[h(x,y) + s(t)\right]w + kw\ln w.$$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,t) = \varphi(t)\Theta(x,y),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{tt} - k\varphi\ln\varphi - \left[s(t) + C\right]\varphi = 0,$$

а функция $\Theta = \Theta(x,y)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$f_1(x,y)\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + f_2(x,y)\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} + f_3(x,y)\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + g_1(x,y)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + g_2(x,y)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \left[h(x,y) + C\right]\Theta + k\Theta\ln\Theta = 0.$$

5. Уравнения эллиптического типа с двумя независимыми переменными

5.1. Уравнения со степенными нелинейностями

5.1.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x,y,w)$

1. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=kw^n.$

Уравнение теории массопереноса с объемной реакцией n-го порядка в плоском случае. Это уравнение встречается также в теории горения и является частным случаем уравнения 5.4.1.1 при $f(w)=kw^n$.

1°. Точные решения:

$$w(x,y)=(Ax+By+C)^{\frac{2}{1-n}},\quad B=\pm\sqrt{\frac{k(n-1)^2}{2(n+1)}-A^2};$$

$$w(x,y)=s\bigl[(x+C_1)^2+(y+C_2)^2\bigr]^{\frac{1}{1-n}},\quad s=\bigl[\tfrac{1}{4}k(1-n)^2\bigr]^{\frac{1}{1-n}},$$

где A, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By+C,$$

где зависимость $w(\xi)$ задается неявно с помощью формулы

$$\int\left[D+\frac{2kw^{n+1}}{(n+1)(A^2+B^2)}\right]^{-1/2}dw=\xi,$$

A, B, C, D — произвольные постоянные ($n\neq-1$).

3°. Точное решение:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\sqrt{(x+C_1)^2+(y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{1}{\xi}w'_{\xi}=kw^n.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w(x,y)=x^{\frac{2}{1-n}}u(\xi),\qquad \xi=\frac{y}{x},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(1+\xi^2)u''_{\xi\xi}-\frac{2(1+n)}{1-n}\xi u'_{\xi}+\frac{2(1+n)}{(1-n)^2}u-ku^n=0.$$

5°. Точное решение:

$$w(x,y)=r^{\frac{2}{1-n}}U(\theta),\qquad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

где x_0 и y_0 — произвольные постоянные, а функция $U=U(\theta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{\theta\theta}+\frac{4}{(1-n)^2}U=kU^n,$$

решение которого можно представить в неявном виде.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw + bw^n + cw^{2n-1}.$

Частный случай уравнения 5.4.1.1 при $f(w) = aw + bw^n + cw^{2n-1}$. Замена $u = w^{1-n}$ приводит к уравнению вида 5.1.4.7:

$$u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{n}{1-n}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] = a(1-n)u^2 + b(1-n)u + c(1-n).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a(x^2 + y^2)w^n.$

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w) = aw^n$. Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \zeta = xy$$

приводит к более простому уравнению вида 5.1.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = aw^n.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c(ax + by)^k w^n.$

Частный случай уравнения 5.4.1.10 при $f(z, w) = cz^k w^n$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a(x^2 + y^2)(xy)^k w^n.$

Частный случай уравнения 5.4.1.12 при $f(z, w) = az^k w^n$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\beta x} w^n.$

Частный случай уравнения 5.4.1.4 при $f(w) = aw^n$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ke^{ax - by} w^n.$

Частный случай уравнения 5.4.1.5 при $f(w) = kw^n$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k(w + A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{22}y^2 + B_1 x + B_2 y)^n.$

Частный случай уравнения 5.4.1.14 при $f(u) = ku^n$.

5.1.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f\left(x, y, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\right)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{a}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{b}{y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = cw^n.$

Частный случай уравнения 5.4.2.2 при $f(\xi, w) = cw^n$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = b\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + cw + sx^n.$

Частный случай уравнения 5.4.2.4 при $f(x) = b$, $g(x) = c$, $h(x) = sx^n$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \beta x^n y^2 + \gamma x^m y + \mu x^k.$

Частный случай уравнения 5.4.2.6 при $a = b = 1$, $f(x) = \alpha$, $g(x) = h_1(x) = h_0(x) = p(x) = 0$, $q_2(x) = \beta x^n$, $q_1(x) = \gamma x^m$, $q_0(x) = \mu x^k$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + bcw^2 + kw + s.$

Пусть A — корень квадратного уравнения $bcA^2 + kA + s = 0$.

1°. Если выполнено неравенство $2Abc + k + ab = \sigma^2 > 0$, то точные решения имеют вид

$$w(x,y) = A + \left[C_1 \exp(\sigma x) + C_2 \exp(-\sigma x)\right] \exp\left(\pm y\sqrt{-b}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Если выполнено неравенство $2Abc + k + ab = -\sigma^2 < 0$, то точные решения имеют вид

$$w(x,y) = A + \left[C_1 \cos(\sigma x) + C_2 \sin(\sigma x)\right] \exp\left(\pm y\sqrt{-b}\right).$$

3°. О более сложных решениях см. уравнение 5.4.2.5 при $f(x) = c$, $g(x) = k$, $h(x) = s$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cx^n\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + bcx^n w^2 + kx^m w + sx^l.$

Частный случай уравнения 5.4.2.5 при $f(x) = cx^n$, $g(x) = kx^m$, $h(x) = sx^l$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ce^{\beta x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + bce^{\beta x} w^2 + ke^{\mu x} w + se^{\nu x}.$

Частный случай уравнения 5.4.2.5 при $f(x) = ce^{\beta x}$, $g(x) = ke^{\mu x}$, $h(x) = se^{\nu x}$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw^n\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right].$

Частный случай уравнения 5.4.2.7 при $f(w) = aw^n$. Замена

$$U = \int \exp\left(-\frac{a}{n+1} w^{n+1}\right) dw$$

приводит к двумерному уравнению Лапласа для функции $U = U(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^n + \beta\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^m + kw.$

Частный случай уравнения 5.4.2.8 при $a = b = 1$, $f(x) = \alpha$, $g(y) = \beta$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (a_1 x + b_1 y + c_1)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k + (a_2 x + b_2 y + c_2)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^k.$

Частный случай уравнения 5.4.2.10 при $f(w,u,v) = 0$.

5.1.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f_1 \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(f_2 \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = g(w)$

Уравнения этого вида встречаются в стационарных задачах тепло- и массопереноса и теории горения. Здесь f_1 и f_2 — главные коэффициенты температуропроводности (они могут зависеть от пространственных координат x, y или от искомой величины w), $g = g(w)$ — функция источника, которая задает закон тепловыделения или теплопоглощения. В данном разделе не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной пространственной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(\alpha w+\beta)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=0.$

Стационарное уравнение Хохлова–Заболоцкой (при $\alpha=1$, $\beta=0$). Встречается в акустике, нелинейной механике и теории тепло- и массопереноса. Частный случай уравнения 5.4.4.8 при $f(w)=1$, $g(w)=\alpha w+\beta$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=\frac{C_1^2}{C_2^2}w(C_1x+C_3,C_2y+C_4)+\frac{\beta}{\alpha}\Big(\frac{C_1^2}{C_2^2}-1\Big),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,y)&=Ay-\tfrac12A^2\alpha x^2+C_1x+C_2,\\
w(x,y)&=(Ax+B)y-\frac{\alpha}{12A^2}(Ax+B)^4+C_1x+C_2,\\
w(x,y)&=-\frac{1}{\alpha}\Big(\frac{y+A}{x+B}\Big)^2+\frac{C_1}{x+B}+C_2(x+B)^2-\frac{\beta}{\alpha},\\
w(x,y)&=-\frac{1}{\alpha}\big[\beta+\lambda^2\pm\sqrt{A(y+\lambda x)+B}\,\big],\\
w(x,y)&=(Ax+B)\sqrt{C_1y+C_2}-\frac{\beta}{\alpha},
\end{aligned}$$

где A, B, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Первые два решения линейны по переменной y, третье решение квадратично по y, четвертое решение является решением типа бегущей волны.

3°. Точное решение квадратичное по переменной y (обобщает третье решение из п. 2°):

$$w(x,y)=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x),$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(x)$, $\chi=\chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{xx}+6\alpha\varphi^2=0, \tag{1}$$
$$\psi''_{xx}+6\alpha\varphi\psi=0, \tag{2}$$
$$\chi''_{xx}+2\alpha\varphi\chi=-2\beta\varphi-\alpha\psi^2. \tag{3}$$

Нелинейное автономное уравнение (1) рассматривается независимо от других уравнений; его решение можно выразить с помощью эллиптических интегралов. Уравнения (2) и (3) решаются последовательно (они являются линейными уравнениями относительно искомых функций).

Пятипараметрическое семейство решений системы (1)–(3) имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi(x)&=-\frac{1}{\alpha(x+A)^2},\\
\psi(x)&=\frac{B_1}{(x+A)^2}+B_2(x+A)^3,\\
\chi(x)&=\frac{C_1}{x+A}+C_2(x+A)^2-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha B_1^2}{4(x+A)^2}-\frac12\alpha B_1B_2(x+A)^3-\frac{1}{54}\alpha B_2^2(x+A)^8,
\end{aligned}$$

где A, B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Точное решение в параметрической форме:

$$\begin{aligned}
x&=C_1wt+C_2w+C_3t+C_4,\\
y&=\tfrac12C_1t^2+C_2t-\tfrac13\alpha C_1w^3-\tfrac12(\alpha C_3+\beta C_1)w^2-\beta C_3w+C_5.
\end{aligned}$$

5°. Точное решение в параметрической форме:

$$\begin{aligned}
x&=C_1t^2+C_2wt+C_3t+C_4w-C_1\big(\tfrac13\alpha w^3+\beta w^2\big)+C_5,\\
y&=\tfrac12C_2t^2+C_4t-C_1t\big(\alpha w^2+2\beta w\big)-\tfrac13\alpha C_2w^3-\tfrac12(\alpha C_3+\beta C_2)w^2-\beta C_3w+C_6.
\end{aligned}$$

6°. Автомодельное решение (A, B — произвольные постоянные):

$$w = w(\zeta), \quad \zeta = \frac{x+A}{y+B}$$

где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\zeta\zeta} + [\zeta^2(\alpha w + \beta)w'_\zeta]'_\zeta = 0.$$

После однократного интегрирования, приняв w за независимую переменную, для функции $\zeta = \zeta(w)$ получим уравнение Риккати (C — произвольная постоянная):

$$C\zeta'_w = (\alpha w + \beta)\zeta^2 + 1,$$

общее решение которого можно выразить через функции Бесселя [см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *a*, стр. 52)].

7°. Точное решение (обобщает последнее решение из п. 2°):

$$w(x,y) = \frac{1}{\alpha}f(x)g(y) - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Функции $f(x)$ и $g(y)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями (A — произвольная постоянная)

$$f''_{xx} = Af^2, \qquad (gg'_y)'_y = -Ag, \tag{4}$$

которые независимы друг от друга. В результате интегрирования получим решения уравнений (4) в неявном виде

$$C_1 \pm x = \int \left(\tfrac{2}{3}Af^3 + B_1\right)^{-1/2} df,$$

$$C_2 \pm y = \int g\left(-\tfrac{2}{3}Ag^3 + B_2\right)^{-1/2} dg,$$

где B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8°. Точное решение (A, B, k — произвольные постоянные):

$$w = \frac{1}{\alpha}(x+A)^{2k}F(z) - \frac{\beta}{\alpha}, \quad z = \frac{y+B}{(x+A)^{k+1}},$$

где функция $F = F(z)$ определяется путем решения обобщенно-однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$2k(2k-1)F - (k+1)(3k-2)zF'_z + (k+1)^2z^2F''_{zz} + (FF'_z)'_z = 0,$$

которое допускает понижение порядка.

9°. Точное решение (A, λ — произвольные постоянные):

$$w = \frac{1}{\alpha}e^{-2\lambda x}\Phi(u) - \frac{\beta}{\alpha}, \quad u = (y+A)e^{\lambda x},$$

где функция $\Phi = \Phi(u)$ определяется путем решения обобщенно-однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$4\lambda^2\Phi - 3\lambda^2 u\Phi'_u + \lambda^2u^2\Phi''_{uu} + (\Phi\Phi'_u)'_u = 0,$$

которое допускает понижение порядка.

10°. Точное решение (A, B, C — произвольные постоянные):

$$w = \frac{1}{\alpha}(\pm x + A)^{-2}\Psi(\xi) - \frac{\beta}{\alpha}, \quad \xi = y + B\ln(\pm x + A) + C,$$

где функция $\Psi = \Psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$6\Psi - 5B\Psi'_\xi + B^2\Psi''_{\xi\xi} + (\Psi\Psi'_\xi)'_\xi = 0,$$

которое допускает понижение порядка.

11°. Исходное уравнение можно представить в виде системы уравнений
$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad -(\alpha w+\beta)\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$
Преобразование годографа $x=x(w,v)$, $y=y(w,v)$ (w, v принимаются за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные) приводит ее к линейной системе
$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial w},\quad -(\alpha w+\beta)\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial w}.$$
Исключая отсюда y, для функции $x=x(w,v)$ получим линейное уравнение
$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}+(\alpha w+\beta)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=0.$$

12°. Пусть $w(x,y)$ — любое решение уравнения Хохлова — Заболоцкой (при $\alpha=1$, $\beta=0$). Тогда обыкновенное дифференциальное уравнение
$$u''_{tt}=F(t,u),\qquad F(t,u)=\frac{1}{9\varphi}\Big(\frac{\partial v}{\partial u}+3\varphi''_{tt}u+3\psi'_t\Big),$$
где
$$v=-\varphi^{1/3}w(x,y)-\varphi^{-1}(\varphi'_t u+\psi)^2,\quad x=\frac{1}{3}\int\varphi^{-2/3}\,dt,\quad y=\varphi^{-1/3}u-\frac{1}{3}\int\varphi^{-4/3}\psi\,dt,$$
$\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$ — произвольные функции, имеет кубический по производной u'_t первый интеграл.

⦿ *Литература к уравнению 5.1.3.1*: Y. Kodama, J. Gibbons (1989), В. В. Козлов (1995, стр. 379–381), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *b*).

2. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{\alpha w+\beta}\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=0.$$

1°. Точные решения:
$$w(x,y)=\frac{-A^2x^2+Bx+C}{\alpha(Ay+D)^2}-\frac{\beta}{\alpha},$$
$$w(x,y)=\frac{p^2}{A\alpha}\frac{Ax^2+Bx+C}{\operatorname{ch}^2(py+q)}-\frac{\beta}{\alpha},$$
$$w(x,y)=-\frac{p^2}{A\alpha}\frac{Ax^2+Bx+C}{\operatorname{sh}^2(py+q)}-\frac{\beta}{\alpha},$$
$$w(x,y)=-\frac{p^2}{A\alpha}\frac{Ax^2+Bx+C}{\cos^2(py+q)}-\frac{\beta}{\alpha},$$
где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в параметрической форме:
$$x=C_1wt+C_2w+C_3t+C_4,$$
$$y=\frac{1}{2}C_1t^2+C_2t-\frac{C_1}{\alpha}w-\frac{1}{\alpha^2}(\alpha C_3-\beta C_1)\ln|\alpha w+\beta|+C_5,$$
где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

3°. О других точных решениях см. уравнение 5.4.4.8 при $f(w)=1$, $g(w)=(\alpha w+\beta)^{-1}$.

4°. Замена $\alpha w+\beta=e^U$ приводит к уравнению вида 5.2.2.1 (в котором сделаны переобозначения координат $x\rightleftarrows y$):
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^U\frac{\partial U}{\partial x}\Big)+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0.$$

3. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{w+\beta}}\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=0.$$

Замена $U=\frac{1}{\alpha}\sqrt{w+\beta}$ приводит к уравнению
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(U\frac{\partial U}{\partial x}\Big)+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0.$$
С точностью до переобозначений координат ($x\rightleftarrows y$) и искомой функции это уравнение совпадает с частным случаем 5.1.3.1.

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(a_1x+b_1y+c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(a_2x+b_2y+c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=kw^n.$

Частный случай уравнения 5.4.4.2 при $f(w)=kw^n$.

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(\alpha_1w+\beta_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(\alpha_2w+\beta_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=\gamma.$

1°. Решение типа бегущей волны линейное по пространственным переменным:

$$w(x,y)=Ax\pm\sqrt{\frac{\gamma-A^2\alpha_1}{\alpha_2}}\,y+B,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$(A^2\alpha_1+B^2\alpha_2)w^2+2(A^2\beta_1+B^2\beta_2)w=\gamma(Ax+By)^2+C_1(Ax+By)+C_2,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. О других решениях уравнения при $\gamma=0$ см. 5.4.4.8 при $f(w)=\alpha_1w+\beta_1$, $g(w)=\alpha_2w+\beta_2$.

6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(a_1x+b_1y+c_1w+k_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(a_2x+b_2y+c_2w+k_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=0.$

Частный случай уравнения 5.4.4.9 при $f(w)=c_1w+k_1$, $g(w)=c_2w+k_2$.

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=cw^k.$

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w)=cw^k$.

1°. Точное решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\big[b(2-m)^2x^{2-n}+a(2-n)^2y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}w'_\xi=Bw^k, \tag{1}$$

где

$$A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)},\qquad B=\frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

2°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

2.1. Уравнение (1) при $k\neq 1$ допускает точное решение вида

$$w=\left[\frac{2(1+k+A-Ak)}{B(1-k)^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}\xi^{\frac{2}{1-k}}.$$

2.2. При $m=4/n$ из (1) получаем точное решение в неявной форме

$$\int\left[C_1+\frac{2cn^2w^{k+1}}{ab(k+1)(2-n)^4}\right]^{-1/2}dw=C_2\pm\xi,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2.3. Замена $\zeta=\xi^{1-A}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta}=\frac{B}{(1-A)^2}\zeta^{\frac{2A}{1-A}}w^k. \tag{2}$$

Более 20 точных решений уравнения (2) для различных значений параметра k приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=cw^m.$

Частный случай уравнения 5.4.3.8 при $f(w)=cw^m$.

9. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=cw^m.$

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w)=cw^m$.

1°. Точное решение при $\beta\mu\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\left(b\mu^2e^{-\beta x}+a\beta^2e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}-\frac{1}{\xi}w'_\xi=Aw^m,\qquad A=\frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}. \tag{1}$$

2°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

2.1. Уравнение (1) допускает точное решение вида

$$w=\left[\frac{abm\beta^2\mu^2}{c(1-m)^2}\right]^{\frac{1}{m-1}}\xi^{\frac{2}{1-m}}.$$

2.2. Замена $\zeta=\xi^2$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta}=\tfrac14 A\zeta^{-1}w^m,$$

решения которого при $m=-1$ и $m=-2$ приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

10. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(w^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=\alpha w^n.$

1°. При $m\neq -1$ замена $U=w^{m+1}$ приводит к уравнению вида 5.1.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\alpha(m+1)U^{\frac{n}{m+1}}.$$

2°. При $m=-1$ замена $w=e^V$ приводит к уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\alpha e^{nV}.$$

11. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(aw^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(bw^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=0.$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=f(x)g(y). \tag{1}$$

Функции $f(x)$ и $g(y)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями (A — произвольная постоянная)

$$(f^nf'_x)'_x=Abf^{m+1},\qquad (g^mg'_y)'_y=-Aag^{n+1}, \tag{2}$$

которые независимы друг от друга. В результате интегрирования получим решения уравнений (2) в неявном виде

$$\int f^n\left(\frac{2Ab}{n+m+2}f^{n+m+2}+B_1\right)^{-1/2}df=C_1\pm x,$$

$$\int g^m\left(-\frac{2Aa}{n+m+2}g^{n+m+2}+B_2\right)^{-1/2}dg=C_2\pm y,$$

где B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $n+m+2\neq 0$.

2°. О других точных решениях исходного уравнения см. 5.4.4.8 при $f(w)=aw^n$, $g(w)=bw^m$.

12. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(a_1x+b_1y+c_1w^n)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(a_2x+b_2y+c_2w^k)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=0.$

Частный случай уравнения 5.4.4.9 при $f(w)=c_1w^n$, $g(w)=c_2w^k$.

5.1.4. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = by^n w^5.$

Частный случай уравнения 5.4.5.1 при $f(y) = by^n$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = be^{\beta y} w^5.$

Частный случай уравнения 5.4.5.1 при $f(y) = be^{\beta y}$.

3. $ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cw^k.$

Частный случай уравнения 5.4.5.3 при $k = s = 0$, $f(w) = cw^k$.

1°. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \left[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi} w'_{\xi} = Bw^k, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{3nm - 4n - 4m + 4}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

2°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

2.1. Уравнение (1) при $k \neq 1$ допускает точное решение вида

$$w = \left[\frac{2(1+k+A-Ak)}{B(1-k)^2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \xi^{\frac{2}{1-k}}.$$

2.2. При $m = \dfrac{4n-4}{3n-4}$ из (1) получаем точное решение в неявной форме

$$\int \left[C_1 + \frac{2c(3n-4)^2 w^{k+1}}{ab(k+1)(2-n)^4}\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm \xi,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2.3. Замена $\zeta = \xi^{1-A}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta} = \frac{B}{(1-A)^2} \zeta^{\frac{2A}{1-A}} w^k. \tag{2}$$

Более 20 точных решений уравнения (2) для различных значений параметра k приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

4. $ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta y} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cw^m.$

Частный случай уравнения 5.4.5.7 при $k = s = 0$, $f(w) = cw^m$.

5. $ae^{\beta x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cw^m.$

Частный случай уравнения 5.4.5.5 при $k = s = 0$, $f(w) = cw^m$.

1°. Точное решение при $\beta\mu \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{3}{\xi} w'_{\xi} = Aw^m, \qquad A = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}. \tag{1}$$

2°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

2.1. Уравнение (1) допускает точное решение вида

$$w(\xi) = \left[\frac{ab(2-m)\beta^2\mu^2}{c(1-m)^2}\right]^{\frac{1}{m-1}} \xi^{\frac{2}{1-m}}.$$

2.2. Замена $\zeta = \xi^{-2}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta} = \tfrac{1}{4}A\zeta^{-3}w^m,$$

решение которого при $m = 3$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*).

6. $\displaystyle w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \alpha w^\beta.$

Замена $w = e^U$ приводит к уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \alpha e^{(\beta-2)U}.$$

7. $\displaystyle w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \sigma\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] = \alpha w^2 + \beta w + \gamma.$

1°. Решения типа бегущей волны при $\alpha(1+\sigma) > 0$:

$$w(x,y) = A_1 + B_1 \operatorname{ch} z, \quad z = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\sigma}}\,\frac{k_1x + k_2y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + C,$$

$$A_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{1+\sigma}{1+2\sigma}, \quad B_1 = \pm\sqrt{\frac{\beta^2(1+\sigma)^2}{\alpha^2(1+2\sigma)^2} - \frac{\gamma(1+\sigma)}{\alpha\sigma}};$$

$$w(x,y) = A_2 + B_2 \operatorname{sh} z, \quad z = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\sigma}}\,\frac{k_1x + k_2y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + C,$$

$$A_2 = -\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{1+\sigma}{1+2\sigma}, \quad B_2 = \pm\sqrt{\frac{\gamma(1+\sigma)}{\alpha\sigma} - \frac{\beta^2(1+\sigma)^2}{\alpha^2(1+2\sigma)^2}},$$

где k_1, k_2, C — произвольные постоянные.

2°. Решения типа бегущей волны при $\alpha(1+\sigma) < 0$:

$$w(x,y) = A + B\cos z, \quad z = \sqrt{-\frac{\alpha}{1+\sigma}}\,\frac{k_1x + k_2y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + C,$$

$$A = -\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{1+\sigma}{1+2\sigma}, \quad B = \pm\sqrt{\frac{\beta^2(1+\sigma)^2}{\alpha^2(1+2\sigma)^2} - \frac{\gamma(1+\sigma)}{\alpha\sigma}},$$

где k_1, k_2, C — произвольные постоянные.

3°. Точное решение (C_1, C_2 — произвольные постоянные):

$$w = w(r), \qquad r = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ww''_{rr} + \frac{1}{r}ww'_r + \sigma(w'_r)^2 = \alpha w^2 + \beta w + \gamma.$$

4°. При $\gamma = 0$ помимо решений, приведенных в пп. 1°–3°, можно указать другие точные решения. Для этого в исходном уравнении следует сделать замену $w = u^2$. В результате имеем

$$u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (1+2\sigma)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2}\alpha u^2 + \tfrac{1}{2}\beta.$$

Это уравнение является частным случаем рассматриваемого уравнения. Поэтому его решения можно получить с помощью приведенных в пп. 1°, 2° формул, в которых следует переобозначить $w \to u$, $\sigma \to 1+2\sigma$, $\alpha \to \frac{1}{2}\alpha$, $\beta \to 0$, $\gamma \to \frac{1}{2}\beta$.

5°. Точные решения при $\alpha = 0$:

$$w(x,y) = \frac{\beta}{2(1+2\sigma)}\left(\frac{k_1 x + k_2 y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + C\right)^2 - \frac{\gamma(1+2\sigma)}{2\beta\sigma},$$

$$w(x,y) = \frac{\beta}{4(1+\sigma)}\left[(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2\right] - \frac{\gamma(1+\sigma)}{\beta\sigma},$$

где k_1, k_2, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{a}{y}\dfrac{\partial w}{\partial y} + b\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$

Это уравнение при $b < 0$ описывает трансзвуковое течение газа.

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y)x^{3/2} + \varphi_3(y)x^3,$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_1'' + \frac{a}{y}\varphi_1' + \frac{9}{8}b\varphi_2^2 = 0,$$

$$\varphi_2'' + \frac{a}{y}\varphi_2' + \frac{45}{4}b\varphi_2\varphi_3 = 0,$$

$$\varphi_3'' + \frac{a}{y}\varphi_3' + 18b\varphi_3^2 = 0,$$

где штрихи обозначают производные по y.

2°. Точное решение в виде полинома третьей степени по x:

$$w(x,y) = \psi_1(y) + \psi_2(y)x + \psi_3(y)x^2 + \psi_4(y)x^3,$$

где функции $\psi_k = \psi_k(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_1'' + \frac{a}{y}\psi_1' + 2b\psi_2\psi_3 = 0,$$

$$\psi_2'' + \frac{a}{y}\psi_2' + 2b(2\psi_3^2 + 3\psi_2\psi_4) = 0,$$

$$\psi_3'' + \frac{a}{y}\psi_3' + 18b\psi_3\psi_4 = 0,$$

$$\psi_4'' + \frac{a}{y}\psi_4' + 18b\psi_4^2 = 0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,y) = \xi(y) + \eta(y)\theta(x).$$

Здесь функции $\zeta_k = \zeta_k(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\eta_{yy}'' + \frac{a}{y}\eta_y' + bC_1\eta^2 = 0,$$

$$\xi_{yy}'' + \frac{a}{y}\xi_y' + bC_2\eta^2 = 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет автономному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\theta_x'\theta_{xx}'' = C_1\theta + C_2.$$

Его решение можно представить в неявной форме

$$\int\left(\tfrac{3}{2}C_1\theta^2 + 3C_2\theta + C_3\right)^{-1/3} d\theta = x + C_4,$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: С. С. Титов (1988), S. R. Svirshchevskii (1995).

5.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями

5.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x,y,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\alpha e^{\beta w}$.

Это уравнение встречается в теории горения и является частным случаем уравнения 5.4.1.1 при $f(w)=\alpha e^{\beta w}$.

1°. Точные решения:

$$
\begin{aligned}
w(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2(A^2+B^2)}{\alpha\beta(Ax+By+C)^2}\Big] && \text{при}\ \ \alpha\beta>0,\\
w(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2(A^2+B^2)}{\alpha\beta\cos^2(Ax+By+C)}\Big] && \text{при}\ \ \alpha\beta>0,\\
w(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2(A^2+B^2)}{\alpha\beta\,\mathrm{sh}^2(Ax+By+C)}\Big] && \text{при}\ \ \alpha\beta>0,\\
w(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{-2(A^2+B^2)}{\alpha\beta\,\mathrm{ch}^2(Ax+By+C)}\Big] && \text{при}\ \ \alpha\beta<0,\\
w(x,y) &= \frac{1}{\beta}\ln\Big(-\frac{8C}{\alpha\beta}\Big)-\frac{2}{\beta}\ln\big[(x+A)^2+(y+B)^2+C\big],
\end{aligned}
$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

Пример. При $\alpha=\beta=1$ краевая задача в круге $r=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1$ с граничным условием $w|_{r=1}=0$ имеет два решения

$$u(r)=\ln(8k)-\ln(1-kr^2)^2,\quad k=5\mp 2\sqrt{6}.$$

Первое их них ограничено внутри круга $r\leqslant 1$, а второе — имеет сингулярную особенность на окружности $r=1/\sqrt{k}$.

⊙ *Литература*: Д. А. Франк-Каменецкий (1987), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

2°. Точное решение при $\alpha=-1$, $\beta=1$:

$$w(x,y)=\ln\frac{2k^2(1-m^2)}{[\mathrm{ch}(kx+C_1)+m\sin(ky+C_2)]^2},$$

где C_1, C_2, k, m — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: С. Н. Аристов (1999).

3°. Общее решение:

$$w(x,y)=-\frac{2}{\beta}\ln\frac{\sqrt{|a|\beta^2}\,\big[1+\operatorname{sign}(a\beta)\Phi(z)\overline{\Phi(z)}\,\big]}{4|\Phi'_z(z)|},$$

где $\Phi=\Phi(z)$ — произвольная аналитическая (голоморфная) функция комплексного переменного $z=x+iy$ с отличной от нуля производной, чертой обозначена комплексно-сопряженная величина.

⊙ *Литература*: И. Н. Векуа (1960), И. Х. Сабитов (2001).

4°. Исходное уравнение связано с линейным уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\beta\frac{\partial w}{\partial y}=\big(\tfrac{1}{2}\alpha\beta\big)^{1/2}\exp\big(\tfrac{1}{2}\beta w\big)\sin U, \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}-\tfrac{1}{2}\beta\frac{\partial w}{\partial x}=\big(\tfrac{1}{2}\alpha\beta\big)^{1/2}\exp\big(\tfrac{1}{2}\beta w\big)\cos U. \tag{3}$$

Пусть имеется (частное) решение $U=U(x,y)$ уравнения Лапласа (1). Тогда (2) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно

$w = w(y)$ с параметром x. Оно приводится к линейному уравнению с помощью замены $z = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta w\right)$. В результате получим

$$w = -\frac{2}{\beta}F - \frac{2}{\beta}\ln\left[\Psi(x) - k\int e^{-F}\sin U\,dy\right], \qquad F = \int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)dy;$$

при интегрировании x считается параметром, $k = \left(\frac{1}{2}\alpha\beta\right)^{1/2}$. Функция $\Psi(x)$ определяется после подстановки этого выражения в уравнение (3).

⦿ *Литература*: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\beta w} - be^{-\beta w}.$

Преобразование

$$w(x,y) = u(x,y) + k, \quad k = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{b}{a}$$

приводит к уравнению вида 5.3.1.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\sqrt{ab}\,\mathrm{sh}(\beta u).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = Ae^{\alpha x+\beta y}e^{\mu w}.$

Замена $U = \alpha x + \beta y + \mu w$ приводит к уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = A\mu e^{U}.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = Ae^{\alpha xy+\beta x+\gamma y}e^{\mu w}.$

Замена $U = \alpha xy + \beta x + \gamma y + \mu w$ приводит к уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = A\mu e^{U}.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = A(x^2 + y^2)e^{\beta w}.$

Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \zeta = xy$$

приводит к более простому уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = Ae^{\beta w}.$$

5.2.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f_1\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(f_2\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = g(w)$

Уравнения этого вида встречаются в стационарных задачах тепло- и массопереноса и теории горения. В данном разделе не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной пространственной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(ae^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = 0.$

1°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln(-aA^2y^2 + By + C) - \frac{2}{\beta}\ln(-aAx + D),$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{p^2}{aA\,\mathrm{ch}^2(px+q)}\right],$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{p^2}{-aA\cos^2(px+q)}\right],$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{p^2}{-aA\,\mathrm{sh}^2(px+q)}\right],$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(\xi), \quad \xi = y \pm \mu x,$$

где зависимость $w(\xi)$ задается неявно с помощью формулы (A, B, μ — произвольные постоянные)

$$\beta\mu^2 w + ae^{\beta w} = A\xi + B.$$

3°. Автомодельное решение (b, c — произвольные постоянные):

$$w = w(\zeta), \quad \zeta = \frac{x+b}{y+c},$$

где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\zeta^2 w'_\zeta)'_\zeta + (ae^{\beta w} w'_\zeta)'_\zeta = 0.$$

Последнее допускает первый интеграл

$$(\zeta^2 + ae^{\beta w})w'_\zeta = C.$$

Принимая w за независимую переменную, для функции $\zeta = \zeta(w)$ получим уравнение Риккати

$$C\zeta'_w = \zeta^2 + ae^{\beta w},$$

решение которого выражается через функции Бесселя.

2. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(by^m \frac{\partial w}{\partial y}\Big) = ce^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w) = ce^{\beta w}$.

1°. Точное решение $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi} w'_\xi = Be^{\beta w}, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

2°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

2.1. Уравнение (1) при $A \neq 1$ допускает точное решение вида

$$w(\xi) = -\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{B\beta}{2(1-A)}\xi^2\Big].$$

2.2. При $A = 0$, что соответствует $m = \dfrac{4}{n}$, $B = \dfrac{cn^2}{ab(2-n)^4}$, из (1) получаем еще несколько семейств точных решений исходного уравнения:

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2\lambda^2}{\beta B\cos^2(\lambda\xi + C)}\Big] \quad \text{при } \beta B > 0,$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2\lambda^2}{\beta B\,\mathrm{sh}^2(\lambda\xi + C)}\Big] \quad \text{при } \beta B > 0,$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{-2\lambda^2}{\beta B\,\mathrm{ch}^2(\lambda\xi + C)}\Big] \quad \text{при } \beta B < 0,$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{-8\lambda^2 C_1 C_2}{\beta B(C_1 e^{\lambda\xi} + C_2 e^{-\lambda\xi})^2}\Big],$$

где λ, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2.3. При $A = 1$, что соответствует $m = \dfrac{n}{n-1}$, из (1) получаем другое семейство точных решений исходного уравнения:

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\Big(-\frac{8C}{\beta B}\Big) - \frac{2}{\beta}\ln(\xi^2 + C), \qquad B = \frac{4c(n-1)^2}{ab(2-n)^4},$$

где C — произвольная постоянная.

3. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=ce^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w)=ce^{\lambda w}$.

Точное решение $\beta\mu\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\big(b\mu^2e^{-\beta x}+a\beta^2e^{-\mu y}\big)^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}-\frac{1}{\xi}w'_\xi=Ae^{\lambda w},\qquad A=\frac{4c}{ab\beta^2\mu^2},$$

которое допускает точное решение

$$w=-\frac{1}{\lambda}\ln\Big(\frac{1}{4}A\lambda\xi^2\Big).$$

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=ce^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 5.4.3.8 при $f(w)=ce^{\lambda w}$.

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\gamma w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=0.$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)+\psi(y).\tag{1}$$

Здесь функция $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями (A — произвольная постоянная)

$$\begin{aligned}\varphi''_{xx}+\beta(\varphi'_x)^2&=Abe^{(\gamma-\beta)\varphi},\\ \psi''_{yy}+\gamma(\psi'_y)^2&=-Aae^{(\beta-\gamma)\psi},\end{aligned}\tag{2}$$

которые независимы друг от друга. В результате интегрирования получим решения уравнений (2) в неявном виде

$$\begin{aligned}\int e^{\beta\varphi}\Big[\frac{2Ab}{\beta+\gamma}e^{(\beta+\gamma)\varphi}+B_1\Big]^{-1/2}d\varphi&=C_1\pm x,\\ \int e^{\gamma\psi}\Big[-\frac{2Aa}{\beta+\gamma}e^{(\beta+\gamma)\psi}+B_2\Big]^{-1/2}d\psi&=C_2\pm y,\end{aligned}$$

где B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\beta+\gamma\neq 0$.

2°. О других точных решениях исходного уравнения см. 5.4.4.8 при $f(w)=ae^{\beta w}$, $g(w)=be^{\gamma w}$.

5.2.3. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{a}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{b}{y}\dfrac{\partial w}{\partial y}=ce^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 5.4.2.2 при $f(\xi,w)=ce^{\beta w}$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=ae^{\beta w}\Big[\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big].$

Частный случай уравнения 5.4.2.7 при $f(w)=ae^{\beta w}$.

Замена $U=\displaystyle\int\exp\Big(-\frac{a}{\beta}e^{\beta w}\Big)\,dw$ приводит к двумерному уравнению Лапласа для функции $U=U(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\beta w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad a > 0.$

1°. Точные решения:

$$w(x,y) = Axy + By + Cx + D,$$
$$w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{B^2}{a}\frac{(y+A)^2}{\operatorname{sh}^2(Bx+C)}\right], \qquad w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{1}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{(x+C)^2}\right],$$
$$w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{B^2}{a}\frac{(y+A)^2}{\cos^2(Bx+C)}\right], \qquad w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{1}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{(x+C)^2}\right],$$
$$w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{\operatorname{sh}^2(Cx+D)}\right], \quad w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{\cos^2(Cx+D)}\right],$$
$$w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{\operatorname{sh}^2(Cx+D)}\right], \quad w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{\cos^2(Cx+D)}\right],$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Автомодельное решение:

$$w = w(z), \qquad z = y/x,$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(z^2 + ae^{\beta w})w''_{zz} + 2zw'_z = 0.$$

4. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ce^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 5.4.5.3 при $f(w) = ce^{\beta w}$.

1°. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \left[b(2-m)^2x^{2-n} + a(2-n)^2y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi}w'_\xi = Be^{\beta w}, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{3nm - 4n - 4m + 4}{(2-n)(2-m)}, \qquad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

2°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

2.1. Уравнение (1) при $A \neq 1$ допускает точное решение вида

$$w(\xi) = -\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{B\beta}{2(1-A)}\xi^2\right].$$

2.2. При $A = 0$, что соответствует $m = \dfrac{4n-4}{3n-4}$, $B = \dfrac{c(3n-4)^2}{ab(2-n)^4}$, из (1) получаем еще несколько семейств точных решений исходного уравнения:

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2\lambda^2}{\beta B\cos^2(\lambda\xi + C)}\right] \quad \text{при } \beta B > 0,$$
$$w(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2\lambda^2}{\beta B\operatorname{sh}^2(\lambda\xi + C)}\right] \quad \text{при } \beta B > 0,$$
$$w(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{-2\lambda^2}{\beta B\operatorname{ch}^2(\lambda\xi + C)}\right] \quad \text{при } \beta B < 0,$$

где λ, C — произвольные постоянные.

2.3. При $A = 1$, что соответствует $m = \dfrac{n}{n-1}$, из (1) получаем другое семейство точных решений исходного уравнения:

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta}\ln\left(-\frac{8C}{\beta B}\right) - \frac{2}{\beta}\ln(\xi^2 + C), \qquad B = \frac{4c(n-1)^2}{ab(2-n)^4},$$

где C — произвольная постоянная.

5. $ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ce^{\lambda w}$.

Частный случай уравнения 5.4.5.5 при $k = s = 0$, $f(w) = ce^{\beta w}$.

Точное решение при $\beta\mu \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \left(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{3}{\xi}w'_\xi = Ae^{\lambda w}, \qquad A = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2},$$

которое допускает точное решение

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(-\frac{1}{4}A\lambda\xi^2\right).$$

6. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ce^{\lambda w}$.

Частный случай уравнения 5.4.5.7 при $k = s = 0$, $f(w) = ce^{\lambda w}$.

5.3. Уравнения, содержащие другие нелинейности

5.3.1. Уравнения с гиперболическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha\,\mathrm{sh}(\beta w)$.

Частный случай уравнения 5.4.1.1 при $f(w) = \alpha\,\mathrm{sh}(\beta w)$.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = Ax + By + C,$$

где зависимость $w(z)$ задается неявно с помощью формулы

$$\int\left[D + \frac{2\alpha\,\mathrm{ch}(\beta w)}{\beta(A^2+B^2)}\right]^{-1/2} dw = z,$$

A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}w'_\xi = \alpha\,\mathrm{sh}(\beta w).$$

3°. Точное решение:

$$w(x,y) = \frac{4}{\beta}\,\mathrm{Arth}\big[f(x)g(y)\big], \qquad \mathrm{Arth}\,z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(y)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$(f'_x)^2 = Af^4 + Bf^2 + C,$$
$$(g'_y)^2 = -Cg^4 + (\alpha\beta - B)g^2 - A,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

4°. Исходное уравнение связано с уравнением (см. 5.3.3.1)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \alpha\sin(\beta U)$$

преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sin\left(\tfrac{1}{2}\beta U\right)\mathrm{ch}\left(\tfrac{1}{2}\beta w\right),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cos\left(\tfrac{1}{2}\beta U\right)\mathrm{sh}\left(\tfrac{1}{2}\beta w\right).$$

⊙ *Литература*: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), A. C. Wing, H. H. Cheb, Y. C. Lee (1987).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha(x^2 + y^2)\operatorname{sh}(\beta w)$.

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w) = \alpha \operatorname{sh}(\beta w)$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha(x^2 + y^2)\operatorname{ch}(\beta w)$.

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w) = \alpha \operatorname{ch}(\beta w)$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\beta x}\operatorname{sh}(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 5.4.1.4 при $f(w) = a \operatorname{sh}(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a\operatorname{ch}^n(\beta w)\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$.

Частный случай уравнения 5.4.2.7 при $f(w) = a\operatorname{ch}^n(\beta w)$.

6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = k\operatorname{sh}(\beta w)$.

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w) = k\operatorname{sh}(\beta w)$.

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = k\operatorname{sh}(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w) = k\operatorname{sh}(\lambda w)$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[a\operatorname{ch}(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] = 0$.

Частный случай уравнения 5.4.4.8 при $f(w) = 1$, $g(w) = a\operatorname{ch}(\beta w)$.

5.3.2. Уравнения с логарифмическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha w \ln(\beta w)$.

Частный случай уравнения 5.4.1.1 при $f(w) = \alpha w \ln(\beta w)$.

Сделав замену $U = \ln(\beta w)$, получим уравнение с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = \alpha U. \tag{1}$$

1°. Уравнение (1) имеет точные решения полиномиального вида:

$$\begin{aligned} U(x) &= \tfrac{1}{4}\alpha(x+A)^2 + \tfrac{1}{2}, \\ U(y) &= \tfrac{1}{4}\alpha(y+A)^2 + \tfrac{1}{2}, \\ U(x,y) &= \tfrac{1}{4}\alpha(x+A)^2 + \tfrac{1}{4}\alpha(y+B)^2 + 1, \\ U(x,y) &= A(x+B)^2 \pm \sqrt{A\alpha - 4A^2}\,(x+B)(y+C) + (\tfrac{1}{4}\alpha - A)(y+C)^2 + \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Уравнение (1) имеет решение типа бегущей волны:

$$U(x,y) = F(\xi), \qquad \xi = Ax + By + C.$$

Здесь функция $F = F(\xi)$ задается неявно с помощью формулы

$$\xi = \int \left[De^{-2F} + \frac{\alpha}{A^2 + B^2}(F - \tfrac{1}{2})\right]^{-1/2} dF,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Уравнение (1) имеет решение в виде суммы функций различных аргументов:

$$U(x,y) = f(x) + g(y).$$

Здесь функции $f = f(x)$ и $g = g(y)$ задаются неявно с помощью формул

$$A_1 \pm x = \int \left(B_1 e^{-2f} + \alpha f - \tfrac{1}{2}\alpha\right)^{-1/2} df,$$
$$A_2 \pm y = \int \left(B_2 e^{-2g} + \alpha g - \tfrac{1}{2}\alpha\right)^{-1/2} dg,$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — произвольные постоянные.

4°. Уравнение (1) имеет более сложные решения в виде суммы функций различных аргументов:

$$U(x,y) = f(\xi) + g(\eta), \quad \xi = x\cos\beta - y\sin\beta, \quad \eta = x\sin\beta + y\cos\beta,$$

где функции $f(\xi)$ и $g(\eta)$ определены в п. 3°, β — произвольная постоянная.

5°. Исходное уравнение имеет точные решения вида

$$w = w(\zeta), \qquad \zeta = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta} w'_{\zeta} = \alpha w \ln(\beta w).$$

⦿ *Литература*: J. A. Shercliff (1977), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

2. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw\ln w + (bx^n + cy^k)w.$$

Частный случай уравнения 5.4.1.8 при $f(x) = bx^n$, $g(y) = cy^k$.

3. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha(x^2 + y^2)\ln(\beta w).$$

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w) = \alpha\ln(\beta w)$.

4. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\beta x}\ln(\lambda w).$$

Частный случай уравнения 5.4.1.4 при $f(w) = a\ln(\lambda w)$.

5. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = axw + bw\ln|w|.$$

Это уравнение используется для описания некоторых течений идеальной стратифицированной жидкости. Оно является частным случаем уравнения 5.3.2.6 при $k = a_2 = a_0 = 0$.

1°. Точное решение:

$$w(x,y) = \exp\left[-\frac{a}{b}x + \frac{b}{4}(y+C)^2 + \frac{a^2}{b^3} + \frac{1}{2}\right],$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (C — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{xx} = b\varphi\ln|\varphi| + (ax + C)\varphi,$$
$$\psi''_{yy} = b\psi\ln|\psi| - C\psi.$$

⦿ *Литература*: В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994, стр. 183–185).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{k}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}=(a_2x^2+a_1x+a_0)w+bw\ln|w|.$

Уравнение Грэда — Шафранова при $k=-1$, $a_1=a_0=0$. Это уравнение используется для описания некоторых установившихся осесимметричных движений (с закруткой) идеальной жидкости. Оно встречается также в физике плазмы.

1°. Точные решения при $a_1=0$:

$$w(x,y)=\exp\Big[Ax^2+\frac{b}{4}(y+B)^2+\frac{2}{b}A(k+1)-\frac{a_0}{b}+\frac{1}{2}\Big],\quad A=\frac{1}{8}\big(b\pm\sqrt{b^2+16a_2}\,\big),$$

где B — произвольная постоянная.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (C — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{xx}+\frac{k}{x}\varphi'_x=b\varphi\ln|\varphi|+(a_2x^2+a_1x+a_0+C)\varphi,$$
$$\psi''_{yy}=b\psi\ln|\psi|-C\psi.$$

⊙ *Литература*: G. Rosen (1969), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родиоиов (1994, стр. 174–182).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{a}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{b}{y}\dfrac{\partial w}{\partial y}=cw^n\ln(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.2.2 при $f(\xi,w)=cw^n\ln(\beta w)$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a\ln^n(\beta w)\Big[\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big].$

Частный случай уравнения 5.4.2.7 при $f(w)=a\ln^n(\beta w)$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[a\ln^n(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=0.$

Частный случай уравнения 5.4.4.8 при $f(w)=1$, $g(w)=a\ln^n(\beta w)$.

10. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(a_1x+b_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(a_2y+b_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=kw\ln(\beta w).$

1°. Точное решение:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}+\frac{b_1}{a_1^2}+\frac{b_2}{a_2^2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\xi w'_\xi)'_\xi=kw\ln(\beta w).$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$[(a_1x+b_1)\varphi'_x]'_x-k\varphi\ln(\beta\varphi)+C\varphi=0,$$
$$[(a_2y+b_2)\psi'_y]'_y-k\psi\ln\psi-C\psi=0.$$

11. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(a_1x+b_1y+c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(a_2x+b_2y+c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=kw\ln w.$

Частный случай уравнения 5.4.4.2 при $f(w)=kw\ln w$.

12. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=k\ln(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w)=k\ln(\beta w)$.

13. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=kw\ln w.$

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w)=kw\ln w$ и частный случай уравнения 5.4.3.9 при $f(x)=ax^n$, $g(y)=by^m$.

14. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=k\ln(\lambda w).$

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w)=k\ln(\lambda w)$.

15. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=kw\ln w.$

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w)=kw\ln w$ и частный случай уравнения 5.4.3.9 при $f(x)=ae^{\beta x}$, $g(y)=be^{\mu y}$.

5.3.3. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\alpha\sin(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.1 при $f(w)=\alpha\sin(\beta w)$.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w=w(z),\qquad z=Ax+By+C,$$

где зависимость $w(z)$ задается неявно с помощью формулы

$$\int\left[D-\frac{2\alpha\cos(\beta w)}{\beta(A^2+B^2)}\right]^{-1/2}dw=z,$$

A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\sqrt{(x+C_1)^2+(y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w=w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{1}{\xi}w'_{\xi}=\alpha\sin(\beta w).$$

3°. Точное решение при $\alpha=\beta=1$:

$$w(x,y)=4\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{ctg}\,A\,\frac{\mathrm{ch}\,F}{\mathrm{ch}\,G}\right],$$
$$F=\frac{\cos A}{\sqrt{1+B^2}}(x-By),\quad G=\frac{\sin A}{\sqrt{1+B^2}}(y+Bx),$$

где A, B — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983).

4°. Решения более общего вида

$$w(x,y)=\frac{4}{\beta}\,\mathrm{arctg}\big[f(x)g(y)\big],$$

где функции $f=f(x)$ и $g=g(y)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$(f'_x)^2=Af^4+Bf^2+C,$$
$$(g'_y)^2=Cg^4+(\alpha\beta-B)g^2+A,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\alpha\cos(\beta w).$

Замена $\beta w=\beta u+\frac{1}{2}\pi$ приводит к уравнению вида 5.3.3.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\alpha\sin(\beta u).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\alpha(x^2+y^2)\sin(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w)=\alpha\sin(\beta w)$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\alpha(x^2+y^2)\cos(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w)=\alpha\cos(\beta w)$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=ae^{\beta x}\sin(\lambda w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.4 при $f(w)=a\sin(\lambda w)$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a\cos(\beta w)\Bigl[\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2+\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2\Bigr].$

Частный случай уравнения 5.4.2.7 при $f(w)=a\cos(\beta w)$.

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)=k\sin(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w)=k\sin(\beta w)$.

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)=k\sin(\lambda w).$

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w)=k\sin(\lambda w)$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl[a\cos^n(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr]=0.$

Частный случай уравнения 5.4.4.8 при $f(w)=1$, $g(w)=a\cos^n(\beta w)$.

5.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

5.4.1. Уравнения вида $\Delta w=f(x,y,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(w).$

Уравнение теплопроводности с нелинейным источником.

1°. Пусть $w=w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm x+C_1,\pm y+C_2),$$
$$w_2=w(x\cos\beta-y\sin\beta,\ x\sin\beta+y\cos\beta),$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в w_1 выбираются независимо друг от друга).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int\Bigl[C+\frac{2}{A^2+B^2}F(w)\Bigr]^{-1/2}dw=Ax+By+D,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w = w(\zeta), \qquad \zeta = \sqrt{(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w = w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta} w'_\zeta = f(w).$$

4°. О точных решениях этого уравнения для некоторых зависимостей $f(w)$ см. 5.1.1.1, 5.2.1.1, 5.3.1.1, 5.3.2.1, 5.3.3.1 и разд. А.3.3-2 (пример 13).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (x^2 + y^2) f(w).$

1°. Точное решение:

$$w = w(r), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где функция $w = w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r = r^2 f(w).$$

2°. Автомодельное решение:

$$w = w(\zeta), \qquad \zeta = xy.$$

Здесь функция $w = w(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\zeta\zeta} = f(w),$$

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int \left[C_1 + 2F(w)\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm \zeta, \qquad F(w) = \int f(w)\, dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w = w(z), \qquad z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Здесь функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} = f(w),$$

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int \left[C_1 + 2F(w)\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm z, \qquad F(w) = \int f(w)\, dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \zeta = xy$$

приводит к более простому уравнению вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = f(w).$$

Это уравнение для произвольной зависимости $f = f(w)$ допускает точное решение типа бегущей волны $w = w(Az + B\zeta)$, где A, B — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^k f(w).$

1°. Точное решение:

$$w = w(r), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где функция $w = w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r = r^{2k} f(w).$$

2°. Пусть $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Преобразование

$$\begin{array}{lll} z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), & \zeta = xy & \text{при } k = 1, \\ z = \frac{1}{3}(x^3 - 3xy^2), & \zeta = \frac{1}{3}(3x^2y - y^3) & \text{при } k = 2, \\ z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2), & \zeta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{при } k = -1, \\ z = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}, & \zeta = \dfrac{y}{x^2 + y^2} & \text{при } k = -2 \end{array}$$

приводит к более простому уравнению вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = f(w). \qquad (1)$$

Это уравнение для произвольной зависимости $f = f(w)$ допускает точное решение типа бегущей волны $w = w(Az + B\zeta)$, где A, B — произвольные постоянные, и решение вида $w = w(z^2 + \zeta^2)$.

В общем случае для любого целого $k \neq -1$, преобразование

$$z = \frac{(x+iy)^{k+1} + (x-iy)^{k+1}}{2(k+1)}, \quad \zeta = \frac{(x+iy)^{k+1} - (x-iy)^{k+1}}{2(k+1)i}, \quad i^2 = -1 \qquad (2)$$

приводит к уравнению (1). Из формул (2) следует связь:

$$z^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(k+1)^2}(x^2 + y^2)^{k+1}.$$

3°. Пусть k — произвольная постоянная ($k \neq -1$). Преобразование

$$z = \frac{1}{k+1} r^{k+1} \cos\bigl[(k+1)\varphi\bigr], \quad \zeta = \frac{1}{k+1} r^{k+1} \sin\bigl[(k+1)\varphi\bigr] \qquad (3)$$

где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, приводит к более простому уравнению (1). При $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ преобразование (3) совпадает с преобразованием (2).

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{\beta x} f(w)$.

1°. Существует решение, зависящее от одной переменной $w = w(x)$.

2°. Преобразование

$$u(x,y) = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\cos\bigl(\tfrac{1}{2}\beta y\bigr), \quad v(x,y) = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\sin\bigl(\tfrac{1}{2}\beta y\bigr)$$

приводит к более простому уравнению вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 4\beta^{-2} f(w).$$

Это уравнение для произвольной зависимости $f = f(w)$ допускает точное решение типа бегущей волны $w = w(Au + Bv)$, где A, B — произвольные постоянные, и решение вида $w = w(u^2 + v^2)$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{ax - by} f(w)$.

Представим показатель экспоненты в следующем виде:

$$ax - by = \beta(x\cos\sigma - y\sin\sigma); \quad \beta = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\sigma = a/\beta, \quad \sin\sigma = b/\beta.$$

Преобразование

$$\xi = x\cos\sigma - y\sin\sigma, \quad \eta = x\sin\sigma + y\cos\sigma,$$

приводит к уравнению вида 5.4.1.4:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = e^{\beta\xi} f(w).$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x,y)e^{\beta w}.$

Пусть $f(x,y) = \varepsilon |F(z)|^2$, где $\varepsilon = \pm 1$, $F = F(z)$ — заданная аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$.

1°. Общее решение:

$$w(x,y) = -\frac{2}{\beta} \ln \frac{|\beta F(z)| \bigl[1 + \varepsilon \operatorname{sign}(\beta) \Phi(z) \overline{\Phi(z)}\,\bigr]}{4|\Phi'_z(z)|},$$

где $\Phi = \Phi(z)$ — произвольная аналитическая (голоморфная) функция комплексного переменного $z = x + iy$ с отличной от нуля производной, чертой обозначена комплексно-сопряженная величина.

2°. Другое представление общего решения при $\beta = -2$:

$$w(x,y) = \ln\bigl(|\varphi(z)|^2 + \varepsilon |\psi(z)|^2\bigr).$$

Здесь голоморфные функции $\varphi = \varphi(z)$ и $\psi = \psi(z)$ определяются по формулам

$$\varphi^2 = C\Phi \exp\Bigl(\frac{a}{2}\int_{z_0}^{z} \frac{F}{\Phi}\,dz\Bigr), \qquad \psi^2 = \frac{\Phi}{C} \exp\Bigl(-\frac{a}{2}\int_{z_0}^{z} \frac{F}{\Phi}\,dz\Bigr),$$

где $|a| = 1$, $C \neq 0$ — любое, z_0 — произвольная точка, $\Phi = \Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция, удовлетворяющая условию, что в любой точке $z = z_*$, в которой $\Phi(z_*) = 0$, должно быть $\Phi'(z_*) = \pm\frac{1}{2} a F(z_*)$. Последнее условие, в частности, означает, что функция Φ может иметь только простые нули.

⊙ *Литература*: И. Х. Сабитов (2001).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw \ln w + f(x)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{xx} - \bigl[a \ln \varphi + f(x) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$\psi''_{yy} - \bigl(a \ln \psi - C\bigr)\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw \ln w + \bigl[f(x) + g(y)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{xx} - \bigl[a \ln \varphi + f(x) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$\psi''_{yy} - \bigl[a \ln \psi + g(y) - C\bigr]\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x) w \ln w + \bigl[af(x)y + g(x)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = e^{-ay}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{xx} = f(x)\varphi \ln \varphi + \bigl[g(x) - a^2\bigr]\varphi.$$

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax + by, w).$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = ax + by,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a^2 + b^2)w''_{\xi\xi} = f(\xi, w).$$

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x^2 + y^2, w).$

1°. Пусть $w = w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, \pm y + C_2),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta,\ x\sin\beta + y\cos\beta),$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в w_1 выбираются независимо друг от друга).

2°. Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}w'_\xi = f(\xi^2, w).$$

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)f(xy,\ w).$

1°. Автомодельное решение:

$$w = w(\zeta), \qquad \zeta = xy,$$

где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\zeta\zeta} = f(\zeta, w).$$

2°. Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \zeta = xy$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = f(\zeta,\ w).$$

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)f(x^2 - y^2,\ w).$

1°. Точное решение:

$$w = w(z), \qquad z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2),$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz} = f(2z, w).$$

2°. Преобразование

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \zeta = xy$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = f(2z,\ w).$$

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f\big(w + A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{22}y^2 + B_1x + B_2y\big).$

Замена $U = w + A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{22}y^2 + B_1x + B_2y$ приводит к уравнению вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(U) + 2A_{11} + 2A_{22}.$$

5.4.2. Уравнения вида $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f\Big(x,y,w,\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)$

1. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(w)$.

Это уравнение описывает стационарные процессы тепло- и массопереноса и горения в неоднородных (анизотропных) средах. Здесь a и b — главные коэффициенты температуропроводности, $f=f(w)$ — кинетическая функция, которая задает закон тепловыделения.

Преобразование $\xi=x/\sqrt{a}$, $\eta=y/\sqrt{b}$ приводит к уравнению вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}=f(w).$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{a}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{b}{y}\dfrac{\partial w}{\partial y}=f(x^2+y^2,w)$.

Точное решение:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\left(x^2+y^2\right)^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{a+b+1}{\xi}w'_{\xi}=f(\xi^2,w).$$

3. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+f_2(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}+kw\ln w+\big[g_1(x)+g_2(y)\big]w$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\varphi''_{xx}=f_1(x)\varphi'_x+k\varphi\ln\varphi+\big[g_1(x)+C\big]\varphi,$$
$$b\psi''_{yy}=f_2(y)\psi'_y+k\psi\ln\psi+\big[g_2(y)-C\big]\psi,$$

где C — произвольная постоянная.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^2+g(x)w+h(x)$.

Точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y)=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x). \tag{1}$$

Здесь функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{xx}=4f\varphi^2+g\varphi, \tag{2}$$
$$\psi''_{xx}=(4f\varphi+g)\psi, \tag{3}$$
$$\chi''_{xx}=g\chi+f\psi^2+h-2a\varphi. \tag{4}$$

Если удается найти решение $\varphi=\varphi(x)$ нелинейного уравнения (2), то функции $\psi=\psi(x)$ и $\chi=\chi(x)$ определяются последовательно из уравнений (3) и (4), которые линейны относительно ψ и χ.

Из сопоставления уравнений (2) и (3) видно, что уравнение (3) имеет частное решение $\psi=\varphi(x)$. Поэтому его общее решение дается формулой [В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *a*)]

$$\psi(x)=C_1\varphi(x)+C_2\varphi(x)\int\frac{dx}{\varphi^2(x)},\qquad \varphi\not\equiv 0.$$

Отметим, что уравнение (2) имеет тривиальное частное решение $\varphi(x)\equiv 0$, которому соответствует решение (1), линейное по переменной y. Если функции f и g пропорциональны, то частное решение уравнения (2) определяется формулой $\varphi=-\frac{1}{4}g/f$ ($\varphi=\text{const}$).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + bf(x)w^2 + g(x)w + h(x).$

1°. Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\exp\left(\pm y\sqrt{-b}\right), \qquad b<0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{xx} = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$

$$\psi''_{xx} = (2bf\varphi + g + ab)\psi. \tag{3}$$

Если удается найти решение $\varphi = \varphi(x)$ уравнения (2), то функцию $\psi = \psi(x)$ можно получить путем решения уравнения (3), которое линейно относительно ψ.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha,\, \beta = \mathrm{const}),$$

то частные решения уравнения (2) имеют вид

$$\varphi = k_1, \quad \varphi = k_2, \tag{4}$$

где k_1, k_2 — корни квадратного уравнения $bk^2 + \alpha k + \beta = 0$. В этом случае уравнение (3) записывается так:

$$\psi''_{xx} = \left[(2bk_n + \alpha)f + ab\right]\psi, \qquad n = 1,\, 2. \tag{5}$$

В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений линейного уравнения (5) для различных зависимостей $f = f(x)$. В частном случае $f = \mathrm{const}$ общее решение уравнения (5) является суммой экспонент (или синуса и косинуса).

2°. Точное решение более общего вида:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\left[A\exp\left(y\sqrt{-b}\right) + B\exp\left(-y\sqrt{-b}\right)\right], \qquad b<0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} = bf\left(\varphi^2 + 4AB\psi^2\right) + g\varphi + h,$$

$$\psi''_{xx} = 2bf\varphi\psi + g\psi + ab\psi.$$

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\,\mathrm{ch}\left(y\sqrt{-b}\right), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = \tfrac{1}{2},$$

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\,\mathrm{sh}\left(y\sqrt{-b}\right), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2}.$$

3°. Точное решение (c — произвольная постоянная):

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\cos\left(y\sqrt{b} + c\right), \qquad b>0, \tag{7}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} = bf\left(\varphi^2 + \psi^2\right) + g\varphi + h,$$

$$\psi''_{xx} = 2bf\varphi\psi + g\psi + ab\psi.$$

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 488).

6. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} +$

$\qquad + \left[h_1(x)y + h_0(x)\right]\dfrac{\partial w}{\partial y} + p(x)w + q_2(x)y^2 + q_1(x)y + q_0(x).$

Уравнение имеет точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x).$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w)\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right].$

Замена

$$U = \int \frac{dw}{F(w)}, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\left[\int f(w)\,dw\right],$$

приводит к двумерному уравнению Лапласа для функции $U = U(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

8. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^n + g(y)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^m + kw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\varphi''_{xx} - f(x)(\varphi'_x)^n - k\varphi = C,$$
$$b\psi''_{yy} - g(y)(\psi'_y)^m - k\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

9. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f_1(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^n + f_2(y)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^m +$

$$+ g_1(x)\frac{\partial w}{\partial x} + g_2(y)\frac{\partial w}{\partial y} + h_1(x) + h_2(y) + kw.$$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\varphi''_{xx} - f_1(x)(\varphi'_x)^n - g_1(x)\varphi'_x - k\varphi - h_1(x) = C,$$
$$b\psi''_{yy} - f_2(y)(\psi'_y)^m - g_2(y)\psi'_y - k\psi - h_2(y) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (a_1 x + b_1 y + c_1)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k +$

$$+ (a_2 x + b_2 y + c_2)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^k + f\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Точные решения ищем в виде

$$w = w(\xi), \qquad \xi = Ax + By + C,$$

где постоянные A, B, C определяются путем решения алгебраической системы уравнений (β — произвольная постоянная)

$$a_1 A^k + a_2 B^k = \beta A, \qquad (1)$$
$$b_1 A^k + b_2 B^k = \beta B, \qquad (2)$$
$$c_1 A^k + c_2 B^k = \beta C. \qquad (3)$$

Сначала решаются первые два уравнения (1), (2), затем из последнего уравнения (3) определяется C.

Искомая функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(A^2 + B^2)w''_{\xi\xi} = \beta\xi(w'_\xi)^k + f(w, Aw'_\xi, Bw'_\xi).$$

11. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f_1\Big(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f_2\Big(y, \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + kw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\varphi''_{xx} - f_1(x, \varphi'_x) - k\varphi = C,$$
$$b\psi''_{yy} - f_2(y, \psi'_y) - k\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

12. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f_1\Big(x, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)w + f_2\Big(y, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} - f_1\Big(x, \frac{\varphi'_x}{\varphi}\Big) = C,$$
$$b\frac{\psi''_{yy}}{\psi} - f_2\Big(y, \frac{\psi'_y}{\psi}\Big) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

5.4.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] = h(w)$

Уравнения этого вида описывает стационарные процессы тепло- и массопереноса и горения в неоднородных (анизотропных) средах. Здесь $f = f(x)$ и $g = g(y)$ — зависимости главных коэффициентов температуропроводности от пространственных координат, $h = h(w)$ — кинетическая функция (функция источника), которая задает закон тепловыделения или теплопоглощения. В данном разделе не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной пространственной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) = f(w).$

1°. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[b(2-m)^2x^{2-n} + a(2-n)^2y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi}w'_\xi = Bf(w), \tag{1}$$

где

$$A = \frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

При $m = 4/n$ из (1) получаем семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f = f(w)$:

$$\int\Big[C_1 + \frac{2n^2}{ab(2-n)^4}F(w)\Big]^{-1/2}dw = C_2 \pm \xi, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Замена $\zeta = \xi^{1-A}$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta} = \frac{B}{(1-A)^2}\zeta^{\frac{2A}{1-A}}f(w). \tag{2}$$

Большое число точных решений уравнения (2) для различных функций $f = f(w)$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

⦿ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 485).

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x+c)^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[b(y+s)^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]=f(w).$

Преобразование $\zeta=x+c$, $\eta=y+s$ приводит к уравнению вида 5.4.3.1:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(a\zeta^n\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(b\eta^m\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)=f(w).$$

3. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(|x|+c)^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[b(|y|+s)^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]=f(w).$

Преобразование $\zeta=|x|+c$, $\eta=|y|+s$ приводит к уравнению вида 5.4.3.1:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(a\zeta^n\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(b\eta^m\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)=f(w).$$

4. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=f(w).$

Точное решение при $\mu\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\left(b\mu^2x^2+4ae^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}=\frac{1}{ab\mu^2}f(w).$$

Общее решение этого уравнения для произвольной кинетической функции $f=f(w)$ определяется неявно с помощью формул

$$\int\left[C_1+\frac{2}{ab\mu^2}F(w)\right]^{-1/2}dw=C_2\pm\xi,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

5. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu|y|}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=f(w).$

Замена $\zeta=|y|$ приводит к уравнению вида 5.4.3.4.

6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=f(w).$

Точное решение при $\beta\mu\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\left(b\mu^2e^{-\beta x}+a\beta^2e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}-\frac{1}{\xi}w'_\xi=Af(w),\qquad A=\frac{4}{ab\beta^2\mu^2}.\tag{1}$$

Замена $\zeta=\xi^2$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta}=\tfrac{1}{4}A\zeta^{-1}f(w),$$

решения которого при $f(w)=(kw+s)^{-1}$ и $f(w)=(kw+s)^{-2}$ ($k,s=\text{const}$) приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 487).

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta|x|}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu|y|}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=f(w).$

Преобразование $\zeta=|x|$, $\eta=|y|$ приводит к уравнению вида 5.4.3.6.

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=f(w).$

Точное решение при $n\neq 2$, $\mu\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\left[b\mu^2x^{2-n}+a(2-n)^2e^{-\mu y}\right]^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{n}{n-2}\,\frac{1}{\xi}w'_\xi=\frac{4}{ab\mu^2(2-n)^2}f(w).$$

9. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=kw\ln w.$

Точное решение:

$$w(x,y)=\exp\big[\varphi(x)+\psi(y)\big].$$

Здесь функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$e^{-\varphi}[fe^{\varphi}\varphi'_x]'_x-k\varphi=C,$$
$$e^{-\psi}[ge^{\psi}\psi'_y]'_y-k\psi=-C,$$

где C — произвольная постоянная.

10. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=aw\ln w+bw.$

Частный случай уравнения 5.4.4.6 при $k=a$, $h_1(x)=b$, $h_2(y)=0$.

5.4.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x,y,w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(x,y,w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=h(x,y,w)$

1. $(ay+c)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(bx+s)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(w).$

Это уравнение можно записать в дивергентном виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[(ay+c)\frac{\partial w}{\partial x}\Big]+\frac{\partial}{\partial y}\Big[(bx+s)\frac{\partial w}{\partial y}\Big]=f(w).$$

При $ab\neq 0$ существует точное решение вида

$$w=w(\xi),\qquad \xi=(a^2b)^{-1/3}x+(ab^2)^{-1/3}y+(a^2b)^{-2/3}c+(ab^2)^{-2/3}s,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi}=f(w).$$

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(a_1x+b_1y+c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(a_2x+b_2y+c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=f(w).$

Точные решения ищем в виде

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By+C,$$

где постоянные A, B, C определяются путем решения алгебраической системы уравнений (β — произвольная постоянная)

$$a_1A^2+a_2B^2=\beta A, \tag{1}$$
$$b_1A^2+b_2B^2=\beta B, \tag{2}$$
$$c_1A^2+c_2B^2=\beta C. \tag{3}$$

Сначала решаются первые два уравнения (1), (2), затем из последнего уравнения (3) определяется C.

Искомая функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\beta\xi w''_{\xi\xi}+(Aa_1+Bb_2)w'_{\xi}=f(w).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big\{\big[f(x)w+g(x)\big]\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big\}=0.$

1°. Точное решение линейное по переменной y:

$$w(x,y)=(Ax+B)y-\int_{x_0}^{x}(x-t)(At+B)^2f(t)\,dt+C_1x+C_2,$$

где A, B, C_1, C_2, x_0 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{xx} + 6f\varphi^2 = 0, \qquad (1)$$
$$\psi''_{xx} + 6f\varphi\psi = 0, \qquad (2)$$
$$\chi''_{xx} + 2f\varphi\chi + 2\varphi g + f\psi^2 = 0. \qquad (3)$$

Нелинейное уравнение (1) рассматривается независимо от других уравнений. При $f \equiv \mathrm{const}$ его решение можно выразить с помощью эллиптических интегралов. При $f = ae^{\lambda x}$ частное решение уравнения (1) имеет вид $\varphi = -\frac{\lambda^2}{6a}e^{-\lambda x}$. Уравнения (2) и (3) можно решать последовательно (они являются линейными уравнениями относительно искомых функций). Так как частное решение уравнения (2) имеет вид $\psi = \varphi(x)$, то соответствующее общее решение дается формулой (В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*)

$$\psi(x) = C_1\varphi(x) + C_2\varphi(x)\int \frac{dx}{\varphi^2(x)},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f(y)}{\sqrt{w+a}}\frac{\partial w}{\partial y}\right] = 0.$

Замена $U = \sqrt{w+a}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(y)\frac{\partial U}{\partial y}\right] = 0,$$

которое имеет точные решения вида

$$U(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y),$$
$$U(x,y) = \varphi(y)x^2 + \psi(y)x + \chi(y).$$

5. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1x + C_2, C_1y + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение: $w = C_1xy + C_2x + C_3y + C_4$.

3°. Автомодельное решение:

$$w = w(z), \qquad z = y/x,$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[z^2 + f(w)]w''_{zz} + 2zw'_z = 0.$$

6. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = kw\ln w + \left[h_1(x) + h_2(y)\right]w.$

Точное решение:

$$w(x,y) = \exp\left[\varphi(x) + \psi(y)\right].$$

Здесь функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$e^{-\varphi}[fe^{\varphi}\varphi'_x]'_x - k\varphi - h_1(x) = C,$$
$$e^{-\psi}[ge^{\psi}\psi'_y]'_y - k\psi - h_2(y) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big\{\big[g(x)w+h(x)\big]\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big\}=0.$

Уравнение имеет точные решения линейные и квадратичные по y:

$$w(x,y)=\varphi(x)y+\psi(x),$$
$$w(x,y)=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x).$$

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=0.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w(C_1x+C_2,C_1y+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w=w(z),\quad z=Ax+By,$$

где функция $w(z)$ задается неявно

$$\int\big[A^2f(w)+B^2g(w)\big]\,dw=C_1z+C_2,$$

A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение (α, β — произвольные постоянные):

$$w=w(\zeta),\quad \zeta=\frac{x+\alpha}{y+\beta},$$

где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w)w'_\zeta]'_\zeta+[\zeta^2g(w)w'_\zeta]'_\zeta=0. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1) и принимая w за независимую переменную, для функции $\zeta=\zeta(w)$ получим уравнение Риккати (C — произвольная постоянная):

$$C\zeta'_w=g(w)\zeta^2+f(w). \tag{2}$$

Большое число точных решений уравнения (2) для различных функций $f=f(w)$ и $g=g(w)$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

4°. Точное решение в параметрической форме:

$$x=C_1v^2+C_2v-\int f(w)[2C_1G(w)+C_3]\,dw+C_4,$$
$$y=-[2C_1G(w)+C_3]v-C_2G(w)+C_5,\quad G(w)=\int g(w)\,dw,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

5°. Точное решение в параметрической форме:

$$x=[C_1F(w)+C_2]v+C_3F(w)+C_4,\quad F(w)=\int f(w)\,dw,$$
$$y=\frac{1}{2}C_1v^2+C_3v-\int g(w)[C_1F(w)+C_2]\,dw+C_5.$$

6°. Точное решение в параметрической форме:

$$x=[C_1F(w)+C_2]v^2+C_3F(w)+C_4-2\int\Big\{f(w)\int g(w)[C_1F(w)+C_2]\,dw\Big\}\,dw,$$
$$y=\frac{1}{3}C_1v^3+C_3v-2v\int g(w)[C_1F(w)+C_2]\,dw+C_5.$$

7°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = (C_1 e^{\lambda v} + C_2 e^{-\lambda v}) H(w) + C_3,$$
$$y = \frac{1}{\lambda}(C_1 e^{\lambda v} - C_2 e^{-\lambda v}) \frac{1}{f(w)} H'_w(w) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные, функция $H = H(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_f[H] + \lambda^2 g(w) H = 0$, а дифференциальный оператор $\mathbf{L}_f$ определяется выражением

$$\mathbf{L}_f[\varphi] \equiv \frac{d}{dw}\left[\frac{1}{f(w)}\frac{d\varphi}{dw}\right]. \tag{3}$$

8°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [C_1 \sin(\lambda v) + C_2 \cos(\lambda v)] Z(w) + C_3,$$
$$y = \frac{1}{\lambda}[C_2 \sin(\lambda v) - C_1 \cos(\lambda v)] \frac{1}{f(w)} Z'_w(w) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные, а функция $Z = Z(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_f[Z] - \lambda^2 g(w) Z = 0$.

9°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [2C_1 F(w) + C_3] v + C_2 F(w) + C_5, \quad F(w) = \int f(w)\, dw,$$
$$y = C_1 v^2 + C_2 v - \int g(w)[2C_1 F(w) + C_3]\, dw + C_4.$$

10°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{2} C_1 v^2 + C_3 v - \int f(w)[C_1 G(w) + C_2]\, dw + C_5,$$
$$y = -[C_1 G(w) + C_2] v - C_3 G(w) + C_4, \quad G(w) = \int g(w)\, dw.$$

11°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{3} C_1 v^3 + C_3 v - 2v \int f(w)[C_1 G(w) + C_2]\, dw + C_5,$$
$$y = -[C_1 G(w) + C_2] v^2 - C_3 G(w) + C_4 + 2\int \left\{ g(w) \int f(w)[C_1 G(w) + C_2]\, dw \right\} dw.$$

12°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = -\frac{1}{\lambda}(C_1 e^{\lambda v} - C_2 e^{-\lambda v}) \frac{1}{g(w)} H'_w(w) + C_3,$$
$$y = (C_1 e^{\lambda v} + C_2 e^{-\lambda v}) H(w) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, функция $H = H(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_g[H] + \lambda^2 f(w) H = 0$, а дифференциальный оператор $\mathbf{L}_g$ определяется выражением (3) при $f(w) = g(w)$.

13°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = -\frac{1}{\lambda}[C_2 \sin(\lambda v) - C_1 \cos(\lambda v)] \frac{1}{g(w)} Z'_w(w) + C_3,$$
$$y = [C_1 \sin(\lambda v) + C_2 \cos(\lambda v)] Z(w) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, функция $Z = Z(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_g[Z] - \lambda^2 f(w) Z = 0$, а дифференциальный оператор $\mathbf{L}_g$ определяется выражением (3) при $f(w) = g(w)$.

14°. Исходное уравнение можно представить в виде системы уравнений

$$f(w)\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -g(w)\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Преобразование годографа

$$x = x(w, v), \quad y = y(w, v) \tag{5}$$

(w, v принимаются за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные) приводит (4) к линейной системе

$$f(w)\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial w}, \quad -g(w)\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial w}. \tag{6}$$

Исключая отсюда y, для функции $x = x(w, v)$ получим линейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{f(w)}\frac{\partial x}{\partial w}\right] + g(w)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \tag{7}$$

Аналогичным образом из системы (6) для функции $y = y(w, v)$ имеем другое линейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{g(w)}\frac{\partial y}{\partial w}\right] + f(w)\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0. \tag{8}$$

Процедура построения точных решений исходного нелинейного уравнения состоит из двух этапов. Сначала строится точное решение линейного уравнения (7) для $x = x(w, v)$. Затем это решение подставляется в линейную систему (6), откуда находится функция $y = y(w, v)$ в виде

$$y = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{f(w)}\frac{\partial x}{\partial w}(w, \xi)\,d\xi - \int_{w_0}^{w} g(\eta)\frac{\partial x}{\partial v}(\eta, v_0)\,d\eta, \tag{9}$$

где w_0 и v_0 — любые. Полученные указанным способом выражения вида (5) будут давать точное исходного уравнения в параметрической форме.

Аналогичным образом сначала можно строить точное решение линейного уравнения (8) для $y = y(w, v)$, а затем из (6) определить функцию $x = x(w, v)$ в виде

$$x = -\int_{v_0}^{v} \frac{1}{g(w)}\frac{\partial y}{\partial w}(w, \xi)\,d\xi + \int_{w_0}^{w} f(\eta)\frac{\partial y}{\partial v}(\eta, v_0)\,d\eta,$$

где w_0 и v_0 — любые.

Замечание 1. Пусть $x = \Phi(w, v; f, g)$ — решение уравнения (7). Тогда $y = \Phi(w, v; g, f)$ будет решением уравнения (8).

Замечание 2. Пусть $x = \Phi(w, v; f, g)$, $y = \Psi(w, v; f, g)$ — решение системы уравнений (6). Тогда функции $x = \Psi(w, v; -g, -f)$, $y = \Phi(w, v; -g, -f)$ также будут давать решение этой системы.

15°. Точные решения уравнения (7), содержащие четные степени v:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(w) v^{2k}, \tag{10}$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(w)$ описываются рекуррентными формулами

$$\varphi_n(w) = A_n F(w) + B_n, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

$$\varphi_{k-1}(w) = A_k F(w) + B_k - 2k(2k-1)\int f(w)\left\{\int g(w)\varphi_k(w)\,dw\right\}dw,$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные($k = n, \ldots, 1$).

Зависимость $y = y(w, v)$ определяется по формуле (9) и вместе с выражением (10) дает решение исходного нелинейного уравнения в параметрической форме.

16°. Точные решения уравнения (7), содержащие нечетные степени v:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(w) v^{2k+1}, \tag{11}$$

где функции $\psi_k = \psi_k(w)$ описываются рекуррентными формулами

$$\psi_n(w) = A_n F(w) + B_n, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
$$\psi_{k-1}(w) = A_k F(w) + B_k - 2k(2k+1)\int f(w)\Big\{\int g(w)\psi_k(w)\,dw\Big\}\,dw,$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные$(k = n, \ldots, 1)$.

Зависимость $y = y(w, v)$ определяется по формуле (9) и вместе с выражением (11) дает решение исходного нелинейного уравнения в параметрической форме.

17°. В частном случае $g(w) = k^2 f(w)$ преобразование

$$\bar{x} = kx, \quad u = \int f(w)\,dw$$

приводит к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

⊙ *Литература к уравнению 5.4.4.8*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *b*).

9. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\Big\{\big[a_1 x + b_1 y + f(w)\big]\frac{\partial w}{\partial x}\Big\} + \frac{\partial}{\partial y}\Big\{\big[a_2 x + b_2 y + g(w)\big]\frac{\partial w}{\partial y}\Big\} = 0.$

Точные решения ищем в виде

$$w = w(\xi), \qquad \xi = Ax + By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1 A^2 + a_2 B^2 = A, \qquad b_1 A^2 + b_2 B^2 = B.$$

Искомая функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (C — произвольная постоянная):

$$\big[\xi + A^2 f(w) + B^2 g(w)\big]w'_\xi = C.$$

Принимая w за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим линейное уравнение первого порядка

$$C\xi'_w = \xi + A^2 f(w) + B^2 g(w).$$

5.4.5. Другие уравнения

1. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a w^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(y) w^5.$

Пусть $u = u(y)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a u''_{yy} - f(y) u = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$\zeta = \int \frac{dy}{u^2}, \quad \xi = \frac{w}{u}$$

сильно упрощает исходное уравнение и приводит его к виду

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a\xi^4 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} = 0. \tag{2}$$

Это уравнение не зависит от функции f (явно) и имеет точное решение

$$\xi(x, \zeta) = Ax\zeta + B\zeta + Cx + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Кроме того, уравнение (2) имеет точные решения, например, следующей структуры:

$$\xi(x,\zeta) = \xi(kx+\lambda\zeta),$$
$$\xi(x,\zeta) = g(x)h(\zeta),$$
$$\xi(x,\zeta) = x^\beta\varphi(\eta), \quad \eta = \zeta x^{-2\beta-1},$$

где k, λ, β — произвольные постоянные.

2. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f_3(x)w + f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)\big]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = g_2(x)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + g_1(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \big[h_1(x)y + h_0(x)\big]\frac{\partial w}{\partial y} + s_3(x)w + s_2(x)y^2 + s_1(x)y + s_0(x).$$

Уравнение имеет точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x).$$

3. $$ax^n\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kx^{n-1}\frac{\partial w}{\partial x} + sy^{m-1}\frac{\partial w}{\partial y} = f(w).$$

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2°. Точное решение при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[b(2-m)^2x^{2-n} + a(2-n)^2y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$Aw''_{\xi\xi} + \frac{B}{\xi}w'_\xi = f(w), \tag{1}$$

где

$$A = \tfrac{1}{4}ab(2-n)^2(2-m)^2,$$
$$B = \tfrac{1}{4}(2-n)(2-m)\big[ab(3nm-4n-4m+4) + 2bk(2-m) + 2as(2-n)\big].$$

Решение уравнения (1) в неявном виде при $B = 0$ и произвольной $f = f(w)$:

$$\int\left[C_1 + \frac{2}{A}F(w)\right]^{-1/2}dw = C_2 \pm \xi, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 486).

4. $$ax^n\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kx^{n-1}f(w)\frac{\partial w}{\partial x} + sy^{m-1}f(w)\frac{\partial w}{\partial y} = g(w).$$

При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существует точное решение вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[b(2-m)^2x^{2-n} + a(2-n)^2y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

5. $$ae^{\beta x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + ke^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x} + se^{\mu y}\frac{\partial w}{\partial y} = f(w).$$

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2°. Точное решение при $\beta\mu \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big(b\mu^2e^{-\beta x} + a\beta^2e^{-\mu y}\big)^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$Aw''_{\xi\xi} + \frac{B}{\xi}w'_\xi = f(w), \tag{1}$$

где

$$A = \tfrac{1}{4}ab\beta^2\mu^2, \quad B = \tfrac{1}{4}\beta\mu(3ab\beta\mu - 2bk\mu - 2as\beta).$$

Решение уравнения (1) в неявном виде при $B = 0$ и произвольной $f = f(w)$:

$$\int\left[C_1 + \frac{2}{A}F(w)\right]^{-1/2}dw = C_2 \pm \xi, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

6. $ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+ke^{\beta x}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}+se^{\mu y}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}=g(w).$

При $\beta\mu\neq 0$ существует точное решение вида

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\bigl(b\mu^2e^{-\beta x}+a\beta^2e^{-\mu y}\bigr)^{1/2}.$$

7. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+be^{\beta y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+kx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x}+se^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial y}=f(w).$

1°. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w=w(x)$ и $w=w(y)$.

2°. Точное решение $\beta\neq 0$, $n\neq 2$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\bigl[b\beta^2x^{2-n}+a(2-n)^2e^{-\beta y}\bigr]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$Aw''_{\xi\xi}+\frac{B}{\xi}w'_\xi=f(w), \tag{1}$$

где

$$A=\tfrac14 ab\beta^2(2-n)^2,\quad B=\tfrac14\beta(2-n)\bigl[ab\beta(4-3n)+2bk\beta-2as(2-n)\bigr].$$

Решение уравнения (1) в неявном виде при $B=0$ и произвольной $f=f(w)$:

$$\int\Bigl[C_1+\frac{2}{A}F(w)\Bigr]^{-1/2}dw=C_2\pm\xi,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 488).

8. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+be^{\beta y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+kx^{n-1}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}+se^{\beta y}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}=g(w).$

При $\beta\neq 0$, $n\neq 2$ существует точное решение вида

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\bigl[b\beta^2x^{2-n}+a(2-n)^2e^{-\beta y}\bigr]^{1/2}.$$

9. $(ay+c)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(bx+s)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f\Bigl(w,\,\dfrac{\partial w}{\partial x},\,\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr).$

Точное решение при $ab\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=(a^2b)^{-1/3}x+(ab^2)^{-1/3}y+(a^2b)^{-2/3}c+(ab^2)^{-2/3}s.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi}=f\bigl(w,\,\beta w'_\xi,\,\mu w'_\xi\bigr),$$

где $\beta=(a^2b)^{-1/3}$, $\mu=(ab^2)^{-1/3}$.

10. $(a_1x+b_1y+c_1)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(a_2x+b_2y+c_2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f\Bigl(w,\,\dfrac{\partial w}{\partial x},\,\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr).$

Точные решения ищем в виде

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By+C,$$

где постоянные A, B, C определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$A^2a_1+B^2a_2=A, \tag{1}$$
$$A^2b_1+B^2b_2=B, \tag{2}$$
$$A^2c_1+B^2c_2=C. \tag{3}$$

Сначала решаются первые два уравнения (1), (2), затем из последнего уравнения (3) определяется C.

Искомая функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi}=f\bigl(w,\,Aw'_\xi,\,Bw'_\xi\bigr).$$

11. $f_1(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f_2(y)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=g_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+g_2(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}+kw\ln w+\big[h_1(x)+h_2(y)\big]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$f_1(x)\varphi''_{xx}=g_1(x)\varphi'_x+k\varphi\ln\varphi+\big[h_1(x)+C\big]\varphi,$$
$$f_2(y)\psi''_{yy}=g_2(y)\psi'_y+k\psi\ln\psi+\big[h_2(y)-C\big]\psi,$$

где C — произвольная постоянная.

12. $\big[a_1x+b_1y+f(w)\big]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\big[a_2x+b_2y+g(w)\big]\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=h\Big(w,\,\dfrac{\partial w}{\partial x},\,\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big).$

Точное решение:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1A^2+a_2B^2=A,\qquad b_1A^2+b_2B^2=B,$$

а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\big[\xi+A^2f(w)+B^2g(w)\big]w''_{\xi\xi}=h\big(w,\,Aw'_\xi,\,Bw'_\xi\big).$$

13. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big\{\big[a_1x+b_1y+f(w)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big\}+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big\{\big[a_2x+b_2y+g(w)\big]\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big\}=h\Big(w,\,\dfrac{\partial w}{\partial x},\,\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big).$

Точное решение:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$A^2a_1+B^2a_2=A,\qquad A^2b_1+B^2b_2=B,$$

а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\big[\varphi(\xi,w)w'_\xi\big]'_\xi=h\big(w,\,Aw'_\xi,\,Bw'_\xi\big),$$
$$\varphi(\xi,w)=\xi+A^2f(w)+B^2g(w).$$

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+g(x)\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+h(x)w=0.$

1°. Точное решение:

$$w(x,y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)y^{3/2}+\varphi_3(x)y^3,$$

где функции $\varphi_k=\varphi_k(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_1''+f(x)\varphi_1'+\tfrac{9}{8}g(x)\varphi_2^2+h(x)\varphi_1=0,$$
$$\varphi_2''+f(x)\varphi_2'+\tfrac{45}{4}g(x)\varphi_2\varphi_3+h(x)\varphi_2=0,$$
$$\varphi_3''+f(x)\varphi_3'+18g(x)\varphi_3^2+h(x)\varphi_3=0,$$

где штрихи обозначают производные по x.

2°. Точное решение в виде полинома третьей степени по y:

$$w(x,y)=\psi_1(x)+\psi_2(x)y+\psi_3(x)y^2+\psi_4(x)y^3,$$

где функции $\psi_k=\psi_k(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_1''+f(x)\psi_1'+2g(x)\psi_2\psi_3+h(x)\varphi_1=0,$$
$$\psi_2''+f(x)\psi_2'+2g(x)(2\psi_3^2+3\psi_2\psi_4)+h(x)\varphi_2=0,$$
$$\psi_3''+f(x)\psi_3'+18g(x)\psi_3\psi_4+h(x)\varphi_3=0,$$
$$\psi_4''+f(x)\psi_4'+18g(x)\psi_4^2+h(x)\varphi_4=0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,y) = \xi(x) + \eta(x)\theta(y).$$

Здесь функции $\zeta_k = \zeta_k(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\eta''_{xx} + f(x)\eta'_x + ag(x)\eta^2 + h(x)\eta = 0,$$
$$\xi''_{xx} + f(x)\xi'_x + bg(x)\eta^2 + h(x)\xi = 0,$$

где a, b — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\theta'_y\theta''_{yy} = a\theta + b,$$

решение которого можно представить в неявной форме.

15. $\displaystyle\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\Big(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Преобразование Лежандра

$$u(\xi,\eta) = x\xi + y\eta - w(x,y), \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial y},$$

где u — новая зависимая переменная, а ξ и η — новые независимые переменные, приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

Точные решения этого уравнения для некоторых функций $f(\xi,\eta)$ можно найти в книге А. Д. Полянина (2001 b).

6. Уравнения эллиптического типа с тремя и более независимыми переменными

6.1. Уравнения с тремя независимыми переменными

6.1.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(cz^l\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=sw^k.$

Частный случай уравнения 6.1.2.4 при $f(w)=sw^k$.

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(cz^l\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=se^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 6.1.2.4 при $f(w)=se^{\beta w}$.

3. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=sw^k.$

Частный случай уравнения 6.1.2.5 при $f(w)=sw^k$.

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=se^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 6.1.2.5 при $f(w)=se^{\beta w}$.

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=sw^k.$

Частный случай уравнения 6.1.2.6 при $f(w)=sw^k$.

6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=se^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 6.1.2.6 при $f(w)=se^{\beta w}$.

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=sw^k.$

Частный случай уравнения 6.1.2.7 при $f(w)=sw^k$.

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=se^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 6.1.2.7 при $f(w)=se^{\beta w}$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}(w-a)^2.$

Это уравнение смешанного типа, оно описывает пространственные околозвуковые течения идеального политропного газа.

Точное решение квадратичное по переменной z:

$$w(x,y,z)=\tfrac{1}{12}\varphi(x,y)z^2+\psi(x,y)z+\chi(x,y)+a.$$

Здесь функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $\chi(x,y)$ описываются уравнениями

$$\Delta\varphi=\varphi^2,$$
$$\Delta\psi=\varphi\psi,$$
$$\Delta\chi=\tfrac{1}{3}\varphi\chi+2\psi^2,$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным x, y.

⊙ *Литература:* С. И. Похожаев (1989).

6.1.2. Трехмерные уравнения, содержащие произвольные функции

1. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+c\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=f(w).$

Это уравнение описывает стационарные процессы тепло- и массопереноса и горения в неоднородных анизотропных средах. Здесь a, b, c — главные коэффициенты температуропроводности, $f=f(w)$ — кинетическая функция, которая задает закон тепловыделения.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By+Cz.$$

Зависимость $w(\xi)$ задается неявно с помощью формул

$$\int\left[C_1+\frac{2}{aA^2+bB^2+cC^2}F(w)\right]^{-1/2}dw=C_2\pm\xi,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$

где A, B, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение (C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные)

$$w=w(\xi),\qquad \xi^2=\frac{(x+C_1)^2}{a}+\frac{(y+C_2)^2}{b}+\frac{(z+C_3)^2}{c}.$$

Функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{2}{\xi}w'_{\xi}=f(w).$$

3°. Преобразование $x=\sqrt{a}\,\bar{x}$, $y=\sqrt{b}\,\bar{y}$, $z=\sqrt{c}\,\bar{z}$ приводит исходное уравнение к виду $\Delta w=f(w)$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=f(w)\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right].$

Замена

$$U=\int\frac{dw}{F(w)},\qquad \text{где}\quad F(w)=\exp\left[\int f(w)\,dw\right],$$

приводит к трехмерному уравнению Лапласа для функции $U=U(x,y,z)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Замечание. О более сложном уравнении вида $(\vec{v}\cdot\nabla)w=\Delta w-f(w)|\nabla w|^2$ с дополнительным конвективным членом см. 6.2.1.1.

3. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^n\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(cz^m\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=f(w).$

1°. При $n=m=0$ см. уравнение 6.1.2.1.

2°. Точное решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi^2=4\left[\frac{x^2}{4a}+\frac{y^{2-n}}{b(2-n)^2}+\frac{z^{2-m}}{c(2-m)^2}\right],$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}w'_{\xi}=f(w),\qquad A=\frac{2(4-n-m)}{(2-n)(2-m)}.$$

3°. «Двумерное» решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$:

$$w=w(x,\xi),\qquad \xi^2=4\left[\frac{y^{2-n}}{b(2-n)^2}+\frac{z^{2-m}}{c(2-m)^2}\right],$$

где функция $w(x,\xi)$ описывается уравнением

$$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{A}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi}=f(w),\qquad A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(cz^l\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=f(w).$

Точное решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$, $l\neq 2$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi^2=4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{z^{2-l}}{c(2-l)^2}\Big],$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}w'_\xi=f(w),\qquad A=2\Big(\frac{1}{2-n}+\frac{1}{2-m}+\frac{1}{2-l}\Big)-1.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=f(w).$

Точное решение при $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi^2=4\Big(\frac{e^{-\lambda x}}{a\lambda^2}+\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big),$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}-\frac{1}{\xi}w'_\xi=f(w).$$

6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=f(w).$

Точное решение при $n\neq 2$, $m\neq 2$, $\nu\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi^2=4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big],$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}w'_\xi=f(w),\qquad A=2\Big(\frac{1}{2-n}+\frac{1}{2-m}\Big)-1.$$

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(ce^{\nu z}\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big)=f(w).$

Точное решение при $n\neq 2$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi^2=4\Big[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}+\frac{e^{-\nu z}}{c\nu^2}\Big],$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{n}{2-n}\,\frac{1}{\xi}w'_\xi=f(w).\qquad (1)$$

Частный случай 1. При $n=0$ для любой функции $f=f(w)$ уравнение (1) имеет решение в квадратурах:

$$\int\Big[C_1+2\int f(w)\,dw\Big]^{-1/2}dw=C_2\pm\xi,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Частный случай 2. При $n=1$, $f(w)=Ae^{\beta w}$ (A, β — произвольные постоянные) уравнение (1) имеет однопараметрическое решение

$$w(\xi)=-\frac{1}{\beta}\ln\Big(-\frac{8C}{\beta A}\Big)-\frac{2}{\beta}\ln(\xi^2+C),$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[f_2(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big[f_3(z)\dfrac{\partial w}{\partial z}\Big]=$
$= aw\ln w+\big[g_1(x)+g_2(y)+g_3(z)\big]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y,z)=\varphi(x)\psi(y)\chi(z),$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(y)$, $\chi=\chi(z)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C_1, C_2 — произвольные постоянные)

$$[f_1(x)\varphi'_x]'_x-a\varphi\ln\varphi-[g_1(x)+C_1]\varphi=0,$$
$$[f_2(y)\psi'_y]'_y-a\psi\ln\psi-[g_2(y)+C_2]\psi=0,$$
$$[f_3(z)\chi'_z]'_z-a\chi\ln\chi-[g_3(z)-C_1-C_2]\chi=0.$$

6.2. Уравнения с произвольным числом независимых переменных

6.2.1. Уравнения линейные относительно старших производных

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}=f(w)\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial w}{\partial x_k}\Big)^2+\sum_{k=1}^{n}g_k(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial w}{\partial x_k}.$

Замена

$$U=\int\frac{dw}{F(w)},\qquad\text{где}\quad F(w)=\exp\Big[\int f(w)\,dw\Big],$$

приводит к линейному уравнению для функции $U(x_1,\dots,x_n)$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}=\sum_{k=1}^{n}g_k(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial U}{\partial x_k}.$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(a_k x_k^{m_k}\frac{\partial w}{\partial x_k}\Big)=f(w).$

Точное решение:

$$w=w(r),\qquad r^2=A\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{B}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{4}{A}f(w),\qquad B=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2-m_k}-1.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(a_k e^{\lambda_k x_k}\frac{\partial w}{\partial x_k}\Big)=f(w).$

Точное решение:

$$w=w(r),\qquad r^2=A\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{a_k\lambda_k^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{4}{A}f(w).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_k x_k^{m_k}\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)+\sum_{k=s+1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(b_k e^{\lambda_k x_k}\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)=f(w).$

1°. Точное решение:

$$w=w(r),\qquad r^2=A\sum_{k=1}^{s}\frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2}+A\sum_{k=s+1}^{n}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{b_k\lambda_k^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{B}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{4}{A}f(w),\qquad B=\sum_{k=1}^{s}\frac{2}{2-m_k}-1.$$

2°. В уравнении выделим две группы переменных (отвечающих как за степенные, так и за экспоненциальные члены) и будем искать точные решения вида

$$w=w(y,z),$$

где

$$y^2=A_1\sum_{k=1}^{q}\frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2}+A_1\sum_{k=s+1}^{p}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{b_k\lambda_k^2},\qquad 0\leqslant q\leqslant s\leqslant p\leqslant n;$$

$$z^2=A_2\sum_{k=q+1}^{s}\frac{x_k^{2-m_k}}{a_k(2-m_k)^2}+A_2\sum_{k=p+1}^{n}\frac{e^{-\lambda_k x_k}}{b_k\lambda_k^2}.$$

Для функции w получим уравнение

$$A_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{B_1}{y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+A_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{B_1}{z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=f(w),$$

$$B_1=\sum_{k=1}^{q}\frac{2}{2-m_k}-1,\quad B_2=\sum_{k=q+1}^{s}\frac{2}{2-m_k}-1.$$

При $B_1=B_2=0$, $A_1=A_2=1$ это уравнение встречается в плоских задачах теории тепло- и массопереноса (см. уравнения 5.1.1.1, 5.2.1.1, 5.3.1.1, 5.3.2.1, 5.3.3.1, 5.4.1.1).

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998).

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[f_k(x_k)\frac{\partial w}{\partial x_k}\right]=aw\ln w+w\sum_{k=1}^{n}g_k(x_k).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x_1,x_2,\dots,x_n)=\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n),$$

где функции $\varphi_1=\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2=\varphi_2(x_2)$, …, $\varphi_n=\varphi_n(x_n)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{d}{dx_k}\left[f_k(x_k)\frac{d\varphi_k}{dx_k}\right]-a\varphi_k\ln\varphi_k-\left[g_k(x_k)+C_k\right]\varphi_k=0;\qquad k=1,\,2,\,\dots,\,n.$$

Произвольные постоянные $C_1,\dots,C_n$ связаны одним соотношением $C_1+\dots+C_n=0$.

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f_k(x_k)\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{n}g_k(x_k)\frac{\partial w}{\partial x_k}=aw\ln w+w\sum_{k=1}^{n}h_k(x_k).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x_1,x_2,\dots,x_n)=\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n),$$

где функции $\varphi_1=\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2=\varphi_2(x_2)$, …, $\varphi_n=\varphi_n(x_n)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$f_k(x_k)\frac{d^2\varphi_k}{dx_k^2}+g_k(x_k)\frac{d\varphi_k}{dx_k}-a\varphi_k\ln\varphi_k-\left[h_k(x_k)+C_k\right]\varphi_k=0;\qquad k=1,\,2,\,\dots,\,n.$$

Произвольные постоянные $C_1,\dots,C_n$ связаны одним соотношением $C_1+\dots+C_n=0$.

6.2.2. Уравнения нелинейные относительно старших производных

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k\Big(x_k, \frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\Big) = aw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k),$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(x_k)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n} f_k\Big(x_k, \frac{d\varphi_k}{dx_k}, \frac{d^2\varphi_k}{dx_k^2}\Big) - a\varphi_k = C_k, \qquad k = 1,\, 2,\, \dots,\, n.$$

Произвольные постоянные $C_1, \dots, C_n$ связаны одним соотношением $C_1 + \dots + C_n = 0$.

Замечание. Функции f_k могут зависеть также от любого количества смешанных производных $\partial_{x_i x_j} w$. На их местах в соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнениях будут стоять нули.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k\Big(x_k, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_k}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\Big) = a\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k),$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(x_k)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$f_k\Big(x_k, \frac{1}{\varphi_k}\frac{d\varphi_k}{dx_k}, \frac{1}{\varphi_k}\frac{d^2\varphi_k}{dx_k^2}\Big) - a\ln\varphi_k = C_k; \qquad k = 1, \dots, n.$$

Произвольные постоянные $C_1, \dots, C_n$ связаны одним соотношением $C_1 + \dots + C_n = 0$.

3. $\displaystyle F\Big(x_1, \dots, x_k; \frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_k}; \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\Big) +$

$$+ G\Big(x_{k+1}, \dots, x_n; \frac{\partial w}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 w}{\partial x_{k+1}^2}, \dots, \frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2}\Big) = aw.$$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_k) + \psi(x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_k)$ и $\psi = \psi(x_{k+1}, \dots, x_n)$ определяются путем решения двух более простых уравнений уравнений с частными производными

$$F\Big(x_1, \dots, x_k; \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}; \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}\Big) = a\varphi + C,$$

$$G\Big(x_{k+1}, \dots, x_n; \frac{\partial\psi}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x_n}; \frac{\partial^2\psi}{\partial x_{k+1}^2}, \dots, \frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}\Big) = a\psi - C,$$

где C — произвольная постоянная.

4. $\displaystyle F\Big(x_1, \dots, x_k; \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_k}; \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\Big) +$

$$+ G\Big(x_{k+1}, \dots, x_n; \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_n}; \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_{k+1}^2}, \dots, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2}\Big) = a\ln w.$$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_k)\psi(x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ и $\psi = \psi(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ определяются путем решения двух более простых уравнений уравнений с частными производными

$$F\Big(x_1, \ldots, x_k; \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}; \frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}\Big) = a\ln\varphi + C,$$

$$G\Big(x_{k+1}, \ldots, x_n; \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_n}; \frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{k+1}^2}, \ldots, \frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}\Big) = a\ln\psi - C,$$

где C — произвольная постоянная.

5. $$\boldsymbol{F\Big(x_1, \ldots, x_k; \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_k}; \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\Big) + {}}$$
$$\boldsymbol{{} + w^\beta G\Big(x_{k+1}, \ldots, x_n; \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x_n}; \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_{k+1}^2}, \ldots, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2}\Big) = 0.}$$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_k)\psi(x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ и $\psi = \psi(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ определяются путем решения двух более простых уравнений уравнений с частными производными

$$\varphi^{-\beta}F\Big(x_1, \ldots, x_k; \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}; \frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}\Big) = C,$$

$$\psi^{\beta}G\Big(x_{k+1}, \ldots, x_n; \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_n}; \frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{k+1}^2}, \ldots, \frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}\Big) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

7. Уравнения смешанного типа

7.1. Уравнения линейные относительно смешанной производной

7.1.1. Уравнение Хохлова — Заболоцкой

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Двумерное уравнение Хохлова — Заболоцкой. Описывает процесс распространения ограниченного звукового пучка в нелинейной среде (t, y играют роль пространственных переменных, а x является линейной комбинацией времени и пространственной координаты).

К уравнению Хохлова — Заболоцкой сводится уравнение нестационарного трансзвукового газового потока

$$2u_{x\tau} + u_x u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

см. C. C. Lin, E. Reissner, H. S. Tsien (1948). Для этого надо перейти к новой переменной $\tau = 2t$, продифференцировать уравнение по x, а затем сделать подстановку $w = -\partial u/\partial x$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2}C_2^2 w(C_1 x + C_3, C_2 y + C_4, C_1^{-1}C_2^2 t + C_5),$$
$$w_2 = w(x + \lambda y + \varphi(t), y + 2\lambda t, t) + \varphi_t'(t) - \lambda^2,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, λ — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = -\frac{x}{t+C_1} + \varphi y + \psi,$$
$$w(x,y,t) = 2\varphi x + (\varphi_t' - 2\varphi^2)y^2 + \psi y + \chi,$$
$$w(x,y,t) = (\varphi y + \psi)x - \frac{1}{12\varphi^2}(\varphi y + \psi)^4 + \frac{1}{6}\varphi_t' y^3 + \frac{1}{2}\psi_t' y^2 + \chi y + \theta,$$
$$w(x,y,t) = C_1\sqrt{x + C_2 y + \varphi} + \varphi_t' - C_2^2,$$
$$w(x,y,t) = \frac{C_1}{t}\sqrt{4t(x+\varphi) - (y + C_2)^2} + \varphi_t',$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$, $\theta = \theta(t)$ — произвольные функции, штрихом обозначены производные, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Решение в неявном виде:

$$tz + x + \lambda y + \lambda^2 t + \varphi(t) = F(z), \qquad z = w - \varphi_t'(t),$$

где $\varphi(t)$, $F(z)$ — произвольные функции. Значение $\lambda = 0$ определяет общий вид решения, которое не зависит от переменной y.

4°. «Двумерное» решение квадратичное по переменной x:

$$w = f(y,t)x^2 + g(y,t)x + h(y,t),$$

где функция $f = f(y,t)$, $g = g(y,t)$, $h = h(y,t)$ описываются уравнениями

$$f_{yy} = -6f^2,$$
$$g_{yy} = -6fg + 2f_t,$$
$$h_{yy} = -2fh + g_t - g^2.$$

Индексы y и t обозначают соответствующие частные производные. Частное решение этих уравнений имеет вид

$$f = -\frac{1}{R^2}, \quad g = \frac{C_1(t)}{R^2} + C_2(t)R^3 - \frac{\varphi_t'(t)}{2R},$$
$$h = \frac{C_3(t)}{R} + C_4(t)R^2 + \frac{R^2}{3}\int \frac{1}{R}(g_t - g^2)\,dy - \frac{1}{3R}\int R^2(g_t - g^2)\,dy, \quad R = y + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, $C_4(t)$ — произвольные функции,

5°. «Двумерное» решение:

$$w = xu(\xi, t), \quad \xi = yx^{-1/2},$$

где функция $u = u(\xi, t)$ описывается уравнением

$$2\xi\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial t} + (\xi^2 u + 4)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \xi^2\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2 - 5\xi u\frac{\partial u}{\partial\xi} - 4\frac{\partial u}{\partial t} + 4u^2 = 0.$$

6°. «Двумерное» решение:

$$w = v(\zeta, t) + \frac{\alpha_t' + 4}{\alpha}x, \quad \zeta = y^2 + \alpha x,$$

где $\alpha = \alpha(t)$ — произвольная функция, а функция $v = v(\zeta, t)$ описывается уравнением

$$\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta\partial t} - (\alpha^2 v + 4\zeta)\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2} - \alpha^2\left(\frac{\partial v}{\partial\zeta}\right)^2 - (\alpha_t' + 10)\frac{\partial v}{\partial\zeta} + \beta_t' - \beta^2 = 0, \quad \beta = \frac{\alpha_t' + 4}{\alpha}.$$

Последнее уравнение имеет частное решение вида $v = \zeta\varphi(t)$, где функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается уравнением Риккати $\alpha\varphi_t' - \alpha^2\varphi^2 - (\alpha_t' + 10)\varphi + \beta_t' - \beta^2 = 0$.

7°. «Двумерное» решение:

$$w = U(r, z), \quad z = x + \beta y + \lambda t, \quad r = y + \mu t,$$

где β, λ, μ — произвольные постоянные, а функция $U = U(r, z)$ описывается уравнением

$$(\lambda - \beta^2)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (\mu - 2\beta)\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - U\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Отсюда при $\lambda = \beta^2$, $\mu = 2\beta$ получим уравнение вида 5.1.3.1.

8°. «Двумерное» решение:

$$w = x^{-2}V(p, q), \quad p = tx^{-3}, \quad q = yx^{-2},$$

где функция $V = V(p, q)$ описывается уравнением

$$3p(3Vp + 1)\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + (4q^2 V + 1)\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} + 2q(6pV + 1)\frac{\partial^2 V}{\partial p\partial q} +$$
$$+ \left(3p\frac{\partial V}{\partial p} + 2q\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 + (36pV + 5)\frac{\partial V}{\partial p} + 22qV\frac{\partial V}{\partial q} + 10V^2 = 0.$$

9°. Точное решение:

$$w = u(r)x^2 y^{-2}, \quad r = (At + B)^{-1}x^{-1}y^2,$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $u = u(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$r^2(u - Ar + 4)u_{rr}'' + r^2(u_r')^2 - r(6u - Ar + 6)u_r' + 6(u + 1)u = 0$$

⊙ *Литература к уравнению 7.1.1.1*: Y. Kodama (1988), Y. Kodama, J. Gibbons (1989), N. H. Ibragimov (1994, pp. 299–300; 1995, pp. 447–450), А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (1997, стр. 144–148).

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Преобразование

$$w(x, y, t) = \frac{b}{a}u(x, y, \tau), \quad \tau = -bt$$

приводит к уравнению вида 7.1.1.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - g(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Обобщенное уравнение Хохлова — Заболоцкой.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(C_1^2 x + C_2, C_1 y + C_3, t),$$
$$w_2 = w(\xi,\eta,t) + \varphi(t), \quad \xi = x + \lambda y + \int [f(t)\varphi(t) + \lambda^2 g(t)]\,dt, \quad \eta = y + 2\lambda \int g(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = -x\left(\int f\,dt + C\right)^{-1} + \varphi y + \psi,$$
$$w(x,y,t) = 2\varphi x + \frac{\varphi_t' - 2f\varphi^2}{g} y^2 + \psi y + \chi,$$
$$w(x,y,t) = (\varphi y + \psi)x - \frac{f}{12 g\varphi^2}(\varphi y + \psi)^4 + \frac{\varphi_t'}{6g} y^3 + \frac{\psi_t'}{2g} y^2 + \chi y + \theta,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$, $\theta = \theta(t)$ — произвольные функции, C — произвольная постоянная, $f = f(t)$, $g = g(t)$, штрихом обозначены производные по t.

3°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = U(z,t) + \varphi(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где функция $\varphi(t)$ — произвольная функция, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ описывается уравнением с частными производными первого порядка [$\psi(t)$ — произвольная функция]

$$\frac{\partial U}{\partial t} - f(t) U \frac{\partial U}{\partial z} - [f(t)\varphi(t) + \lambda^2 g(t)]\frac{\partial U}{\partial z} = \psi(t).$$

Полный интеграл этого уравнения ищется в виде $U = A(t)z + B(t)$, что позволяет построить его общее решение (см. A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Moussiaux, 2002).

4°. «Двумерное» решение квадратичное по переменной x:

$$w = \varphi(y,t)x^2 + \psi(y,t)x + \chi(y,t),$$

где функция $\varphi = \varphi(y,t)$, $\psi = \psi(y,t)$, $\chi = \chi(y,t)$ описываются системой уравнений

$$g\varphi_{yy} = -6f\varphi^2,$$
$$g\psi_{yy} = -6f\varphi\psi + 2\varphi_t,$$
$$g\chi_{yy} = -f(2\varphi\chi + \psi^2) + \psi_t.$$

Индексы y и t обозначают соответствующие частные производные, $f = f(t)$, $g = g(t)$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$

Трехмерное уравнение Хохлова — Заболоцкой.

1°. Пусть $w(x,y,z,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} C_2^2 w(C_1 x + C_3, C_2 y + C_4, C_2 z + C_5, C_1^{-1} C_2^2 t + C_6),$$
$$w_2 = w(x + \lambda y + \mu z + \varphi(t), y + 2\lambda t, z + 2\mu t, t) + \varphi_t'(t) - \lambda^2 - \mu^2,$$
$$w_3 = w(x, y\cos\beta + z\sin\beta, -y\sin\beta + z\cos\beta, t),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, λ, μ, β — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y,z,t) = 2\alpha_1 x + (\alpha_1' - 2\alpha_1^2 - \alpha_2)y^2 + \alpha_3 y + \alpha_2 z^2 + \beta z + \gamma,$$

$$w(x,y,z,t) = \frac{C\sqrt{4tx - y^2 - z^2}}{t^{3/2}},$$

где α_1, α_2, α_3, β, γ — произвольные функции t, C — произвольная постоянная.

3°. «Трехмерное» решение:

$$w = u(x,\xi,t), \quad \xi = y\sin\beta + z\cos\beta,$$

где β — произвольная постоянная, а функция $u = u(x,\xi,t)$ описывается уравнением Хохлова — Заболоцкой вида 7.1.1.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

4°. «Трехмерное» решение линейное по переменной x:

$$w = f(y,z,t)x + g(y,z,t),$$

где функции $f = f(y,z,t)$, $g = g(y,z,t)$ описываются уравнениями

$$f_{yy} + f_{zz} = 0,$$
$$g_{yy} + g_{zz} = f_t - f^2.$$

Индексы y, z, t обозначают соответствующие частные производные. Первое уравнение — уравнение Лапласа, а второе — уравнение Пуассона (относительно функции g). О решениях этих линейных уравнений см., например, А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), А. Д. Полянин (2001 *b*).

5°. «Трехмерное» решение квадратичное по переменной x:

$$w = f(y,z,t)x^2 + g(y,z,t)x + h(y,z,t),$$

где функции $f = f(y,z,t)$, $g = g(y,z,t)$, $h = h(y,z,t)$ описываются уравнениями

$$f_{yy} + f_{zz} = -6f^2,$$
$$g_{yy} + g_{zz} = -6fg + 2f_t,$$
$$h_{yy} + h_{zz} = -2fh + g_t - g^2.$$

6°. Точное решение:

$$w(x,y,z,t) = u(\xi)t^{-\lambda}, \quad \xi = t^{\lambda-2}(4xt - y^2 - z^2),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $u = u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[4u + (1-\lambda)\xi]u''_{\xi\xi} + 4(u'_\xi)^2 = 0.$$

При $\lambda \neq 1$ переход к обратной функции $\xi = \xi(u)$, замена $\xi(u) = p(u) - \frac{1}{1-\lambda}u$ и понижение порядка $p'_u = \frac{4}{1-\lambda}\eta(p)$ приводят к уравнению первого порядка $p\eta\eta'_p - \eta + 1 = 0$. Интегрируя, получим $(\eta - 1)e^\eta = C_1 p$.

При $\lambda = 1$ имеем $u(\xi) = \pm\sqrt{C_1\xi + C_2}$.

7°. Точное решение:

$$w(x,y,z,t) = \frac{y^2+z^2}{t^2}U(\zeta), \quad \zeta = \frac{y^2+z^2}{xt},$$

где функция $U = U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\zeta^2(\zeta^2 U - \zeta + 4)U''_{\zeta\zeta} + \zeta^4(U'_\zeta)^2 + \zeta(2\zeta^2 U - 3\zeta + 12)U'_\zeta + 4U = 0.$$

8°. Точное решение:

$$w(x,y,z,t) = \frac{z^2}{t^2}V(q), \quad q = \frac{4tx - y^2}{z^2},$$

где функция $V = V(q)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2(4V + q^2 - q)V''_{qq} + 8(V'_q)^2 + (1-q)V'_q + V = 0.$$

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994, 1995).

7.1.2. Уравнение нестационарного трансзвукового газового потока

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + a\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Уравнение нестационарного трансзвукового газового потока, см. C. C. Lin, E. Reissner, H. S. Tsien (1948). Частный случай уравнения 7.1.2.2 при $f(t) = a$, $g(t) = -b$.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-3}C_2^2 w(C_1x + C_3, C_2y + C_4, C_1^{-1}C_2^2t + C_5) + C_6yt + C_7y + C_8t + C_9,$$
$$w_2 = w(\xi, \eta, t) + \varphi''_{tt}(t)y^2 + 2b\varphi'_t(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$
$$\xi = x + \lambda y + b\lambda^2 t - 2ab\varphi(t), \quad \eta = y + 2b\lambda t,$$

где C_n, λ — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

⊙ *Литература*: Е. В. Мамонтов (1969).

2°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \frac{1}{12b^2}(\gamma''_{tt} + 6a\gamma\gamma'_t + 4a^2\gamma^3)y^4 + \frac{1}{6b}(\alpha'_t + 2a\alpha\gamma)y^3 +$$
$$+ \frac{1}{2b}[2(\gamma'_t + 2a\gamma^2)x + \beta'_t + 2a\beta\gamma]y^2 + (\alpha x + \delta)y + \gamma x^2 + \beta x + \mu,$$

где $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\delta = \delta(t)$ — произвольные функции.

⊙ *Литература*: Е. В. Мамонтов (1969), Е. М. Воробьев, Н. В. Игнатович, Е. О. Семенова (1989).

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(z,t) + \varphi(t)y + \psi(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ описывается уравнением с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - b\lambda^2\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \qquad (1)$$

Полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$U = C_1z + \bigl(b\lambda^2C_1 - \tfrac{1}{2}aC_1^2\bigr)t + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (1) можно записать в параметрическом виде (A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Moussiaux, 2002):

$$U = sz + \bigl(b\lambda^2 s - \tfrac{1}{2}as^2\bigr)t + f(s),$$
$$z + \bigl(b\lambda^2 - as\bigr)t + f'_s(s) = 0,$$

где $f = f(s)$ — произвольная функция, s — параметр.

4°. «Двумерное» решение более общего вида:

$$w(x,y,t) = U(z,t) + \varphi(t)y^2 + \psi(t)y + \chi(t)x + \theta(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$, $\theta = \theta(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ описывается уравнением с частными производными первого порядка [$\sigma(t)$ — произвольная функция]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \bigl[a\chi(t) - b\lambda^2\bigr]\frac{\partial U}{\partial z} = \bigl[2b\varphi(t) - \chi'_t(t)\bigr]z + \sigma(t).$$

Это уравнение можно проинтегрировать [полный интеграл ищется в виде $U = f(t)z + g(t)$].

5°. «Двумерное» решение в виде полинома третьей степени по x:

$$w(x,y,t) = f(y,t)x^3 + g(y,t)x^2 + h(y,t)x + r(y,t),$$

где функции $f = f(y,t)$, $g = g(y,t)$, $h = h(y,t)$, $r = r(y,t)$ описываются уравнениями

$$
\begin{aligned}
bf_{yy} &= 18af^2,\\
bg_{yy} &= 18afg + 3f_t,\\
bh_{yy} &= 6afh + 4ag^2 + 2g_t,\\
br_{yy} &= 2agh + h_t.
\end{aligned}
$$

Индексы y и t обозначают соответствующие частные производные. Полагая $f = 0$, $g = \varphi(t)y + \psi(t)$, где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, интегрированием по y можно получить решение, зависящее от шести произвольных функций.

6°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = v(x,r)t^{-1}, \quad r = yt^{-1/2},$$

где функция $v = v(x,r)$ описывается уравнением

$$r\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial r} - 2a\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2\frac{\partial v}{\partial r} = 0.$$

7°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = v(p,t) + \frac{\gamma\gamma''_{tt} - 2(\gamma'_t)^2 - 18b\gamma'_t - 40b^2}{12ab\gamma^3}y^4 + \Big(\frac{4b + \gamma'_t}{a\gamma^3}p - \delta\Big)y^2 + \mu y + \lambda, \quad p = y^2 + \gamma x,$$

где $\gamma = \gamma(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, $\delta = \delta(t)$ — произвольные функции, а функция $v = v(p,t)$ описывается уравнением

$$\Big(\gamma'_t p + a\gamma^3\frac{\partial v}{\partial p}\Big)\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} + \gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial p} + (\gamma'_t - 2b)\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{2b[p(\gamma'_t + 4b) - a\gamma^3\delta]}{a\gamma^3} = 0.$$

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + f(t)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$
\begin{aligned}
w_1 &= C_1^{-4}w(C_1^2 x + C_2, C_1 y + C_3, t) + C_4 yt + C_5 y + C_6 t + C_7,\\
w_2 &= w(\xi,\eta,t) - \frac{\varphi'_t(t)}{2g(t)}y^2 + \psi(t)y + \varphi(t)x + \chi(t),\\
&\xi = x + \lambda y - \int\big[\lambda^2 g(t) + f(t)\varphi(t)\big]\,dt, \quad \eta = y - 2\lambda\int g(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, λ — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение в виде полинома четвертой степени по y:

$$w(x,y,t) = a(t)y^4 + b(t)y^3 + [c(t)x + d(t)]y^2 + [\alpha(t)x + \beta(t)]y + \gamma(t)x^2 + \mu(t)x + \delta(t),$$

где $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\delta = \delta(t)$ — произвольные функции, а функции $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $d = d(t)$ определяются по формулам

$$a = -\frac{c'_t + 2f\gamma c}{12g}, \quad b = -\frac{\alpha'_t + 2f\alpha\gamma}{6g}, \quad c = -\frac{\gamma'_t + 2f\gamma^2}{g}, \quad d = -\frac{\mu'_t + 2f\gamma\mu}{2g}.$$

3°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(z,t) + \varphi(t)y^2 + \psi(t)y + \chi(t)x + \theta(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$, $\theta = \theta(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ описывается уравнением с частными производными первого порядка [$\sigma(t)$ — произвольная функция]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}f(t)\Big(\frac{\partial U}{\partial z}\Big)^2 + [f(t)\chi(t) + \lambda^2 g(t)]\frac{\partial U}{\partial z} = -[2g(t)\varphi(t) + \chi'_t(t)]z + \sigma(t).$$

Это уравнение можно проинтегрировать [полный интеграл ищется в виде $U = f(t)z + g(t)$].

4°. «Двумерное» решение в виде полинома третьей степени по x:

$$w(x,y,t) = \varphi(y,t)x^3 + \psi(y,t)x^2 + \chi(y,t)x + \theta(y,t),$$

где функции $\varphi = \varphi(y,t)$, $\psi = \psi(y,t)$, $\chi = \chi(y,t)$, $\theta = \theta(y,t)$ описываются уравнениями

$$\begin{aligned}
&g\varphi_{yy} + 18f\varphi^2 = 0,\\
&g\psi_{yy} + 18f\varphi\psi + 3\varphi_t = 0,\\
&g\chi_{yy} + 6f\varphi\chi + 4f\psi^2 + 2\psi_t = 0,\\
&g\theta_{yy} + 2f\psi\chi + \chi_t = 0.
\end{aligned}$$

Индексы y и t обозначают соответствующие частные производные, $f = f(t)$, $g = g(t)$. Эти уравнения можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения относительно y с параметром t; постоянные интегрирования будут произвольными функциями t. Первое уравнение имеет частные решения $\varphi = 0$ и $\varphi = -\dfrac{g}{3f(y+h)^2}$, где $h = h(t)$ — произвольная функция.

5°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = u(p,t) + a(t)y^4 + [b(t)p + c(t)]y^2 + \mu(t)y + \lambda(t), \quad p = y^2 + \gamma(t)x.$$

Здесь $c = c(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\lambda = \lambda(t)$ — произвольные функции, а функция $u = u(p,t)$ описывается уравнением

$$\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial t} + \left(\gamma_t' p + f\gamma^3\frac{\partial u}{\partial p}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + (\gamma_t' + 2g)\frac{\partial u}{\partial p} + 2g(bp + c) = 0,$$

где функции $a = a(t)$ и $b = b(t)$ определяются по формулам

$$a = -\frac{(b\gamma)_t' + 10gb}{12g}, \quad b = \frac{\gamma_t' - 4g}{f\gamma^3}.$$

7.1.3. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Общее решение:

$$w(x,y) = F(y + G(x)),$$

где $F(z)$ и $G(x)$ — произвольные функции.

⦿ *Литература*: D. Zwillinger (1989, p. 397).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = \pm w(x, \pm y + \varphi(x)) + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,y) &= \pm y\left[2\int f(x)\,dx + C_1\right]^{1/2} + \varphi(x),\\
w(x,y) &= C_1 y^2 + \varphi(x)y + \frac{1}{4C_1}\left[\varphi^2(x) - 2\int f(x)\,dx\right] + C_2,
\end{aligned}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Преобразование Мизеса

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad U(\xi,\eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y), \tag{1}$$

приводит исходное уравнение к нелинейному уравнению первого порядка

$$U\frac{\partial U}{\partial \xi} = f(\xi), \tag{2}$$

которое не зависит от η. Интегрируя (2) и учитывая равенства (1), получим уравнение первого порядка

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 2\int f(x)\,dx + \psi(w), \tag{3}$$

где $\psi(w)$ — произвольная функция.

Интегрируя (3), находим общее решение в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{\sqrt{2F(x)+\psi(w)}} = \pm y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(w)$ — произвольные функции, $F(x) = \int f(x)\,dx$.

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(y)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = g(y)w + h(y)x + s(y).$

Точное решение линейное по переменной x:

$$w = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f\varphi\varphi''_{yy} + (\varphi'_y)^2 = g\varphi + h,$$
$$f\varphi\psi''_{yy} + \varphi'_y\psi'_y = g\psi + s.$$

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + f\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-1}w(C_1x+C_2, C_1y+C_3, C_1t+C_4) + C_5yt + C_6y + C_7t + C_8,$$
$$w_2 = w(x+\lambda y - b\lambda^2 t, y - 2b\lambda t, t) + \varphi(t)y + \psi(t),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, λ — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(z,t) + \varphi(t)y^2 + \psi(t)y + \chi(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ описывается уравнением с частными производными первого порядка [$\sigma(t)$ — произвольная функция]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + F\Big(\frac{\partial U}{\partial z}\Big) + b\lambda^2\frac{\partial U}{\partial z} + 2b\varphi(t)z = \sigma(t), \quad F(u) = \int f(u)\,du.$$

Полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$U = [A(t) + C_1]z + B(t) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $A(t)$, $B(t)$ определяются по формулам

$$A(t) = -2b\int \varphi(t)\,dt, \qquad B(t) = \int \big[\sigma(t) - F(A(t)) - b\lambda^2 A(t)\big]\,dt.$$

5. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + f(t)\Phi\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(\xi,\eta,t) + \varphi(t)y + \psi(t), \quad \xi = x + \lambda y - \lambda^2\int g(t)\,dt + C_1, \quad \eta = y - 2\lambda\int g(t)\,dt + C_2,$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, также будет решением этого уравнения.

2°. «Двумерное» решение:

$$w(x,y,t) = U(z,t) + \varphi(t)y^2 + \psi(t)y + \chi(t), \quad z = x + \lambda y,$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ описывается уравнением с частными производными первого порядка [$\sigma(t)$ — произвольная функция]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + f(t)\Psi\Big(\frac{\partial U}{\partial z}\Big) + \lambda^2 g(t)\frac{\partial U}{\partial z} + 2g(t)\varphi(t)z = \sigma(t), \quad \Psi(u) = \int \Phi(u)\,du.$$

Это уравнение можно проинтегрировать [полный интеграл ищется в виде $U = A(t)z + B(t)$].

7.2. Уравнения квадратичные относительно старших производных

7.2.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x,y)$

Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x,y) + C_1xy + C_2x + C_3y + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

1. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^k.$

1°. Точное решение:

$$w(x,y) = (C_1x + C_2)y^{k+1} + \frac{y}{k(k+1)}\int_0^x \frac{(x-t)f(t)}{(C_1t + C_2)}\,dt + C_3xy + C_4x + C_5y + C_6,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,y) = (C_1x + C_2)y^{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_0^x \frac{(x-t)f(t)}{(C_1t + C_2)}\,dt + C_3xy + C_4x + C_5y + C_6,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^{\frac{k+2}{2}} + C_1xy + C_2x + C_3y + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(k+2)\varphi\varphi''_{xx} = 4f(x).$$

2. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)g(y).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = C_1\int_0^x (x-t)f(t)\,dt + C_2x + \frac{1}{C_1}\int_0^y (y-\tau)g(\tau)\,d\tau + C_3y + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C_1 — произвольная постоянная)

$$\varphi\varphi''_{xx} = C_1f(x),$$
$$\psi\psi''_{yy} = C_1^{-1}g(y).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax+by).$

Точные решения:

$$w(x,y) = \pm\frac{1}{ab}\int_0^z (z-t)\sqrt{f(t)}\,dt + C_1xy + C_2x + C_3y + C_4, \qquad z = ax+by,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^{2k} + g(x)y^k + h(x)y^{k-1}.$

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^{k+1} + \psi(x)y + \chi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$k(k+1)\varphi\varphi''_{xx} = f(x),$$
$$k(k+1)\varphi\psi''_{xx} = g(x),$$
$$k(k+1)\varphi\chi''_{xx} = h(x).$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)e^{\lambda y}.$

1°. Точное решение:

$$w(x,y) = (C_1x + C_2)e^{\lambda y} + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \frac{(x-t)f(t)}{C_1t + C_2}\,dt + C_3xy + C_4x + C_5y + C_6,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y/2} + C_1xy + C_2x + C_3y + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\lambda^2\varphi\varphi''_{xx} = 4f(x)$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)e^{2\lambda y} + g(x)e^{\lambda y}.$

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} + \psi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\lambda^2\varphi\varphi''_{xx} = f(x),$$
$$\lambda^2\varphi\psi''_{xx} = g(x).$$

7.2.2. Уравнение Монжа — Ампера $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x,y)$

Предварительные замечания.

Уравнение Монжа — Ампера встречается в задачах дифференциальной геометрии, газовой динамики и метеорологии.

1°. Пусть функция $w(x,y)$ является решением уравнения Монжа — Ампера. Тогда функция

$$w_1 = w(x,y) + C_1x + C_2y + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Преобразование

$$\bar{x} = a_1x + b_1y + c_1, \quad \bar{y} = a_2x + b_2y + c_2, \quad \bar{w} = a_1b_2kw + a_3x + b_3y + c_3, \quad \bar{F} = k^2F,$$

где a_n, b_n, c_n, k — произвольные постоянные, переводит уравнение Монжа — Ампера в уравнение того же вида.

3°. Преобразование (С. В. Хабиров, 1990)

$$\bar{x}=x(1+\alpha x+\beta y)^{-1},\quad \bar{y}=y(1+\alpha x+\beta y)^{-1},\quad \bar{w}=w(1+\alpha x+\beta y)^{-1},\quad \bar{F}=F(1+\alpha x+\beta y)^{4},$$

где α, β — произвольные постоянные, переводит уравнение Монжа — Ампера в уравнение того же вида.

Методы интегрирования уравнения Монжа — Ампера изложены в книге Э. Гурса (1933, стр. 45–65). Групповая классификация, некоторые инвариантные решения и законы сохранения приведены в работах С. В. Хабирова (1990), N. H. Ibragimov (1994, pp. 94–101).

4°. В лагранжевых координатах система уравнений одномерной газовой динамики с плоскими волнами имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial \xi}=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,$$

где t — время, u — скорость, p — давление, ξ — лагранжева координата, V — удельный объем. Считается, что уравнение состояния описывается зависимостью $V=V\big(p,S(\xi)\big)$, где $S=S(\xi)$ — заданное распределение энтропии.

Преобразование Мартина

$$u(\xi,t)=\frac{\partial w}{\partial x}(x,y),\quad t=\frac{\partial w}{\partial y}(x,y),\quad x=\xi,\quad y=p(\xi,t)$$

сводит уравнения одномерной газовой динамики к неоднородному уравнению Монжа — Ампера

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=F(x,y),$$

где $F(x,y)=-\frac{\partial V}{\partial p}\big(p,S(\xi)\big)$.

⊙ *Литература*: M. N. Martin (1953), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 318).

1. $\displaystyle\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$

Однородное уравнение Монжа — Ампера.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение однородного уравнения Монжа — Ампера. Тогда функции

$$w_1=C_1w(C_2x+C_3y+C_4,C_5x+C_6y+C_7)+C_8x+C_9y+C_{10},$$
$$w_2=(1+C_1x+C_2y)w\left(\frac{x}{1+C_1x+C_2y},\frac{y}{1+C_1x+C_2y}\right),$$

где C_k ($k=1,\,\dots,\,10$) — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Первые интегралы:

$$\Phi_1\left(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0,$$
$$\Phi_2\left(\frac{\partial w}{\partial x},w-x\frac{\partial w}{\partial x}-y\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0,$$

где $\Phi_1(u,v)$ и $\Phi_2(u,z)$ — произвольные функции двух аргументов.

3°. Общее решение в параметрическом виде:

$$w=\alpha x+\varphi(\alpha)y+\psi(\alpha),$$
$$x+\varphi'(\alpha)y+\psi'(\alpha)=0,$$

где α — параметр, $\varphi=\varphi(\alpha)$ и $\psi=\psi(\alpha)$ — произвольные функции.

4°. Точные решения, содержащие одну произвольную функцию:

$$w(x,y)=\varphi(C_1x+C_2y)+C_3x+C_4y+C_5,$$
$$w(x,y)=(C_1x+C_2y)\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+C_3x+C_4y+C_5,$$
$$w(x,y)=(C_1x+C_2y+C_3)\varphi\left(\frac{C_4x+C_5y+C_6}{C_1x+C_2y+C_3}\right)+C_7x+C_8y+C_9,$$

где C_n ($n=1,\dots,9$) — произвольные постоянные; $\varphi=\varphi(z)$ — произвольная функция.

5°. Точные решения, содержащие произвольные постоянные:

$$w(x,y) = C_1y^2 + C_2xy + \frac{C_2^2}{4C_1}x^2 + C_3y + C_4x + C_5,$$

$$w(x,y) = \frac{1}{x+C_1}\left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) + C_4y + C_5x + C_6,$$

$$w(x,y) = \pm(C_1x + C_2y + C_3)^k + C_4x + C_5y + C_6,$$

$$w(x,y) = \pm\frac{(C_1x + C_2y + C_3)^{k+1}}{(C_4x + C_5y + C_6)^k} + C_7x + C_8y + C_9,$$

$$w(x,y) = \pm\sqrt{C_1(x+a)^2 + C_2(x+a)(y+b) + C_3(y+b)^2} + C_5x + C_6y + C_7,$$

где a, b, C_n — произвольные постоянные.

⊙ *Литература к уравнению 7.2.2.1*: Э. Гурса (1933, стр. 62), С. В. Хабиров (1990), N. H. Ibragimov (1994, pp. 94–101).

2. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = A.$

1°. Первые интегралы при $A = a^2 > 0$:

$$\Phi_1\left(\frac{\partial w}{\partial x} + ay, \frac{\partial w}{\partial y} - ax\right) = 0,$$

$$\Phi_2\left(\frac{\partial w}{\partial x} - ay, \frac{\partial w}{\partial y} + ax\right) = 0,$$

где $\Phi_n(u,v)$ — произвольные функции двух аргументов ($n = 1, 2$).

2°. Общее решение в параметрическом виде при $A = a^2 > 0$:

$$x = \frac{\beta - \lambda}{2a}, \quad y = \frac{\psi'(\lambda) - \varphi'(\beta)}{2a}, \quad w = \frac{(\beta+\lambda)[\psi'(\lambda) - \varphi'(\beta)] + 2\varphi(\beta) - 2\psi(\lambda)}{4a},$$

где β и λ — параметры, $\varphi = \varphi(\beta)$ и $\psi = \psi(\lambda)$ — произвольные функции.

3°. Точные решения:

$$w(x,y) = \pm\frac{\sqrt{A}}{C_2}x(C_1x + C_2y) + \varphi(C_1x + C_2y) + C_3x + C_4y,$$

$$w(x,y) = C_1y^2 + C_2xy + \frac{1}{4C_1}(C_2^2 - A)x^2 + C_3y + C_4x + C_5,$$

$$w(x,y) = \frac{1}{x+C_1}\left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) - \frac{A}{12C_2}(x^3 + 3C_1x^2) + C_4y + C_5x + C_6,$$

$$w(x,y) = \pm\frac{2\sqrt{A}}{3C_1C_2}(C_1x - C_2^2y^2 + C_3)^{3/2} + C_4x + C_5y + C_6,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

Четыре других решения можно получить:

1) из решения уравнения 7.2.2.18 при $\alpha = 0$, $f(u) = A$, где β — произвольная постоянная;
2) из решения уравнения 7.2.2.20 при $f(u) = A$, где a, b, c — произвольные постоянные;
3) из решения уравнения 7.2.2.21 при $f(u) = A$, где a, b, c, k, s — произвольные постоянные;
4) из решения уравнения 7.2.2.24 при $\alpha = 0$, $f(u) = A$, где β — произвольная постоянная.

4°. Преобразование Лежандра

$$u = x\xi + y\eta - w(x,y), \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial y},$$

где $u = u(\xi,\eta)$ — новая зависимая переменная, а ξ и η — новые независимые переменные, приводит к уравнению аналогичного вида

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \frac{1}{A}.$$

⊙ *Литература*: Э. Гурса (1933, стр. 63–64).

3. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x).$

1°. Точные решения квадратичные по переменной y:

$$w(x,y) = C_1 y^2 + C_2 xy + \frac{C_2^2}{4C_1}x^2 - \frac{1}{2C_1}\int_0^x (x-t)f(t)\,dt + C_3 y + C_4 x + C_5,$$

$$w(x,y) = \frac{1}{x+C_1}\left(C_2 y^2 + C_3 y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) - \frac{1}{2C_2}\int_0^x (x-t)(t+C_1)f(t)\,dt + C_4 y + C_5 x + C_6,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — произвольные постоянные.

2°. Точные решения при $f(x) > 0$:

$$w(x,y) = \pm y \int \sqrt{f(x)}\,dx + \varphi(x) + C_1 y,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

⦿ *Литература*: M. N. Martin (1953), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 318).

3°. Рассмотрим некоторые конкретные зависимости $f = f(x)$. Решения, которые могут быть получены по формулам из пп. 1°, 2°, опускаются.

3.1. Точные решения при $f(x) = Ax^k$ можно получить:
1) из решения уравнения 7.2.2.18 при $f(u) = A$, $\alpha = k/2$, где β — произвольная постоянная;
2) из решения уравнения 7.2.2.24 при $f(u) = A$, $\alpha = k/2$, где β — произвольная постоянная.

3.2. Точные решения при $f(x) = Ae^{\lambda x}$:

$$w(x,y) = \pm\frac{2\sqrt{A}}{C_2\lambda}e^{\lambda x/2}\sin(C_1 x + C_2 y + C_3) + C_4 x + C_5 y + C_6,$$

$$w(x,y) = \pm\frac{2\sqrt{A}}{C_2\lambda}e^{\lambda x/2}\operatorname{sh}(C_1 x + C_2 y + C_3) + C_4 x + C_5 y + C_6,$$

$$w(x,y) = \pm\frac{2\sqrt{-A}}{C_2\lambda}e^{\lambda x/2}\operatorname{ch}(C_1 x + C_2 y + C_3) + C_4 x + C_5 y + C_6.$$

Еще одно решение можно получить из решения уравнения 7.2.2.22 при $\alpha = \lambda$, $f(u) = A$, где β — произвольная постоянная.

4. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y.$

1°. Точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = C_1 y^2 - y\int F(x)\,dx + \frac{1}{2C_1}\int_a^x (x-t)F^2(t)\,dt + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

$$F(x) = \frac{1}{2C_1}\int f(x)\,dx + C_5,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{C_1 x + C_2}, \quad \psi(x) = C_3\varphi(x) + C_4 + \frac{\varphi(x)}{2C_1}\int\frac{f(x)\,dx}{[\varphi(x)]^3} - \frac{1}{2C_1}\int\frac{f(x)\,dx}{[\varphi(x)]^2},$$

$$\chi(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)\frac{[\psi_t'(t)]^2}{\varphi(t)}\,dt + C_5 x + C_6,$$

3°. Точные решения в виде полиномов третьей степени по y:

$$w(x,y) = C_1 y^3 - \frac{1}{6C_1}\int_a^x (x-t)f(t)\,dt + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

$$w(x,y) = \frac{y^3}{(C_1 x + C_2)^2} - \frac{1}{6}\int_a^x (x-t)(C_1 t + C_2)^2 f(t)\,dt + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

4°. См. решение уравнения 7.2.2.7 в п. 2° при $k = 1$.

5. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^2.$

1°. Точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \Big[C_1 \int \varphi^2(x)\,dx + C_2\Big]y + \tfrac{1}{2}C_1^2 \int_a^x (x-t)\varphi^3(t)\,dt + C_3x + C_4,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi\varphi''_{xx} = 2(\varphi'_x)^2 - \tfrac{1}{2}f(x).$$

2°. Точные решения в виде полиномов четвертой степени по y:

$$w(x,y) = C_1y^4 - \frac{1}{12C_1}\int_a^x (x-t)f(t)\,dt + C_2x + C_3y + C_4,$$

$$w(x,y) = \frac{y^4}{(C_1x+C_2)^3} - \frac{1}{12}\int_a^x (x-t)(C_1t+C_2)^3 f(t)\,dt + C_3x + C_4y + C_5,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

3°. См. решение уравнения 7.2.2.7 в п. 2° при $k=2$.

6. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^2 + g(x)y + h(x).$

Точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi\varphi''_{xx} &= 2(\varphi'_x)^2 - \tfrac{1}{2}f(x),\\ \varphi\psi''_{xx} &= 2\varphi'_x\psi'_x - \tfrac{1}{2}g(x),\\ \varphi\chi''_{xx} &= \tfrac{1}{2}(\psi'_x)^2 - \tfrac{1}{2}h(x).\end{aligned}$$

7. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^k.$

1°. Точные решения:

$$w(x,y) = \frac{C_1y^{k+2}}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{C_1}\int_a^x (x-t)f(t)\,dt + C_2x + C_3y + C_4,$$

$$w(x,y) = \frac{y^{k+2}}{(C_1x+C_2)^{k+1}} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_a^x (x-t)(C_1t+C_2)^{k+1}f(t)\,dt + C_3x + C_4y + C_5,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^{\frac{k+2}{2}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(k+2)\varphi\varphi''_{xx} - (k+2)^2(\varphi'_x)^2 + 4f(x) = 0.$$

3°. Рассмотрим подробнее случай степенной зависимости $f(x) = Ax^n$.

Точные решения:

$$w(x,y) = \frac{C_1x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{Ay^{k+2}}{C_1(k+1)(k+2)} + C_2y + C_3x + C_4,$$

$$w(x,y) = \frac{C_1x^{n+2}}{(n+1)(n+2)y^{n+1}} - \frac{Ay^{k+n+3}}{C_1(k+n+2)(k+n+3)} + C_2y + C_3x + C_4,$$

$$w(x,y) = \frac{C_1y^{k+2}}{(k+1)(k+2)x^{k+1}} - \frac{Ax^{k+n+3}}{C_1(k+n+2)(k+n+3)} + C_2y + C_3x + C_4,$$

$$w(x,y) = (C_1x+C_2)^{-k-1}y^{k+2} - \frac{A}{(k+1)(k+2)}\int_a^x (x-t)t^n(C_1t+C_2)^{k+1}\,dt + C_3y + C_4x,$$

$$w(x,y) = (C_1y+C_2)^{-n-1}x^{n+2} - \frac{A}{(n+1)(n+2)}\int_a^y (y-t)t^k(C_1t+C_2)^{n+1}\,dt + C_3y + C_4x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Имеется также решение в виде произведения функций разных аргументов, указанное в п. 2° при $f(x) = Ax^n$, и решение такого же типа

$$w(x,y) = \psi(y)x^{\frac{n+2}{2}},$$

где функция $\psi = \psi(y)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$n(n+2)\psi\psi''_{yy} - (n+2)^2(\psi'_y)^2 + 4Ay^k = 0.$$

Подстановка $\psi = U^{-n/2}$ приводит его к уравнению Эмдена–Фаулера

$$U''_{yy} = \frac{8A}{n^2(n+2)}y^k U^{n+1},$$

точные решения которого для различных значений параметров k, n указаны в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

Другое точное решения при $f(x) = Ax^n$ можно получить из решения уравнения 7.2.2.18 при $f(u) = Au^k$, $n = 2\alpha + k\beta$, где α, β — произвольные постоянные.

8. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)y^{2k+2} + g(x)y^k.$

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^{k+2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt + C_1x + C_2y + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k+1)(k+2)\varphi\varphi''_{xx} - (k+2)^2(\varphi'_x)^2 + f(x) = 0.$$

9. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)e^{\lambda y}.$

1°. Точные решения:

$$w(x,y) = C_1\int_a^x (x-t)f(t)\,dt + C_2x - \frac{1}{C_1\lambda^2}e^{\lambda y} + C_3y + C_4,$$

$$w(x,y) = C_1e^{\beta x + \lambda y} - \frac{1}{C_1\lambda^2}\int_a^x (x-t)e^{-\beta t}f(t)\,dt + C_2x + C_3y + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, β — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\exp\left(\tfrac{1}{2}\lambda y\right),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi\varphi''_{xx} - (\varphi'_x)^2 + 4\lambda^{-2}f(x) = 0.$$

10. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)e^{2\lambda y} + g(x)e^{\lambda y}.$

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt + C_1x + C_2y + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi\varphi''_{xx} - (\varphi'_x)^2 + \lambda^{-2}f(x) = 0.$$

11. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)g(y).$

Точное решение:

$$w(x,y) = C_1\int_a^x (x-t)f(t)\,dt - \frac{1}{C_1}\int_b^y (y-\xi)g(\xi)\,d\xi + C_2x + C_3y + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

12. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax+by).$

1°. Точные решения:

$$w(x,y) = \pm\frac{x}{b}\int\sqrt{f(z)}\,dz + \varphi(z) + C_1x + C_2y, \qquad z = ax+by,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi(z)$ — произвольная функция.

2°. Преобразование

$$w = U(x,z), \quad z = ax+by$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.3:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b^{-2}f(z).$$

Здесь переменные x и z играют соответственно роль y и x в 7.2.2.3.

13. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^k f(ax+by).$

Преобразование

$$w = U(x,z), \quad z = ax+by$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.7:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b^{-2}x^k f(z).$$

Здесь переменные x и z играют соответственно роль y и x в 7.2.2.7.

14. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^{2k+2} f(ax+by) + x^k g(ax+by).$

Преобразование

$$w = U(x,z), \quad z = ax+by$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.8:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b^{-2}x^{k+2} f(z) + b^{-2}x^k f(g).$$

Здесь переменные x и z играют соответственно роль y и x в 7.2.2.8.

15. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{\lambda x} f(ax+by).$

Преобразование

$$w = U(x,z), \quad z = ax+by$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.9:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b^{-2}e^{\lambda x} f(z).$$

Здесь переменные x и z играют соответственно роль y и x в 7.2.2.9.

16. $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{2\lambda x} f(ax+by) + e^{\lambda x} g(ax+by).$

Преобразование

$$w = U(x,z), \quad z = ax+by$$

приводит к уравнению вида 7.2.2.10:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b^{-2}e^{2\lambda x} f(z) + b^{-2}e^{\lambda x} g(z).$$

Здесь переменные x и z играют соответственно роль y и x в 7.2.2.10.

17. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x^4} f\left(\dfrac{y}{x}\right).$

Частный случай уравнения 7.2.2.18 при $\alpha = -2$, $\beta = -1$.

1°. Интеграл:

$$w - x\frac{\partial w}{\partial x} - y\frac{\partial w}{\partial y} \pm \int \sqrt{f(z)}\,dz = C, \qquad z = \frac{y}{x},$$

где C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: M. N. Martin (1953), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 318).

2°. Точные решения:

$$w = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \pm \int \sqrt{f(z)}\,dz + C, \qquad z = \frac{y}{x},$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция.

18. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^{2\alpha} f(x^\beta y).$

Точное решение:

$$w(x,y) = x^{\alpha-\beta+1}u(z) \quad z = x^\beta y,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[\beta(\beta+1)zu'_z + (\alpha-\beta)(\beta-\alpha-1)u]u''_{zz} + (\alpha+1)^2(u'_z)^2 - f(z) = 0.$$

⊙ *Литература*: С. В. Хабиров (1990).

19. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax - by^2).$

Точные решения:

$$w(x,y) = \pm\int \sqrt{F(z) + C_1}\,dz + C_2 x + C_3 y + C_4, \qquad F(z) = \frac{1}{a^2 b}\int f(z)\,dz, \quad z = ax - by^2,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

20. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax^2 + bxy + cy^2).$

Точное решение при $b^2 \neq 4ac$:

$$w(x,y) = u(z) \quad z = ax^2 + bxy + cy^2,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2(4ac - b^2)zu'_z u''_{zz} + (4ac - b^2)(u'_z)^2 + f(z) = 0.$$

Интегрируя, получим

$$u(z) = \pm\int \sqrt{\frac{F(z)}{z}}\,dz + C_1, \quad F(z) = \frac{1}{b^2 - 4ac}\int f(z)\,dz + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

21. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy).$

Точное решение:

$$w(x,y) = u(z) \quad z = ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2\big[(4ac - b^2)z + as^2 + ck^2 - bks\big]u'_z u''_{zz} + (4ac - b^2)(u'_z)^2 + f(z) = 0.$$

Замена $V(z) = (u'_z)^2$ приводит к линейному уравнению первого порядка.

22. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{\alpha x} f(e^{\beta x} y).$

Точное решение:

$$w(x,y) = e^{\mu x} U(z), \quad z = e^{\beta x} y, \quad \mu = \tfrac{1}{2}\alpha - \beta,$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\beta^2 z U_z' U_{zz}'' - \mu^2 U U_{zz}'' + (\beta + \mu)^2 (U_z')^2 - f(z) = 0.$$

23. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{ky/x} f(x).$

Точное решение:

$$w(x,y) = \exp\left(\frac{ky}{2x}\right)\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x^2 \varphi \varphi_{xx}'' - x^2 (\varphi_x')^2 + 2x\varphi\varphi_x' - \varphi^2 + 4k^{-2} x^4 f(x) = 0.$$

24. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^{2\alpha} f(x^\beta e^{y/x}).$

Точное решение:

$$w(x,y) = x^{\alpha+2} u(z), \quad z = x^\beta e^{y/x},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$z^2 \left[\beta z u_z' + (\alpha+2)(\alpha+1)u\right] u_{zz}'' + z\Big\{\left[\beta - (\alpha+1)^2\right] z u_z' + (\alpha+2)(\alpha+1)u\Big\} u_z' + f(z) = 0.$$

⊙ *Литература*: С. В. Хабиров (1990).

25. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = y^{-4} \exp(2\alpha y^{-1}) f(xy^{-1} + \beta y^{-2}).$

Точное решение:

$$w = y \exp(\alpha y^{-1})\varphi(z) + C_1 y + C_2 x + C_3, \quad z = xy^{-1} + \beta y^{-2},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(2\beta\varphi_z' + \alpha^2\varphi)\varphi_{zz}'' - \alpha^2 {\varphi_z'}^2 + f(z) = 0.$$

⊙ *Литература*: С. В. Хабиров (1990).

▶ *О точных решениях неоднородного уравнения Монжа — Ампера для некоторых частных зависимостей $F = F(x,y)$ (не содержащих функционального произвола) см. С. В. Хабиров (1990) и N. H. Ibragimov (1994). О задаче Коши для уравнения Монжа — Ампера см. Р. Курант (1962, стр. 491–495).*

7.2.3. Уравнения вида $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x,y)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x,y)$

1. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x, C_2 y + C_3) + C_4 x + C_5 y + C_6,$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения, содержащие произвольные функции:

$$w(x,y) = \varphi(x) + C_1 y + C_2,$$
$$w(x,y) = \varphi(y) + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

3°. Точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + [C_1\varphi(x) + C_2]y + \frac{C_1^2}{2}\int_0^x (x-t)\frac{[\varphi_t'(t)]^2}{f(t)\varphi(t)}\,dt + C_3x + C_4,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi\varphi_{xx}'' - 2(\varphi_x')^2 = 0.$$

4°. Точное решение, содержащее произвольную степень y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^k + C_1x + C_2y + C_3$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k-1)f(x)\varphi\varphi_{xx}'' - k(\varphi_x')^2 = 0.$$

5°. Точное решение, содержащее экспоненциальную функцию y:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} + C_1x + C_2y + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi\varphi_{xx}'' - (\varphi_x')^2 = 0.$$

2. $\displaystyle\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x).$

1°. Точное решение линейное по переменной y:

$$w(x,y) = \pm y\int\sqrt{g(x)}\,dx + \varphi(x) + C_1y,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

2°. Точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + [C_1\varphi(x) + C_2]y + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)\frac{C_1^2[\varphi_t'(t)]^2 - g(t)}{f(t)\varphi(t)}\,dt + C_3x + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi\varphi_{xx}'' - 2(\varphi_x')^2 = 0.$$

Последнее имеет частное решение $\varphi = C_6$.

3. $\displaystyle\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 = f(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)y.$

1°. О точном решении квадратичном по y см. уравнение 7.2.3.5 при $g_2 = g_0 = 0$.

2°. Точное решение третьей степени по y:

$$w(x,y) = C_1y^3 + C_2y - \frac{1}{6C_1}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)}\,dt + C_3x + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Более общее решение имеет вид

$$w(x,y) = \varphi(x)y^3 + C_1y - \frac{1}{6}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)\,dt}{f(t)\varphi(t)} + C_2x + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2f(x)\varphi\varphi_{xx}'' - 3(\varphi_x')^2 = 0.$$

3°. См. решение уравнения 7.2.3.6 в п. 2° при $k = 1$.

4. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)y^2.$

1°. О точном решении квадратичном по y см. уравнение 7.2.3.5 при $g_1 = g_0 = 0$.

2°. Точное решение четвертой степени по y:

$$w(x,y) = C_1 y^4 + C_2 y - \frac{1}{12C_1}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)}\,dt + C_3 x + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Более общее решение имеет вид

$$w(x,y) = \varphi(x)y^4 + C_1 y - \frac{1}{12}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)\,dt}{f(t)\varphi(t)} + C_2 x + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$3f(x)\varphi\varphi''_{xx} - 4(\varphi'_x)^2 = 0.$$

3°. См. решение уравнения 7.2.3.6 в п. 2° при $k = 2$.

5. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g_2(x)y^2 + g_1(x)y + g_0(x).$

Точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f(x)\varphi\varphi''_{xx} &= 2(\varphi'_x)^2 - \tfrac{1}{2}g_2(x), \\ f(x)\varphi\psi''_{xx} &= 2\varphi'_x\psi'_x - \tfrac{1}{2}g_1(x), \\ f(x)\varphi\chi''_{xx} &= \tfrac{1}{2}(\psi'_x)^2 - \tfrac{1}{2}g_0(x). \end{aligned}$$

6. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)y^k.$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \frac{C_1 y^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + C_2 y - \frac{1}{C_1}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)}\,dt + C_3 x + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^{\frac{k+2}{2}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(k+2)f(x)\varphi\varphi''_{xx} - (k+2)^2(\varphi'_x)^2 + 4g(x) = 0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,y) = \psi(x)y^{k+2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)\psi(t)}\,dt + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функция $\psi = \psi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k+1)f(x)\psi\psi''_{xx} - (k+2)(\psi'_x)^2 = 0.$$

7. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)y^{2k+2} + h(x)y^k.$

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^{k+2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_a^x (x-t)\frac{h(t)}{f(t)\varphi(t)}\,dt + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k+1)(k+2)f(x)\varphi\varphi''_{xx} - (k+2)^2(\varphi'_x)^2 + g(x) = 0.$$

8. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)e^{\lambda y}.$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = C_1 e^{\lambda y} + C_2 y - \frac{1}{C_1 \lambda^2}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)}\,dt + C_3 x + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\exp\left(\tfrac{1}{2}\lambda y\right),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi\varphi''_{xx} - (\varphi'_x)^2 + 4\lambda^{-2}g(x) = 0.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,y) = \psi(x)e^{\lambda y} - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x (x-t)\frac{g(t)}{f(t)\psi(t)}\,dt + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функция $\psi = \psi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\psi\psi''_{xx} - (\psi'_x)^2 = 0.$$

9. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)e^{2\lambda y} + h(x)e^{\lambda y}.$

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x (x-t)\frac{h(t)}{f(t)\varphi(t)}\,dt + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(x)\varphi\varphi''_{xx} - (\varphi'_x)^2 + \lambda^{-2}g(x) = 0.$$

10. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f_1(x)g_1(y)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_2(x)g_2(y).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x,y) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $f_1 g_1 \neq 0$:

$$w(x,y) = C_1\int_a^x (x-t)\frac{f_2(t)}{f_1(t)}\,dt - \frac{1}{C_1}\int_b^y (y-\xi)\frac{g_2(\xi)}{g_1(\xi)}\,d\xi + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

3°. Точные решения при $f_2 g_2 = 0$:

$$w(x,y) = \varphi(x) + C_1 y + C_2,$$
$$w(x,y) = \varphi(y) + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

4°. Точное решение при $f_2 g_2 = 0$:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y) + C_1 x + C_2 y + C_3,$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$f_1(x)\varphi\varphi''_{xx} - C_4(\varphi'_x)^2 = 0,$$
$$C_4 g_1(y)\psi\psi''_{yy} - (\psi'_y)^2 = 0.$$

11. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(ax+by)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(ax+by).$

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(z) + C_1x^2 + C_2xy + C_3y^2 + C_4x + C_5y, \quad z = ax+by,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(ab\varphi''_{zz} + C_2)^2 = f(z)(a^2\varphi''_{zz} + 2C_1)(b^2\varphi''_{zz} + 2C_3) + g(z),$$

которое легко интегрируется (предварительно надо разрешить его относительно φ''_{zz}).

7.2.4. Другие уравнения

1. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + g(x)w + h_2(x)y^2 + h_1(x)y + h_0(x).$

Точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&2f(x)\varphi\varphi''_{xx} - 4(\varphi'_x)^2 + g(x)\varphi + h_2(x) = 0,\\
&2f(x)\varphi\psi''_{xx} - 4\varphi'_x\psi'_x + g(x)\psi + h_1(x) = 0,\\
&2f(x)\varphi\chi''_{xx} - (\psi'_x)^2 + g(x)\chi + h_0(x) = 0.
\end{aligned}$$

2. $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = f_1(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[f_2(x)w + f_3(x)y^2 + f_4(x)y + f_5(x)\right]\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 +$
$+ g_1(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [g_2(x)y + g_3(x)]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left[g_4(x)w + g_5(x)y^2 + g_6(x)y + g_7(x)\right]\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} +$
$+ h_1(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + h_2(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left[h_3(x)y + h_4(x)\right]\dfrac{\partial w}{\partial y} + s_1(x)w + s_2(x)y^2 + s_3(x)y + s_4(x).$

Уравнение имеет точное решение квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x).$$

7.3. Уравнение Беллмана и родственные уравнения

7.3.1. Уравнения с квадратичной нелинейностью

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial w}{\partial x} - f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0.$

Это уравнение встречается в задачах оптимальной коррекции случайных возмущений и является следствием уравнения Беллмана [см. Ф. Л. Черноусько (1971), Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский (1978)]. Переменная $t = T - \tau$ играет роль «обратного» времени.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, y + C_3, t) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w = U(z,\tau), \quad z = y \pm 2\left[x\int g(t)\,dt + C_1x\right]^{1/2} + C_2, \quad \tau = \int f(t)\,dt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $U = U(z,\tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

⊙ *Литература*: А. С. Братусь, К. А. Волосов (2001).

3°. Точное решение:

$$w = u(\xi, \tau), \quad \xi = y + C_1 x + \frac{1}{C_1}\int g(t)\,dt + C_2, \quad \tau = \int f(t)\,dt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi, \eta)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

4°. Решения из пп. 2°, 3° являются частными случаями более общего решения вида

$$w = U(z, \tau), \quad z = y + \varphi(x, t), \quad \tau = \int f(t)\,dt,$$

где функция $\varphi = \varphi(x, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = g(t), \tag{1}$$

а функция $U = U(z, \tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Полный интеграл уравнения (1) имеет вид

$$\varphi = C_1 x + \frac{1}{C_1}\int g(t)\,dt + C_2, \tag{2}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общий интеграл уравнения (1) можно представить в параметрической форме с помощью полного интеграла (2) и двух выражений [см. Э. Камке (1966), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Moussiaux (2002)]

$$C_2 = \psi(C_1),$$
$$x - \frac{1}{C_1^2}\int g(t)\,dt + \psi'(C_1) = 0,$$

где $\psi = \psi(C_1)$ — произвольная функция, штрих обозначает производную (C_1 и C_2 играют роль параметров).

Замечание. Решению из п. 2° соответствует $\psi(C_1) = \text{const}$.

5°. Точные решения:

$$w = \pm \exp[\lambda y + \zeta(x, t)],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x, t)$ описывается уравнением первого порядка

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \lambda^2 f(t)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \lambda^2 g(t) = 0. \tag{3}$$

Полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$\zeta = C_1 x + \lambda^2 \int \Big[f(t) + \frac{1}{C_1} g(t)\Big]\,dt + C_2, \tag{4}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общий интеграл уравнения (3) можно представить в параметрическом виде с помощью полного интеграла (4) и двух выражений

$$C_2 = \varphi(C_1),$$
$$x - \frac{\lambda^2}{C_1^2}\int g(t)\,dt + \varphi'(C_1) = 0,$$

где $\varphi = \varphi(C_1)$ — произвольная функция (C_1 и C_2 играют роль параметров).

6°. Точное решение:

$$w = e^{\lambda x}\theta(y, t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(y, t)$ описывается двумерным уравнением

$$\lambda\theta\frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda f(t)\theta\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - g(t)\Big(\frac{\partial \theta}{\partial y}\Big)^2 = 0.$$

7°. О задаче Коши и автомодельных решениях уравнения для степенных функций $f(t)$ и $g(t)$ см. работы Ф. Л. Черноусько (1971), Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский (1978).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial w}{\partial x} - f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(t)h(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^2 = 0.$

Замена $z = \int h(x)\,dx$ приводит к уравнению вида 7.3.1.1 для $w = w(z, y, t)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial w}{\partial x} - f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(x,t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^2 = 0.$

1°. Точное решение:

$$w = U(z,\tau), \quad z = y + \varphi(x,t), \quad \tau = \int f(t)\,dt.$$

Здесь функция $\varphi = \varphi(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = g(x,t), \tag{1}$$

а функция $U = U(z,\tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Полные интегралы и общие решения (интегралы) уравнения (1) для различных функций $g(x,t)$ можно найти в книге A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Moussiaux (2002). О решениях уравнения (2) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2°. Точные решения:

$$w = \pm\exp\big[\lambda y + \zeta(x,t)\big],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x,t)$ описывается нелинейным уравнением с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \lambda^2 f(t)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \lambda^2 g(x,t) = 0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial w}{\partial x} - f(x,t)\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(x,t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^2 = 0.$

Точные решения:

$$w = \pm\exp\big[\lambda y + \zeta(x,t)\big],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x,t)$ описывается нелинейным уравнением с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \lambda^2 f(x,t)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \lambda^2 g(x,t) = 0.$$

7.3.2. Уравнения со степенной нелинейностью

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k - f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)^{k+1} = 0.$

Это уравнение встречается в задачах оптимальной коррекции случайных возмущений и является следствием уравнения Беллмана [см. Ф. Л. Черноусько (1971), Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский (1978)]. Переменная $t = T - \tau$ играет роль «обратного» времени.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, y + C_3, t) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w = U(z,\tau), \quad \tau = \int f(t)\,dt + C_1,$$

$$z = y + (x + C_2)^{\frac{k}{k+1}}\left[\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\int g(t)\,dt + C_3\right]^{\frac{1}{k+1}} + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, а функция $U = U(z,\tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

⦿ *Литература*: А. С. Братусь, К. А. Волосов (2001).

3°. Точное решение:

$$w = u(\xi,\tau), \quad \xi = y + C_1 x + \frac{1}{C_1^k}\int g(t)\,dt + C_2, \quad \tau = \int f(t)\,dt + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функция $u = u(\xi,\eta)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

4°. Решения из пп. 2°, 3° являются частными случаями более общего решения вида

$$w = U(z,\tau), \quad z = y + \varphi(x,t), \quad \tau = \int f(t)\,dt,$$

где функция $\varphi = \varphi(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^k = g(t), \tag{1}$$

а функция $U = U(z,\tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Полный интеграл уравнения (1) имеет вид

$$\varphi = C_1 x + \frac{1}{C_1^k}\int g(t)\,dt + C_2, \tag{2}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общий интеграл уравнения (1) можно представить в параметрической форме с помощью полного интеграла (2) и двух выражений [см. Э. Камке (1966), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Moussiaux (2002)]

$$C_2 = \psi(C_1),$$
$$x - \frac{k}{C_1^{k+1}}\int g(t)\,dt + \psi'(C_1) = 0,$$

где $\psi = \psi(C_1)$ — произвольная функция, штрих обозначает производную (C_1 и C_2 играют роль параметров).

5°. Точное решение:

$$w = \exp\bigl[\lambda y + \zeta(x,t)\bigr],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x,t)$ описывается уравнением первого порядка

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^2 f(t)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^{k+1} g(t) = 0. \tag{3}$$

Полный интеграл этого уравнения имеет вид [см. A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Moussiaux (2002)]

$$\zeta = C_1 x + \int\left[\lambda^2 f(t) + \frac{\lambda^{k+1}}{C_1^k} g(t)\right]dt + C_2, \tag{4}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общий интеграл уравнения (3) можно представить в параметрическом виде с помощью полного интеграла (4) и двух выражений

$$C_2 = \varphi(C_1),$$
$$x - k\frac{\lambda^{k+1}}{C_1^{k+1}}\int g(t)\,dt + \varphi'(C_1) = 0,$$

где $\varphi = \varphi(C_1)$ — произвольная функция (C_1 и C_2 играют роль параметров).

6°. Точное решение:

$$w = e^{\lambda x}\theta(y,t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(y,t)$ описывается двумерным уравнением

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - f(t)\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - \frac{g(t)}{(\lambda\theta)^k}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^{k+1} = 0.$$

7°. О задаче Коши и автомодельных решениях уравнения для степенных функций $f(t)$ и $g(t)$ см. работы Ф. Л. Черноусько (1971), Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский (1978).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k - f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(t)h(x)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{k+1} = 0.$

Замена $z = \int [h(x)]^{1/k}\,dx$ приводит к уравнению вида 7.3.2.1 для $w = w(z,y,t)$.

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k - f(t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(x,t)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{k+1} = 0.$

1°. Точное решение:

$$w = U(z,\tau), \quad z = y + \varphi(x,t), \quad \tau = \int f(t)\,dt.$$

Здесь функция $\varphi = \varphi(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^k = g(x,t), \tag{1}$$

а функция $U = U(z,\tau)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Полные интегралы и общие решения (интегралы) уравнения (1) для различных функций $g(x,t)$ можно найти в книге A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Moussiaux (2002). О решениях уравнения (2) см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

2°. Точное решение:

$$w = \exp\bigl[\lambda y + \zeta(x,t)\bigr],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x,t)$ описывается нелинейным уравнением с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^2 f(t)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^{k+1}g(x,t) = 0.$$

4. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k - f(x,t)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - g(x,t)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{k+1} = 0.$

Точное решение:

$$w = \exp\bigl[\lambda y + \zeta(x,t)\bigr],$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x,t)$ описывается нелинейным уравнением с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^2 f(x,t)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^k - \lambda^{k+1}g(x,t) = 0.$$

8. Уравнения второго порядка общего вида

8.1. Эволюционные уравнения

8.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(w,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$

Предварительные замечания. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F\Big(w,\, \frac{\partial w}{\partial x},\, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big). \qquad (1)$$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения (1). Тогда функция $w(x+C_1, t+C_2)$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. В общем случае уравнение (1) допускает точные решения типа бегущей волны

$$w = w(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t, \qquad (2)$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(w,\, kw'_\xi,\, k^2 w''_{\xi\xi}\big) - \lambda w'_\xi = 0.$$

В данном разделе рассмотрены частные случаи уравнения (1), которые помимо решения типа бегущей волны (2) допускают также другие точные решения.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$.

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов (A, B, C — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = F(A)t + \tfrac{1}{2}Ax^2 + Bx + C.$$

2°. Точное решение (A, B, C — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = (Ax+B)t + C + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\varphi''_{xx}\big) = Ax + B.$$

3°. Точное решение (A, B, k, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = At + B + \psi(\xi), \quad \xi = kx + \lambda t,$$

где функция $\psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(k^2\psi''_{\xi\xi}\big) = \lambda\psi'_\xi + A.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t\,\Theta(\zeta), \quad \zeta = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $\Theta(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\Theta''_{\zeta\zeta}\big) + \tfrac{1}{2}\zeta\Theta'_\zeta - \Theta = 0.$$

5°. Замена $u(x,t) = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит исходное уравнение к уравнению вида 1.6.16.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad f(z) = F'_z(z).$$

6°. Преобразование

$$\bar{t} = \alpha t + \gamma_1, \quad \bar{x} = \beta_1 x + \beta_2 w + \gamma_2,$$
$$\bar{w} = \beta_1\bigl(\beta_4 w + \tfrac{1}{2}\beta_3 x^2 + \gamma_3 x\bigr) + \gamma_4 t + \gamma_5 + \beta_2\bigl[\beta_3(x w_x - w) + \gamma_3 w_x + \tfrac{1}{2}\beta_4 w_x^2\bigr],$$
$$\bar{w}_{\bar{x}} = \beta_3 x + \beta_4 w_x + \gamma_3,$$

где α, β_i, γ_i — произвольные постоянные ($\alpha \neq 0$, $\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3 \neq 0$), а индексы x, $\bar{x}$ обозначают соответствующие частные производные, переводит рассматриваемое уравнение в уравнение такого же вида. При этом правая часть уравнения преобразуется следующим образом:

$$\bar{F}(\bar{w}_{\bar{x}\bar{x}}) = \frac{\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3}{\alpha} F(w_{xx}) + \frac{\gamma_4}{\alpha}.$$

⊙ *Литература*: И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов (1989), N. H. Ibragimov (1994).

Частный случай. Уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr)^k, \quad k > 0, \quad k \neq 1.$$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + aC_1^k t + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \bigl[a(1-k)t + C_1\bigr]^{\frac{1}{1-k}} u(x) + C_2,$$

где функция $u(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравненнем $(u''_{xx})^k - u = 0$, общее решение которого можно представить в неявном виде

$$\int \Bigl(\frac{2k}{1+k} u^{\frac{1+k}{k}} + C_3\Bigr)^{-1/2} du = \pm x + C_4.$$

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = F\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr).$

Помимо точного решения типа бегущей волны это уравнение имеет также более сложное точное решение в вида

$$w(x,t) = At + B + \varphi(\xi), \quad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(k\varphi'_\xi, k^2\varphi''_{\xi\xi}\bigr) - \lambda\varphi'_\xi - A = 0.$$

Частный случай. Уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x^{3/2} + \varphi_3(t)x^3,$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_1' = \tfrac{9}{8}a\varphi_2^2,$$
$$\varphi_2' = \tfrac{45}{4}a\varphi_2\varphi_3,$$
$$\varphi_3' = 18a\varphi_3^2.$$

Штрихи обозначают производные по t.

2°. Точное решение в виде полинома третьей степени по x:

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2 + \psi_4(t)x^3,$$

где функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_1' = 2a\psi_2\psi_3,$$
$$\psi_2' = 2a(2\psi_3^2 + 3\psi_2\psi_4),$$
$$\psi_3' = 18a\psi_3\psi_4,$$
$$\psi_4' = 18a\psi_4^2.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = \frac{\theta(x) + C_3}{C_1 t + C_2} + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\theta'_x \theta''_{xx} + C_1\theta + C_1 C_3 = 0,$$

решение которого можно представить в неявной форме.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[F(w, w_x)\Big], \qquad w_x = \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1°. Преобразование

$$\bar t = t - t_0, \quad \bar x = -\int_{x_0}^{x} w(y,t)\,dy - \int_{t_0}^{t} F\big(w(x_0,\tau), w_x(x_0,\tau)\big)\,d\tau, \quad \bar w(\bar x, \bar t) = \frac{1}{w(x,t)}$$

переводит (ненулевое) решение $w(x,t)$ исходного уравнения в решение $\bar w(\bar x, \bar t)$ уравнения аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar w}{\partial \bar t} = \frac{\partial}{\partial \bar x}\Big[\bar F(\bar w,\, \bar w_{\bar x})\Big],$$

где

$$\bar F(w, w_x) = wF\big(w^{-1},\, w^{-3} w_x\big). \tag{1}$$

2°. В частном случае

$$F(w, w_x) = g(w)(w_x)^k$$

из формулы (1) получим

$$\bar F(w, w_x) = \bar g(w)(w_x)^k, \qquad \bar g(w) = w^{1-3k} g(w^{-1}).$$

⊙ *Литература*: W. Strampp (1982), J. R. Burgan, A. Munier, M. R. Feix, E. Fijalkow (1984), N. H. Ibragimov (1994).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Точное решение:

$$w(x,t) = t\varphi(\xi), \quad \xi = kx + \lambda \ln t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\Big(k\frac{\varphi'_\xi}{\varphi},\ k^2\frac{\varphi''_{\xi\xi}}{\varphi}\Big) = \lambda\varphi'_\xi + \varphi.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ce^{\lambda t}\varphi(x),$$

где C, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\Big(\frac{\varphi'_x}{\varphi},\ \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}\Big) = \lambda.$$

Это уравнение имеет частные решения вида $\varphi(x) = e^{\alpha x}$, где α — корень алгебраического (или трансцендентного) уравнения $F(\alpha, \alpha^2) - \lambda = 0$.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ce^{\lambda t}\psi(\xi), \quad \xi = kx + \beta t,$$

где C, k, λ, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\psi F\Big(k\frac{\psi'_\xi}{\psi},\ k^2\frac{\psi''_{\xi\xi}}{\psi}\Big) = \beta\psi'_\xi + \lambda\psi.$$

Это уравнение имеет частные решения вида $\psi(\xi) = e^{\mu\xi}$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^{\beta} F\left(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

При $\beta = 0$ и $\beta = 1$ см. соответственно уравнения 8.1.1.2 и 8.1.1.5.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \big[(1-\beta)At + B\big]^{\frac{1}{1-\beta}} \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi^{\beta-1} F\left(\frac{\varphi'_x}{\varphi},\ \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}\right) = A.$$

2°. Точное решение:

$$w(z,t) = (t+C)^{\frac{1}{1-\beta}} \Theta(z), \quad z = kx + \lambda \ln(t+C),$$

где C, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\Theta^{\beta} F\left(k\frac{\Theta'_z}{\Theta},\ k^2\frac{\Theta''_{zz}}{\Theta}\right) = \lambda\Theta'_z + \frac{1}{1-\beta}\Theta.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\beta w} F\left(\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(A\beta t + B) + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\varphi} F\big(\varphi'_x,\ \varphi''_{xx}\big) + A = 0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(t+C) + \Theta(\xi), \quad \xi = kx + \lambda\ln(t+C),$$

где C, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\Theta} F\big(k\Theta'_\xi,\ k^2\Theta''_{\xi\xi}\big) = \lambda\Theta'_\xi - \frac{1}{\beta}.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 8.1.1.2.

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(\xi), \quad \xi = kx + \lambda t.$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(k\varphi''_{\xi\xi}/\varphi'_\xi\big) = \lambda\varphi'_\xi + A.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = t\Theta(z) + C, \quad z = kx + \lambda\ln t$$

где C, k, β, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(k\Theta''_{zz}/\Theta'_z\big) = \lambda\Theta'_z + \Theta.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x} F\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big/ \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 8.1.1.2.

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(z), \qquad z = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k\varphi'_z F\big(k\varphi''_{zz}/\varphi'_z\big) = \lambda\varphi'_z + A.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{\beta t}\Theta(\xi) + B, \qquad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, β, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k\Theta'_\xi F\big(k\Theta''_{\xi\xi}/\Theta'_\xi\big) = \lambda\Theta'_\xi + \beta\Theta.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^\beta F\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big/ \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 8.1.1.2. При $\beta = 0$ и $\beta = 1$ см. соответственно уравнения 8.1.1.8 и 8.1.1.9.

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = \big[A(1-\beta)t + B\big]^{\frac{1}{1-\beta}}\varphi(x) + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\varphi'_x)^\beta F\big(\varphi''_{xx}/\varphi'_x\big) = A\varphi.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = (t+A)^{\frac{1}{1-\beta}}\Theta(z) + B, \qquad z = kx + \lambda\ln(t+A),$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k^\beta(\Theta'_z)^\beta F\big(k\Theta''_{zz}/\Theta'_z\big) = \lambda\Theta'_z + \frac{1}{1-\beta}\Theta.$$

8.1.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(x, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$

Предварительные замечания. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F\Big(x,\, w,\, \frac{\partial w}{\partial x},\, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big). \tag{1}$$

Пусть вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$w = F(x,\, w,\, w'_x,\, w''_{xx})$$

после линейного преобразования

$$x = \varphi(z), \quad w = \psi(z)u$$

и последующего сокращения обеих частей на функцию $\psi(z)$ приводится к автономному виду

$$u = \mathcal{F}(u,\, u'_z,\, u''_{zz}),$$

где $\mathcal{F} = F/\psi$. Тогда рассматриваемое уравнение в частных производных (1) таким же преобразованием

$$x = \varphi(z), \quad w(x,t) = \psi(z)u(z,t)$$

проводится к уравнению
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{F}\Big(u,\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big),$$
которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u = u(kz + \lambda t)$.

Сказанное позволяет использовать различные известные преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Э. Камке, 1976; В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*) для построения точных решений уравнений в частных производных. Если исходное уравнение было линейным, то такие преобразования будут приводить к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Точное решение:
$$w(x,t) = Axt + Bt + C + \varphi(x),$$
где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$F\big(x,\ \varphi''_{xx}\big) = Ax + B.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:
$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$
где A и B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$F\big(x,\ \varphi'_x,\ \varphi''_{xx}\big) = A.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x},\ x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:
$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$
где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$F\big(\varphi'_x,\ x\varphi''_{xx}\big) = A.$$

2°. Точное решение:
$$w(x,t) = x\Theta(\xi) + C, \quad \xi = \frac{x}{t},$$
где C — произвольная постоянная, а функция $\Theta(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$F\big(\Theta + \xi\Theta'_\xi,\ 2\xi\Theta'_\xi + \xi^2\Theta''_{\xi\xi}\big) + \xi^2\Theta'_\xi = 0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(w,\ x\dfrac{\partial w}{\partial x},\ x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Замена $x = \pm e^z$ приводит к уравнению
$$\frac{\partial w}{\partial t} = F\Big(w,\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial w}{\partial z}\Big),$$
которое имеет точное решение в типа бегущей волны $w = w(kz + \lambda t)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k F\Big(w,\ x\dfrac{\partial w}{\partial x},\ x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Автомодельное решение:
$$w(x,t) = w(z), \quad z = xt^{1/k},$$
где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$kz^{k-1}F\big(w,\ zw'_z,\ z^2 w''_{zz}\big) - w'_z = 0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k F\Big(w,\, x\dfrac{\partial w}{\partial x},\, x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + ax\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Переходя к новым независимым переменным

$$z = xe^{at}, \quad \tau = \frac{1}{ak}\big(1 - e^{-akt}\big),$$

получим уравнение вида 8.1.2.5:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^k F\Big(w,\, z\frac{\partial w}{\partial z},\, z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big).$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\lambda x} F\Big(w,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$.

Точное решение:

$$w(x,t) = w(z), \quad z = \lambda x + \ln t,$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^z F\big(w,\, \lambda w'_z,\, \lambda^2 w''_{zz}\big) - w'_z = 0.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\Big(x,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ae^{\mu t}\varphi(x),$$

где A, μ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\Big(x,\, \frac{\varphi'_x}{\varphi},\, \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}\Big) = \mu.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^\beta F\Big(x,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$.

При $\beta = 1$ см. уравнение 8.1.2.8.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \big[(1-\beta)At + B\big]^{\frac{1}{1-\beta}}\varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi^{\beta-1} F\Big(x\, \frac{\varphi'_x}{\varphi},\, \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}\Big) = A.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\beta w} F\Big(x,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$.

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(A\beta t + B) + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\varphi} F\big(x,\, \varphi'_x,\, \varphi''_{xx}\big) + A = 0.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x} F\Big(x,\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big/ \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$.

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi'_x F\big(x,\, \varphi''_{xx}/\varphi'_x\big) = A.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{\mu t}\Theta(x) + B$$

где A, B, μ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\Theta'_x F\bigl(x,\, \Theta''_{xx}/\Theta'_x\bigr) = \mu\Theta.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^{\beta} F\Bigl(x,\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

При $\beta = 1$ см. уравнение 8.1.2.11.

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\varphi'_x)^{\beta} F\bigl(x,\, \varphi''_{xx}/\varphi'_x\bigr) = A.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \bigl[A(1-\beta)t + C_1\bigr]^{\frac{1}{1-\beta}} \bigl[\Theta(x) + B\bigr] + C_2,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\Theta'_x)^{\beta} F\bigl(x,\, \Theta''_{xx}/\Theta'_x\bigr) = A\Theta + AB.$$

8.1.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Bigl(ax + bt,\, w,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr).$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = ax + bt,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(\xi,\, w,\, aw'_{\xi},\, a^2 w''_{\xi\xi}\bigr) - bw'_{\xi} = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)x^k \Phi\Bigl(w,\, x\dfrac{\partial w}{\partial x},\, x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя к новым независимым переменным

$$z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{-k}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$

приходим к более простому уравнению вида 8.1.2.5:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^k \Phi\Bigl(w,\, z\frac{\partial w}{\partial z},\, z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Bigr).$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)w^{\beta} \Phi\Bigl(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(x,\tau), \quad \tau = \int f(t)G^{\beta-1}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]$$

приводит к более простому уравнению вида 8.1.1.8:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u^{\beta} \Phi\Bigl(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x},\, \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Bigr),$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u = u(Ax + B\tau)$ и решение в виде произведения функций разных аргументов $u = \varphi(x)\psi(\tau)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=w\Phi\Big(t,\,\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=A\exp\Big[\lambda x+\int\Phi(t,\lambda^2)\,dt\Big],$$

$$w(x,t)=\big[A\operatorname{ch}(\lambda x)+B\operatorname{sh}(\lambda x)\big]\exp\Big[\int\Phi(t,\lambda^2)\,dt\Big],$$

$$w(x,t)=\big[A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)\big]\exp\Big[\int\Phi(t,-\lambda^2)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=wF\Big(t,\,\dfrac{f(x)}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$w(x,t)=\varphi(x)\exp\Big[\int F(t,\lambda)\,dt\Big],$$

где функция $\varphi=\varphi(x)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению $f(x)\varphi''_{xx}=\lambda\varphi$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=w\Phi\Big(t,\,\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\,\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Точное решение:

$$w(x,t)=A\exp\Big[\lambda x+\int\Phi(t,\lambda,\lambda^2)\,dt\Big],$$

где A, λ — произвольные постоянные.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=w\Phi\Big(t,\,\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)+f(t)e^{\lambda x}.$

Точное решение:

$$w(x,t)=e^{\lambda x}E(t)\Big[A+\int\frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big]+Be^{-\lambda x}E(t),\quad E(t)=\exp\Big[\int\Phi(t,\lambda^2)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=w\Phi\Big(t,\,\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)+f(t)e^{\lambda x}+g(t)e^{-\lambda x}.$

Точное решение:

$$w(x,t)=e^{\lambda x}E(t)\Big[A+\int\frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big]+e^{-\lambda x}E(t)\Big[B+\int\frac{g(t)}{E(t)}\,dt\Big],$$

$$E(t)=\exp\Big[\int\Phi(t,\lambda^2)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=wF_1\Big(t,\,\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)+e^{\lambda x}F_2\Big(t,\,\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)+e^{-\lambda x}F_3\Big(t,\,\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t)=e^{\lambda x}\varphi(t)+e^{-\lambda x}\psi(t).$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=w\Phi\Big(t,\,\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)+f(t)\operatorname{ch}(\lambda x)+g(t)\operatorname{sh}(\lambda x).$

Точное решение:

$$w(x,t)=\operatorname{ch}(\lambda x)E(t)\Big[A+\int\frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big]+\operatorname{sh}(\lambda x)E(t)\Big[B+\int\frac{g(t)}{E(t)}\,dt\Big],$$

$$E(t)=\exp\Big[\int\Phi(t,\lambda^2)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + f(t)\cos(\lambda x).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)E(t)\Big[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big] + B\sin(\lambda x)E(t),$$
$$E(t) = \exp\Big[\int \Phi(t,-\lambda^2)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + f(t)\cos(\lambda x) + g(t)\sin(\lambda x).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)E(t)\Big[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big] + \sin(\lambda x)E(t)\Big[B + \int \frac{g(t)}{E(t)}\,dt\Big],$$
$$E(t) = \exp\Big[\int \Phi(t,-\lambda^2)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF_1\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + \cos(\lambda x)F_2\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + \sin(\lambda x)F_3\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)\varphi(t) + \sin(\lambda x)\psi(t).$$

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + f(t)e^{\lambda x}.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}E(t)\Big[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big],\quad E(t) = \exp\Big[\int \Phi(t,\lambda,\lambda^2)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)w^\beta\Phi\Big(x,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(x,\tau),\quad \tau = \int f(t)G^{\beta-1}(t)\,dt,\qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big]$$

приводит к более простому уравнению вида 8.1.2.9:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u^\beta\Phi\Big(x,\ \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big),$$

которое имеет точное решение в произведения функций разных аргументов $u = \varphi(x)\psi(\tau)$.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k\Phi\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + g(t)w + h(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (C — произвольная постоянная):

$$\varphi'_t = Af(t)\varphi^k + g(t)\varphi, \qquad (1)$$
$$\psi'_t = g(t)\psi + Bf(t)\varphi^k + h(t), \qquad (2)$$

а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$(\Theta'_x)^k\Phi(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x) = A\Theta + B. \qquad (3)$$

Общее решение системы (2) дается формулами

$$\varphi(t) = G(t)\Big[C - kA\int f(t)G^{k-1}(t)\,dt\Big]^{\frac{1}{1-k}},\quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$
$$\psi(t) = DG(t) + G(t)\int \big[Bf(t)\varphi^k(t) + h(t)\big]\frac{dt}{G(t)},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

При $k=1$ и $\Phi(x,y)=\Phi(y)$ решение уравнения (3) имеет вид

$$\Theta(x) = \alpha e^{\lambda x} - B/A,$$

где α — произвольная постоянная, а λ находится из алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\lambda\Phi(\lambda) = A$.

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \big[f_1(t)w + f_0(t)\big]\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k\Phi\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + g_1(t)w + g_0(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (C — произвольная постоянная):

$$\varphi'_t = Cf_1(t)\varphi^{k+1} + g_1(t)\varphi, \tag{1}$$
$$\psi'_t = \big[Cf_1(t)\varphi^k + g_1(t)\big]\psi + Cf_0(t)\varphi^k + g_0(t), \tag{2}$$

а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$(\Theta'_x)^k\Phi(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x) = C. \tag{3}$$

Общее решение системы (2) дается формулами

$$\varphi(t) = G(t)\Big[A - kC\int f_1(t)G^k(t)\,dt\Big]^{-1/k},\quad G(t) = \exp\Big[\int g_1(t)\,dt\Big],$$
$$\psi(t) = B\varphi(t) + \varphi(t)\int \big[Cf_0(t)\varphi^k(t) + g_0(t)\big]\frac{dt}{\varphi(t)},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

Далее считаем, что функция Φ не зависит явно от x, т. е. $\Phi(x,y)=\Phi(y)$. При $\Phi(0)\neq 0$ и $\Phi(0)\neq\infty$ частное решение уравнения (3) имеет вид $\Theta(x) = \alpha x + \beta$, где $\alpha^k\Phi(0) = C$, а β — произвольная постоянная.

При $k=0$ общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\Theta(x) = \alpha e^{\lambda x} + \beta,$$

где α, β — произвольные постоянные, а λ находится из алгебраического (или трансцендентного) уравнения: $\Phi(\lambda) = C$.

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)e^{\beta w}\Phi\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + g(t).$

Преобразование

$$w(x,t) = u(x,\tau) + G(t),\quad \tau = \int f(t)\exp[\beta G(t)]\,dt,\qquad G(t) = \int g(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению вида 8.1.1.7:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{\beta u}\Phi\Big(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big),$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u = u(Ax + B\tau)$ и решение в виде суммы функций разных аргументов $u = \varphi(x) + \psi(\tau)$.

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)e^{\beta w}\Phi\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + g(t).$

Преобразование

$$w(x,t) = u(x,\tau) + G(t), \quad \tau = \int f(t)\exp\bigl[\beta G(t)\bigr]\,dt, \qquad G(t) = \int g(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению вида 8.1.2.10:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{\beta u}\Phi\Big(x,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big),$$

которое имеет точное решение в произведения функций разных аргументов $u = \varphi(x) + \psi(\tau)$.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\Phi\Big(w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$\tau = \int f(t)\,dt, \qquad z = x + \int g(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \Phi\Big(w,\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big),$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $w = w(kz + \lambda\tau)$.

21. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = C\exp\Big[\lambda x + \int F(t,\lambda^2,0)\,dt\Big],$$

где C, λ — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi'_t = \varphi F\bigl(t,\lambda^2,4AB\lambda^2\varphi^2\bigr)$.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = [A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi'_t = \varphi F\bigl(t,-\lambda^2,-\lambda^2(A^2+B^2)\varphi^2\bigr)$.

⊙ *Литература*: Ph. W. Doyle (1996), рассматривался случай $\partial_t F \equiv 0$.

22. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\Big(t,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial w}{\partial x} - x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w - 2x\dfrac{\partial w}{\partial x} + x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (C_2x^2 + C_1x + C_0)\varphi(t),$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi'_t = \varphi F\bigl(t,2C_2\varphi,C_1\varphi,2C_0\varphi\bigr)$.

⊙ *Литература*: Ph. W. Doyle (1996), рассматривался случай $\partial_t F \equiv 0$.

23. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f\Big(x,\ t,\ w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)\Phi\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \int g(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\Phi\bigl(x,\varphi'_x,\varphi''_{xx}\bigr) = 0.$$

24. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f\Big(x,\, t,\, w,\, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)\Phi\Big(x,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + g(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = C\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big]\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\Phi\Big(x,\, \frac{\varphi'_x}{\varphi},\, \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}\Big) = 0.$$

25. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = g_0(t)F_0\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + xg_1(t)F_1\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + x^2 g_2(t)F_2\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) +$
$+ h(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + [p_0(t) + xp_1(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x} + q(t)w + s_0(t) + xs_1(t) + x^2 s_2(t).$

Уравнение имеет точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = x^2\varphi(t) + x\psi(t) + \chi(t).$$

8.1.4. Уравнения вида $F\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = 0$

1. $F\Big(at + bx,\, w,\, \dfrac{\partial w}{\partial t},\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = 0.$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = at + bx,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F(\xi,\, w,\, aw'_\xi,\, bw'_\xi,\, b^2 w''_{\xi\xi}) = 0.$$

2. $F\Big(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = 0.$

1°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ae^{\lambda x}\varphi(t),$$
$$w(x,t) = \big[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\big]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$F\big(t, \varphi'_t/\varphi, \lambda^2\big) = 0.$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \big[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\big]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$F\big(t, \varphi'_t/\varphi, -\lambda^2\big) = 0.$$

3. $F\Big(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = 0.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ae^{\lambda x}\varphi(t),$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$F\big(t, \varphi'_t/\varphi, \lambda, \lambda^2\big) = 0.$$

4. $F\left(x, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ae^{\lambda t}\varphi(x),$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$F(x, \lambda, \varphi_x'/\varphi, \varphi_{xx}''/\varphi) = 0.$$

5. $F_1\left(t, \frac{\partial w}{\partial t}\right) + F_2\left(x, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = kw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков

$$F_1(t, \varphi_t') - k\varphi = C,$$
$$F_2(x, \psi_x', \psi_{xx}'') - k\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

6. $F_1\left(t, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t}\right) + w^k F_2\left(x, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков

$$\varphi^{-k} F_1\left(t, \frac{\varphi_t'}{\varphi}\right) = C,$$
$$\psi^k F_2\left(x, \frac{\psi_x'}{\psi}, \frac{\psi_{xx}''}{\psi}\right) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

7. $F_1\left(t, \frac{\partial w}{\partial t}\right) + e^{\lambda w} F_2\left(x, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков

$$e^{-\lambda\varphi} F_1(t, \varphi_t') - k\varphi = C,$$
$$e^{\lambda\psi} F_2(x, \psi_x', \psi_{xx}'') - k\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

8. $F_1\left(t, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t}\right) + F_2\left(x, \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = k\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t) + \psi(x)\bigr].$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядков

$$F_1(t, \varphi_t') - k\varphi = C,$$
$$F_2\bigl(x, \psi_x', \psi_{xx}'' + (\psi_x')^2\bigr) - k\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

8.2. Уравнения, содержащие вторые производные обеих переменных

8.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2} w(C_1 x + C_2, C_1 t + C_3) + C_4 xt + C_5 x + C_6 t + C_7,$$

где C_n — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение квадратичное по переменной x (и по переменной t):

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2} A x^2 + Bxt + \tfrac{1}{2} F(A) t^2 + C_1 x + C_2 t + C_3,$$

где A, B, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение:

$$w = x^2 U(z), \qquad z = x/t,$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$z^3 (z U''_{zz} + 2U'_z) = F(z^2 U''_{zz} + 4z U'_z + 2U).$$

4°. Замена $u(x,t) = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению вида 3.4.7.7:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad f(\xi) = F'_\xi(\xi).$$

⊙ *Литература*: N. H. Ibragimov (1994).

Частный случай 1. При $F(\xi) = a\xi^n$ уравнение имеет решение в виде произведения функций разных аргументов $w = \varphi(x)\psi(t)$.

Частный случай 2. При $F(\xi) = a \exp(\lambda\xi)$ уравнение имеет решение вида $w = x^2 \varphi(t) + \psi(x)$.

Частный случай 3. При $F(\xi) = a \ln \xi + b$ уравнение имеет решение вида $w = t^2 \varphi(x) + \psi(t)$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\Big(x,\, w,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)$.

Пусть вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$w = F(x,\, w,\, w'_x,\, w''_{xx})$$

после линейного преобразования

$$x = \varphi(z), \quad w = \psi(z) u$$

и последующего сокращения обеих частей на функцию $\psi(z)$ приводится к автономному виду

$$u = \mathcal{F}(u,\, u'_z,\, u''_{zz}),$$

где $\mathcal{F} = F/\psi$. Тогда рассматриваемое уравнение в частных производных таким же преобразованием

$$x = \varphi(z), \quad w(x,t) = \psi(z) u(z,t)$$

приводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathcal{F}\Big(u,\, \frac{\partial u}{\partial z},\, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big),$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$.

Сказанное позволяет различные известные преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Э. Камке, 1976, В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001*a*) использовать для построения точных решений уравнений в частных производных. Если исходное уравнение было линейным, то такие преобразования будут приводить к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + G\Big(t,\ \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big) + bw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$F\big(x, \varphi'_x, \varphi''_{xx}\big) + b\varphi = C,$$
$$\psi''_{tt} - G\big(t, \psi'_t\big) - b\psi = C.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial t},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})\varphi(t),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi''_{tt} = \varphi F\big(t,\ \varphi'_t/\varphi,\ \lambda^2, 4AB\lambda^2\varphi^2\big)$.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = [A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)]\varphi(t),$$

где A, B — произвольные постоянные, а $\varphi = \varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi''_{tt} = \varphi F\big(t,\ \varphi'_t/\varphi, -\lambda^2, -\lambda^2(A^2+B^2)\varphi^2\big)$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF\Big(t,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial w}{\partial x} - x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 2w - 2x\dfrac{\partial w}{\partial x} + x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = (C_2x^2 + C_1x + C_0)\varphi(t),$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\varphi''_{tt} = \varphi F\big(t, 2C_2\varphi, C_1\varphi, 2C_0\varphi\big)$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF_1\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + e^{\lambda x}F_2\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + e^{-\lambda x}F_3\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = e^{\lambda x}\varphi(t) + e^{-\lambda x}\psi(t).$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = wF_1\Big(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + \cos(\lambda x)F_2\Big(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + \sin(\lambda x)F_3\Big(t, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big).$

Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)\varphi(t) + \sin(\lambda x)\psi(t).$$

8.2.2. Уравнения нелинейные относительно старших производных

1. $f_1\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)f_2\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = g_1(x)g_2(y).$

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) + C_1xy + C_2x + C_3y + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, а функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (a — любое)

$$f_1(\varphi''_{xx}) = ag_1(x),$$
$$af_2(\psi''_{yy}) = g_2(y).$$

2. $F\Big(x, y, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\Big) = 0.$

Замена $u = \frac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению с частными производными первого порядка

$$F\Big(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big) = 0.$$

О методах интегрирования и точных решениях таких уравнений (для различных F) см. книги Э. Камке (1966), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Moussiaux (2002).

3. $F\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0.$

Точное решение квадратичное по обеим переменным:

$$w(x, y) = A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{22}y^2 + B_1 x + B_2 y + C,$$

где A_{11}, A_{12}, A_{22}, B_1, B_2, C — произвольные постоянные, связанные одним соотношением $F(2A_{11}, A_{12}, 2A_{22}) = 0$.

4. $F_1\Big(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\Big) + F_2\Big(y, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = kw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$F_1\big(x, \varphi'_x, \varphi''_{xx}, 0\big) - k\varphi = C,$$
$$F_2\big(y, \psi'_y, 0, \psi''_{yy}\big) - k\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

5. $F_1\Big(x, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + F_2\Big(y, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = \ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$F_1\Big(x, \frac{\varphi'_x}{\varphi}, \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}\Big) - \ln\varphi = C,$$
$$F_2\Big(y, \frac{\psi'_y}{\psi}, \frac{\psi''_{yy}}{\psi}\Big) - \ln\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

6. $F_1\Big(x, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) + w^k F_2\Big(y, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi^{-k} F_1\Big(x, \frac{\varphi'_x}{\varphi}, \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}\Big) = C,$$
$$\psi^k F_2\Big(y, \frac{\psi'_y}{\psi}, \frac{\psi''_{yy}}{\psi}\Big) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

7. $\boldsymbol{F\Big(ax+by,\ w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\Big)=0.}$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = ax + by,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F(\xi,\ w,\ aw'_\xi,\ bw'_\xi,\ a^2w''_{\xi\xi},\ b^2w''_{\xi\xi},\ abw''_{\xi\xi}) = 0.$$

8. $\boldsymbol{F\Big(ax+by,\ w+kx+sy,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\Big)=0.}$

Замена $u(x,y) = w(x,y) + kx + sy$ приводит к уравнению вида 8.2.2.7:

$$F\Big(ax+by,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}-k,\ \frac{\partial u}{\partial y}-s,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)=0.$$

9. $\boldsymbol{F\Big(w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\Big)=}$

$$\boldsymbol{= (a_1x+b_1y+c_1)\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^k + (a_2x+b_2y+c_2)\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^k.}$$

Точные решения ищем в виде

$$w = w(\xi), \qquad \xi = Ax + By + C,$$

где постоянные A, B, C определяются путем решения алгебраической системы уравнений (β — произвольная постоянная)

$$a_1A^k + a_2B^k = \beta A, \tag{1}$$
$$b_1A^k + b_2B^k = \beta B, \tag{2}$$
$$c_1A^k + c_2B^k = \beta C. \tag{3}$$

Сначала решаются первые два уравнения (1), (2), затем из (3) определяется C.

Искомая функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(w,\ Aw'_\xi,\ Bw'_\xi,\ A^2w''_{\xi\xi},\ B^2w''_{\xi\xi},\ ABw''_{\xi\xi}\big) = \beta\xi(w'_\xi)^k.$$

9. Уравнения третьего порядка

9.1. Уравнение Кортевега — де Фриза и родственные уравнения

9.1.1. Уравнение Кортевега — де Фриза $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$

Здесь рассматривается *уравнение Кортевега — де Фриза в канонической форме*. Это уравнение используется во многих разделах нелинейной механики и теоретической физики для описания одномерных нелинейных волн с дисперсией без диссипации (в которых закон дисперсии для линейных волн имеет вид $\omega = a_1 k + a_3 k^3$, где k — волновое число). В частности, на уравнении Кортевега — де Фриза основано математическое моделирование волн умеренной амплитуды на поверхности неглубокой жидкости.

Кортевега — де Фриза интегрируется методом обратной задачи рассеяния, см. литературу в конце разд. 9.1.1.

1. Некоторые формулы.

Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения Кортевега — де Фриза. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(C_1 x + C_2, C_1^3 t + C_3),$$
$$w_2 = w(x + 6\lambda t, t) + \lambda,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

⊙ *Литература*: П. Олвер (1989).

2. Решения типа бегущей волны. Солитон. Периодические решения.

2.1. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x - vt,$$

где функция $w(z)$ задается в неявном виде

$$\int \frac{dw}{\sqrt{2w^3 + vw^2 + C_1 w + C_2}} = \pm z + C_3. \tag{1}$$

Здесь v, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, значению $v = 0$ соответствует стационарное решение.

Ниже описано два важных частных случая, когда решение (1) удается записать в явной форме.

2.2. *Солитон*. Единственное решение, регулярное при всех действительных значениях z и обращающееся в нуль при $z \to \pm\infty$, имеет вид

$$w(z) = -\frac{v}{2\operatorname{ch}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}\,(z - z_0)\right]}, \tag{2}$$

где z_0 — произвольная действительная постоянная.

2.3. *Кноидальные волны*. Существуют периодические решения действительные и регулярные при всех действительных значениях z:

$$w(z) = A\operatorname{cn}^2\left[p(z - z_0), k\right], \quad A = -2p^2k^2, \quad v = 4p^2(2k^2 - 1), \tag{3}$$

которые зависят от произвольной положительной постоянной $k^2 < 1$. Здесь $\operatorname{cn}(y,k)$ — эллиптический косинус Якоби. Решение (2) можно получить из формулы (3) с помощью предельного перехода при $k^2 \to 1$. Периоды решения (3) равны $\omega_1 = 4K$, $\omega_2 = 2K + 2iK_*$, где K, K_* — полные эллиптические интегралы первого рода:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K_* = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_*^2t^2)}}, \quad k^2 + k_*^2 = 1.$$

3. Двух- и N-солитонные решения.

3.1. Двухсолитонное решение:

$$w(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\bigl(1 + B_1 e^{\theta_1} + B_2 e^{\theta_2} + AB_1B_2e^{\theta_1+\theta_2}\bigr),$$
$$\theta_1 = a_1x + a_1^3t, \quad \theta_2 = a_2x + a_2^3t, \quad A = \Bigl(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\Bigr)^2,$$

где B_1, B_2, a_1, a_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: R. Hirota (1971, 1972).

3.2. N-солитонные решения:

$$w(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Bigl\{\ln\det\bigl[\mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{x},\mathbf{t})\bigr]\Bigr\}.$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица порядка N, а $\mathbf{C}(x,t)$ — симметричная матрица порядка N с элементами

$$C_{mn}(x,t) = \frac{\sqrt{\rho_m(t)\rho_n(t)}}{p_m + p_n}\exp\bigl[-(p_m + p_n)x\bigr],$$

где нормировочные множители определяются формулами

$$\rho_n(t) = \rho_n(0)\exp\bigl(8p_n^3t\bigr), \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Справедлива асимптотическая формула

$$w(x,t) \approx -2\sum_{n=1}^{N}\frac{p_n^2}{\operatorname{ch}^2\Bigl[p_n\bigl(x - \xi_n^{\pm} - v_nt\bigr)\Bigr]} \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

где $v_n = 4p_n^2$ — скорость n-й компоненты, а действительные постоянные $\xi_n^{\pm}$ связаны между собой соотношениями

$$\xi_n^+ - \xi_n^- = \sum_{m=1}^{n-1}p_n^{-1}\ln\frac{p_n + p_m}{p_n - p_m} - \sum_{m=n+1}^{N}p_n^{-1}\ln\frac{p_n + p_m}{p_n - p_m}.$$

4. Рациональные решения.

4.1. Простейшее рациональное решение имеет вид

$$w(x,t) = 2(x - \xi)^{-2},$$

где ξ — произвольная постоянная, которая может быть комплексной (если она действительна, то решение сингулярно при действительных значениях x).

4.2. Общий вид рационального решения:

$$w(x,t) = 2\sum_{j=1}^{N}\bigl[x - \xi_j(t)\bigr]^{-2}. \tag{4}$$

Функции $\xi_j(t)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{N}\bigl[\xi_j(t) - \xi_k(t)\bigr]^{-3} = 0, && j = 1, 2, \ldots, N,\\ &\xi_j(t) = -12\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{N}\bigl[\xi_j(t) - \xi_k(t)\bigr]^{-2}, && j = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение существует, если $N = \frac{1}{2}m(m+1)$, $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, причем при $m > 1$ действительных решений нет. В частности, при $m = 2$ имеется три полюса $\xi_j(t) = -e^{2\pi ij/3}(12t)^{1/3}$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ и решение (4) можно записать в виде

$$w(x,t) = \frac{6x(x^3 - 24t)}{(x^3 + 12t)^2} \qquad (\text{при } N = 3).$$

Решение (4) можно также записать в виде

$$w(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bigl[\ln P_N(x,t)\bigr], \quad \text{где} \quad P_N(x,t) = \prod_{j=1}^{N}\bigl[x - \xi_j(t)\bigr].$$

⊙ *Литература*: Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985, стр. 162–165).

5. Автомодельные решения.

5.1. Автомодельное решение простейшего вида:

$$w(x,t) = -\frac{1}{6}\,\frac{x - x_0}{t - t_0},$$

где x_0, t_0 — произвольные постоянные.

5.2. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = \bigl[3(t-t_0)\bigr]^{-2/3} f(y), \quad y = \bigl[3(t-t_0)\bigr]^{-1/3}(x - x_0),$$

где функция $f(y)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$f'''_{yyy} - yf'_y - 2f - 6ff'_y = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет первый интеграл

$$(y+2f)[f''_{yy} - (y+2f)f] - (1+f'_y)f'_y = C,$$

где C — постоянная интегрирования. Положив $h(y) = y + 2f(y)$, можно получить более компактную форму этого уравнения $2h[h''_{yy} + (y-h)h] + 1 - (h'_y)^2 = 4C$.

Решение уравнения (6) можно представить в виде

$$f(y) = g'_y(y) + g^2(y),$$

где функция $g(y)$ — любое решение второго уравнения Пенлеве

$$g''_{yy} - 2g^3 - yg = A, \qquad A \text{ — произвольная постоянная.} \tag{7}$$

При $A = 2^{-2/3}$ уравнение (7) имеет решение

$$g(y) = \frac{d}{dy}\Bigl[\ln F\bigl(-2^{-1/3}y\bigr)\Bigr],$$

где функция $F = F(z)$ удовлетворяет уравнению Эйри $F''_{zz} = zF$.

⊙ *Литература*: Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985, стр. 166–168).

6. Другие решения.

Точное решение:

$$w(x,t) = 2\varphi(z) + 2\lambda t, \quad z = x + 6\lambda t^2.$$

Здесь λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{zz} = 6\varphi^2 - \lambda z + C,$$

где C — произвольная постоянная. Случаю $\lambda = -1$, $C = 0$ соответствует первое уравнение Пенлеве.

7. Интегральное уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко.

Всякая быстро убывающая при $x \to +\infty$ функция $F = F(x,y;t)$, удовлетворяющая одновременно двум линейным уравнениям

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \Bigl(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\Bigr)^3 F = 0$$

порождает решение уравнения Кортевега — де Фриза в виде

$$w = -2\frac{d}{dx}K(x,x;t),$$

где $K(x,y;t)$ — решение линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x,y;t) = F(x,y;t) + \int_x^\infty K(x,z;t)F(z,y;t)\,dz.$$

Время t входит в это уравнение как параметр.

⊙ *Литература к разд. 9.1.1*: C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura (1967, 1974), R. M. Miura (1968), P. D. Lax (1968), R. Hirota (1971, 1972), В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев (1971), С. П. Новиков (1974), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), Дж. Лэмб (1984), Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985), М. Абловиц, Х. Сигур (1987), Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис (1988), G. W. Bluman, S. Kumei (1989), M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson (1991), R. S. Palais (1997).

9.1.2. Цилиндрическое, сферическое и модифицированное уравнения Кортевега — де Фриза

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - bw\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0.$

Ненормированное уравнение Кортевега — де Фриза.

Преобразование $w(x,t) = \dfrac{6a}{b}u(x,\tau)$, $\tau = at$ приводит к уравнению Кортевега — де Фриза в канонической форме

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Об этом уравнении см. разд. 9.1.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{1}{2t}w = 0.$

Цилиндрическое уравнение Кортевега — де Фриза. Частный случай уравнения 9.1.2.3 при $a = \frac{1}{2}$, $b = -6$, $\beta = 1$.

Преобразование

$$w(x,t) = -\frac{x}{12t} - \frac{1}{2t}u(z,\tau), \quad x = \frac{z}{\tau}, \quad t = -\frac{1}{2\tau^2}$$

приводит к уравнению Кортевега — де Фриза в канонической форме

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - 6u\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Об этом уравнении см. разд. 9.1.1.

⊙ *Литература*: Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985, стр. 237–238).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{a}{t}w + bw\dfrac{\partial w}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0.$

Частному случаю $a = 1$, $b = -6$, $\beta = 1$ соответствует *сферическое уравнение Кортевега — де Фриза.*

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^2 w(C_1 x + C_2, C_1^3 t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение (линейное по переменной x):

$$w(x,t) = \varphi(t)x + C_1 t^{-a}\exp\Bigl[-b\int\varphi(t)\,dt\Bigr],$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1-a}{C_2 t^a + bt} & \text{при } a \neq 1, \\ \dfrac{1}{t(C_2 + b\ln t)} & \text{при } a = 1, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные (в обоих случаях интеграл можно вычислить).

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = u(z)t^{-2/3}, \quad z = xt^{-1/3},$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\beta u'''_{zzz} + buu'_z - \tfrac{1}{3}zu'_z + \left(a - \tfrac{2}{3}\right)u = 0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w^2\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0.$

Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_1 x + C_2, C_1^3 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Автомодельное решение (x_0, t_0 — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = \left[3(t-t_0)\right]^{-1/3} f(y), \quad y = \left[3(t-t_0)\right]^{-1/3}(x - x_0),$$

где функция $f(y)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$f'''_{yyy} - yf'_y - f - 6f^2 f'_y = 0.$$

Интегрируя, получим второе уравнение Пенлеве (a — произвольная постоянная):

$$f''_{yy} - 2f^3 - yf = a.$$

3°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция $u(x,t)$, полученная преобразованием Миуры

$$u(x,t) = \frac{\partial w}{\partial x} + w^2, \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению Кортевега — де Фриза из разд. 9.1.1 (в котором надо переобозначить w на u).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: если $u(x,t)$ — решение уравнения Кортевега — де Фриза из разд. 9.1.1, то функция $w(x,t)$, связанная с ним преобразованием Миуры (1), удовлетворяет нелинейному интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w^2\frac{\partial w}{\partial x} = c(t)\exp\left[-2\int w(x,t)\,dx\right].$$

4°. Решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6\sigma w^2\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \sigma = \pm 1, \tag{2}$$

могут быть получены из решений линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко. Всякая быстро убывающая при $x \to +\infty$ функция $F = F(x,y;t)$, удовлетворяющая одновременно двум линейным уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 F = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

порождает решение уравнения (2) в виде

$$w = K(x,x;t),$$

где $K(x,y;t)$ — решение линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x,y;t) = F(x,y;t) + \frac{\sigma}{4}\int_x^\infty\int_x^\infty K(x,z;t)F(z,u;t)F(u,y;t)\,dz\,du. \tag{4}$$

Время t входит в (4) как параметр. Из первого уравнения (3) следует, что $F(x,y;t) = F(x+y;t)$.

⊙ *Литература*: Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985).

9.1.3. Обобщенное уравнение Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(w)\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

При $f(w) = aw$ см. разд. 9.1.1 и уравнение 9.1.2.1; при $f(w) = aw^2$ см. уравнение 9.1.2.4. Уравнения данного вида допускают точные решения типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + aw^k \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{2/k} w(C_1 x + C_2, C_1^3 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны (солитон):

$$w(x,t) = \frac{A}{\operatorname{ch}^{2/k}[Bk(x - 4B^2 t - C)]},$$

где B, C — произвольные постоянные, $A = \left[2(k+1)(k+2)B^2/a\right]^{1/k}$.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t^{-\frac{2}{3k}} U(z), \qquad z = xt^{-\frac{1}{3}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-\frac{2}{3k}U - \frac{1}{3}zU'_z + U'''_{zzz} + aU^k U'_z = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + ae^w \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(C_1 x + C_2, C_1^3 t + C_3) + 2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$w''_{zz} + \lambda w + ae^w = C,$$

λ, C — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = U(\xi) - \tfrac{2}{3}\ln t, \qquad \xi = xt^{-\frac{1}{3}},$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U'''_{\xi\xi\xi} + \left(ae^U - \tfrac{1}{3}\xi\right)U'_\xi - \tfrac{2}{3} = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a\ln w + b)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\left[\frac{C_2 - x}{a(t + C_1)} + \frac{1}{a^3(t + C_1)^2} - \frac{b}{a}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: W. I. Fushchich, N. I. Serov, T. K. Ahmerov (1991), V. A. Galaktionov (1999).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a \operatorname{Arsh} w + b)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Точное решение:

$$w(x,t) = \operatorname{sh}\left[\frac{C_2 - x}{a(t+C_1)} + \frac{1}{a^3(t+C_1)^2} - \frac{b}{a}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: W. I. Fushchich, N. I. Serov, T. K. Ahmerov (1991).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a \arcsin w + b)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Точное решение:

$$w(x,t) = \sin\left[\frac{C_2 - x}{a(t+C_1)} - \frac{1}{a^3(t+C_1)^2} - \frac{b}{a}\right],$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: W. I. Fushchich, N. I. Serov, T. K. Ahmerov (1991).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a \arccos w + b)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Используя формулу $\arccos w = \frac{\pi}{2} - \arcsin w$, приходим к уравнению вида 9.1.3.5:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(-a \arcsin w + \tfrac{\pi}{2}a + b\right)\frac{\partial w}{\partial x}.$$

9.1.4. Уравнения, приводимые к уравнению Кортевега — де Фриза

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 0$.

Преобразование Беклунда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{3}{a}u, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{3}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{9}{a}u^2 \tag{1}$$

связывает рассматриваемое уравнение с уравнением Кортевега — де Фриза (см. разд. 9.1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

Пусть $u = u(x,t)$ — некоторое решение уравнения (2). Тогда линейная система уравнений первого порядка (1) позволяет найти соответствующее решение $w = w(x,t)$ исходного уравнения.

⊙ *Литература*: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 216).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^3 = 0$.

Преобразования Беклунда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = bu, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2bu^3, \qquad \text{где} \quad b = \pm\sqrt{2/a}\,, \tag{1}$$

связывают рассматриваемое уравнение с модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза вида 9.1.2.4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Пусть $u = u(x,t)$ — некоторое решение уравнения (2). Тогда линейная система уравнений первого порядка (1) позволяет найти соответствующее решение $w = w(x,t)$ исходного уравнения.

⊙ *Литература*: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 216).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \dfrac{1}{8}\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^3 - \big(ae^w + be^{-w}\big)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решения находятся из уравнения первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{4}{\sqrt{6}}\big(\sqrt{a}\,e^{w/2} + \sqrt{b}\,e^{-w/2}\big) = 4u, \qquad (1)$$

где функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \big(\lambda - 6u^2\big)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lambda = -2\sqrt{ab}. \qquad (2)$$

Уравнение (1) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно x с параметром t. В частных случаях $a = 0$ и $b = 0$ уравнение (2) совпадает с модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза 9.1.2.4.

⊙ *Литература*: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 216–217).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^3\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$

Уравнение Гарри Дима.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_1^3 C_2^3 t + C_4),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Имеются решения следующего вида:

$w = U(x + \lambda t)$ решение типа бегущей волны,

$w = t^{-\alpha-1/3}u(xt^\alpha)$ автомодельное решение,

$w = f(x)g(t)$ решение в виде произведения функций разных аргументов,

3°. Покажем, что рассматриваемое уравнение связано с уравнением Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + u\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (1)$$

Подстановка

$$u = 3\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^{-1}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \frac{3}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^{-2}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big)^2$$

приводит (1) к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \frac{3}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^{-1}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big)^2. \qquad (2)$$

Дифференцирование (2) по y дает

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial t} = \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - 3\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^{-1}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{3}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^{-2}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big)^3.$$

Преобразование $x = v$, $w = \frac{\partial v}{\partial y}$ приводит к исходному уравнению.

⊙ *Литература*: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 217–218).

9.1.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f\Big(t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) = 0$

При $f(t,w,u) = bu^2$ и $f(t,w,u) = bu^3$ см. соответственно уравнения 9.1.4.1 и 9.1.4.2. Уравнения данного вида при $f = f(w,u)$ допускают точные решения типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bw^2.$

1°. Точные решения при $ab < 0$:

$$w(x,t) = \frac{C_2}{(t + C_1)^2}\exp(\lambda x + \lambda^3 t) - \frac{1}{b(t + C_1)}, \quad \lambda = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение при $ab<0$:

$$w(x,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{bt+C_1}-\frac{1}{bt+C_2}\right)\operatorname{ch}(\lambda x+\lambda^3t+C_3)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{bt+C_1}+\frac{1}{bt+C_2}\right),\qquad \lambda=\sqrt{-\frac{b}{a}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение при $ab>0$:

$$w(x,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{bt+C_1}-\frac{1}{bt+C_2}\right)\sin(\lambda x-\lambda^3t+C_3)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{bt+C_1}+\frac{1}{bt+C_2}\right),\qquad \lambda=\sqrt{\frac{b}{a}},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), указана структура решения при $a=b=1$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(b_1w^{\frac{2-k}{2}}+b_2w^{\frac{1-k}{2}}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k=0.$

Вырожденное решение квадратичное по x:

$$w(x,t)=\left[\frac{x}{2}\left(\frac{kb_1t}{2}\right)^{-1/k}+Ct^{-1/k}-\frac{b_2}{b_1}\right]^2.$$

⊙ *Литература*: W. I. Fushchich, N. I. Serov, T. K. Ahmerov (1991).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(b_1\ln w+b_2)w^{1-k}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k=0.$

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w=\begin{cases}\exp\Big[-a\dfrac{k(kb_1)^{-3/k}}{k-2}t^{(k-3)/k}-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/k}+(kb_1t)^{-1/k}x\Big] & \text{при}\quad k\neq 2,\\[2ex] \exp\Big[-a(2b_1)^{-3/2}t^{-1/2}\ln t-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/2}+(2b_1t)^{-1/2}x\Big] & \text{при}\quad k=2.\end{cases}$$

⊙ *Литература*: W. I. Fushchich, N. I. Serov, T. K. Ahmerov (1991).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}-\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(b_1\arcsin w+b_2)(1-w^2)^{\frac{1-k}{2}}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k=0.$

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w=\begin{cases}\sin\Big[-\dfrac{k(kb_1)^{-3/k}}{k-2}t^{(k-3)/k}-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/k}+(kb_1t)^{-1/k}x\Big] & \text{при}\quad k\neq 2,\\[2ex] \sin\Big[-(2b_1)^{-3/2}t^{-1/2}\ln t-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/2}+(2b_1t)^{-1/2}x\Big] & \text{при}\quad k=2.\end{cases}$$

⊙ *Литература*: W. I. Fushchich, N. I. Serov, T. K. Ahmerov (1991).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t}-\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(b_1\operatorname{Arsh} w+b_2)(1+w^2)^{\frac{1-k}{2}}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k=0.$

Точные решения (C — произвольная постоянная):

$$w=\begin{cases}\operatorname{sh}\Big[\dfrac{k(kb_1)^{-3/k}}{k-2}t^{(k-3)/k}-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/k}+(kb_1t)^{-1/k}x\Big] & \text{при}\quad k\neq 2,\\[2ex] \operatorname{sh}\Big[(2b_1)^{-3/2}t^{-1/2}\ln t-\dfrac{b_2}{b_1}+Ct^{-1/2}+(2b_1t)^{-1/2}x\Big] & \text{при}\quad k=2.\end{cases}$$

⊙ *Литература*: W. I. Fushchich, N. I. Serov, T. K. Ahmerov (1991).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}+a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+bw\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k=0.$

1°. Вырожденное решение линейное по x:

$$w=Ct^{-1/k}+x(kbt)^{-1/k}.$$

2°. Автомодельное решение:

$$w=t^{\frac{k-3}{3k}}U(z),\qquad z=xt^{-\frac{1}{3}},$$

где функция $U=U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{k-3}{3k}U-\frac{1}{3}zU'_z+bU(U'_z)^k+aU'''_{zzz}=0.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + [f(t)\ln w + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp[\varphi(t)x + \psi(t)].$$

Здесь

$$\varphi(t) = -\left[\int f(t)\,dt + C_1\right]^{-1}, \qquad \psi(t) = \varphi(t)\int [g(t) + \varphi^2(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

9.2. Уравнения гидродинамического пограничного слоя

9.2.1. Уравнения стационарного пограничного слоя ньютоновской жидкости

1. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}$.

Уравнение стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине, где w — функция тока, x и y — соответственно продольная и поперечная координаты, ν — кинематическая вязкость жидкости. Аналогичное уравнение описывает стационарное истечение плоской ламинарной струи из тонкой щели.

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится система уравнений гидродинамического пограничного слоя (u_1 и u_2 — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости)

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$.

⦿ *Литература*: Л. Г. Лойцянский (1973), Г. Шлихтинг (1974).

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x)),$$
$$w_2 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_1 C_2 y + C_4) + C_5,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

⦿ *Литература*: Ю. Н. Павловский (1961), Л. В. Овсянников (1978).

2°. Вырожденные решения (линейные и квадратичные по y):

$$w(x,y) = C_1 y + \varphi(x),$$
$$w(x,y) = C_1 y^2 + \varphi(x)y + \frac{1}{4C_1}\varphi^2(x) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция. Эти решения не зависят от ν и отвечают невязкому течению жидкости.

⦿ *Литература*: D. Zwillinger (1989, pp. 396–397).

3°. Точные решения, содержащие произвольные функции:

$$w(x,y) = \frac{6\nu x + C_1}{y + \varphi(x)} + \frac{C_2}{[y + \varphi(x)]^2} + C_3,$$
$$w(x,y) = \varphi(x)\exp(-C_1 y) + \nu C_1 x + C_2,$$
$$w(x,y) = C_1\exp\bigl[-C_2 y - C_2\varphi(x)\bigr] + C_3 y + C_3\varphi(x) + \nu C_2 x + C_4,$$
$$w(x,y) = 6\nu C_1 x^{1/3}\,\mathrm{th}\,\xi + C_2, \qquad \xi = C_1\frac{y}{x^{2/3}} + \varphi(x),$$
$$w(x,y) = -6\nu C_1 x^{1/3}\,\mathrm{tg}\,\xi + C_2, \qquad \xi = C_1\frac{y}{x^{2/3}} + \varphi(x),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция.

ТАБЛИЦА 2

Инвариантные решения уравнения стационарного гидродинамического пограничного слоя (аддитивная постоянная в решениях опускается)

№	Структура решения	Функция F или уравнение для F	Замечания
1	$w = F(y) + \nu\lambda x$	$F(y) = \begin{cases} C_1 \exp(-\lambda y) + C_2 y & \text{при } \lambda \neq 0, \\ C_1 y^2 + C_2 y & \text{при } \lambda = 0 \end{cases}$	λ — любое
2	$w = F(x)y^{-1}$	$F(x) = 6\nu x + C_1$	—
3	$w = x^{\lambda+1}F(z),\ z = x^\lambda y$	$(2\lambda+1)(F'_z)^2 - (\lambda+1)FF''_{zz} = \nu F'''_{zzz}$	λ — любое
4	$w = e^{\lambda x}F(z),\ z = e^{\lambda x}y$	$2\lambda(F'_z)^2 - \lambda FF''_{zz} = \nu F'''_{zzz}$	λ — любое
5	$w = F(z) + a\ln\lvert x\rvert,\ z = y/x$	$-(F'_z)^2 - aF''_{zz} = \nu F'''_{zzz}$	a — любое

Пример 1. При $C_1 = \sqrt{k/\nu}$, $\varphi(x) = -\sqrt{k\nu}\,x$ второе решение принимает вид

$$w = \sqrt{k\nu}\,x\bigl[1 - \exp\bigl(-\sqrt{k/\nu}\,y\bigr)\bigr] + \text{const}.$$

Оно описывает течение жидкости, вызванное движением точек поверхности $y = 0$ со скоростью $u_1|_{y=0} = kx$. Компоненты скоростей жидкости в данном случае удовлетворяют граничным условиям

$$u_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u_1 = kx \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u_2 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u_1 \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

⊙ *Литература*: Н. В. Игнатович (1993), А. Д. Полянин (2001 *c*).

4°. В табл. 2 указаны точные решения уравнения гидродинамического пограничного слоя, которые можно получить методами группового анализа (при $\varphi = 0$). Решение 1 в табл. 2 дается суммой функций разных аргументов. Решение 2 представляет собой произведение функций разных аргументов. Решения 3 и 4 являются автомодельными. Решение 5 вырождается в автомодельное при $a = 0$ (см. решение 3 при $\lambda = -1$). Уравнения 3–5 для функции F являются автономными и обобщенно-однородными, поэтому их порядок можно понизить на две единицы.

⊙ *Литература*: Ю. Н. Павловский (1961), Л. Г. Лойцянский (1973), Г. Шлихтинг (1974), А. Д. Полянин (2001 *c*).

Пример 2. Задача Блазиуса об обтекании плоской пластины поступательным потоком со скоростью U_i характеризуется граничными условиями:

$$\partial_x w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w \to U_\text{i} \quad \text{при} \quad y \to \infty, \qquad \partial_y w = U_\text{i} \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Вид решения этой задачи (в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) указан в третьей строке табл. 2 при $\lambda = -1/2$. Граничные условия для функции $F(z)$ имеют вид

$$F = F'_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad F'_z \to U_i \quad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Подробности см. в книгах Л. Г. Лойцянского (1973) и Г. Шлихтинга (1974).

Пример 3. Задача Шлихтинга о симметричном истечении плоской ламинарной струи из тонкой щели характеризуется граничными условиями

$$\partial_x w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

которые дополняются интегральным условием сохранения количества движения

$$\int_0^\infty (\partial_y w)^2\,dy = A \qquad (A = \text{const}).$$

Вид решения этой задачи (в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) указан в третьей строке табл. 2 при $\lambda = -2/3$. Проинтегрировав обыкновенное дифференциальное уравнение для функции F с соответствующими граничными условиями

$$F = F''_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad F'_z \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty$$

и интегральным условием

$$\int_0^\infty (F'_z)^2 = A,$$

в итоге получим

$$w(x,y) = k(A\nu x)^{1/3}\,\text{th}\,\xi, \qquad \xi = \tfrac{1}{6}k(A/\nu^2)^{1/3}yx^{-2/3}, \qquad k = 3^{2/3}.$$

Подробности см. в книгах Л. Г. Лойцянского (1973) и Г. Шлихтинга (1974).

Пример 4. Отметим два случая интегрируемости уравнения, приведенного в третьей строке табл. 2. При $\lambda = -1$ решение можно представить в параметрической форме:

$$F = -\frac{\nu}{2C_1}\int\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{1+\tau^3}} + C_2, \qquad z = 3C_1\int\frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^3}} + C_3.$$

Имеется также решение $F = 6\nu z^{-1}$.

При $\lambda = -\frac{2}{3}$ после двукратного интегрирования получим уравнение Риккати:

$$\nu F'_z + \tfrac{1}{6}F^2 + C_1 z + C_2 = 0.$$

При $C_1 = 0$ оно легко интегрируется (поскольку переменные разделяются); при $C_1 \neq 0$ решение можно выразить через функции Бесселя порядка $1/3$.

5°. Точное решение линейное по переменной x:

$$w(x,y) = xf(y) + g(y), \tag{1}$$

где функции $f = f(y)$ и $g = g(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f'_y)^2 - ff''_{yy} = \nu f'''_{yyy}, \tag{2}$$
$$f'_y g'_y - fg''_{yy} = \nu g'''_{yyy}. \tag{3}$$

Порядок уравнения (2) может быть понижен на две единицы. Пусть известно некоторое решение уравнения (2). Уравнение (3) является линейным уравнением относительно функции g, которое имеет два линейно независимых частных решения

$$g_1 = 1, \qquad g_2 = f(y)$$

Второе частное решение следует из сопоставления уравнений (2) и (3). Общее решение уравнения (2) можно представить в виде (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$\begin{aligned} g(y) &= C_1 + C_2 f + C_3\Bigl(f\int\psi\,dy - \int f\psi\,dy\Bigr),\\ f &= f(y), \quad \psi = \frac{1}{(f'_y)^2}\exp\Bigl(-\frac{1}{\nu}\int f\,dy\Bigr). \end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что уравнение (2) имеет частные решения:

$$\begin{aligned} f(y) &= 6\nu(y+C)^{-1},\\ f(y) &= Ce^{\lambda y} - \lambda\nu, \end{aligned} \tag{5}$$

где C, λ — произвольные постоянные. Первое решение (5) с учетом формул (1), (4) приводит ко первому решению из п. 3° при $\varphi(x) = \text{const}$. Подставив вторую зависимость (5) в формулы (1), (4) можно получить другое решение.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *c*).

6°. Ниже указаны два преобразования, понижающих порядок уравнения пограничного слоя.

Преобразование Мизеса

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad U(\xi,\eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y),$$

приводит к нелинейному уравнению теплопроводности вида 1.7.1.1:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \nu\frac{\partial}{\partial \eta}\Bigl(U\frac{\partial U}{\partial \eta}\Bigr).$$

Преобразование Крокко

$$\xi = x, \quad \zeta = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \Psi(\xi,\zeta) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y),$$

приводит к нелинейному уравнению второго порядка

$$\zeta\frac{\partial}{\partial \xi}\Bigl(\frac{1}{\Psi}\Bigr) + \nu\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2} = 0.$$

⊙ *Литература*: Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 522–523).

ТАБЛИЦА 3
Инвариантные решения уравнения стационарного гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления (a, k, m, β — произвольные постоянные)

№	Функция $f(x)$	Вид решения $w = w(x,y)$	Функция u или уравнение для u
1	$f(x)=0$	См. уравнение 9.2.1.1	См. уравнение 9.2.1.1
2	$f(x)=ax^m$	$w=x^{\frac{m+3}{4}}u(z),\ z=x^{\frac{m-1}{4}}y$	$\frac{m+1}{2}(u'_z)^2-\frac{m+3}{4}uu''_{zz}=\nu u'''_{zzz}+a$
3	$f(x)=ae^{\beta x}$	$w=e^{\frac{1}{4}\beta x}u(z),\ z=e^{\frac{1}{4}\beta x}y$	$\frac{1}{2}\beta(u'_z)^2-\frac{1}{4}\beta uu''_{zz}=\nu u'''_{zzz}+a$
4	$f(x)=a$	$w=kx+u(y)$	$u(y)=\begin{cases} C_1\exp\left(-\frac{k}{\nu}y\right)-\frac{a}{2k}y^2+C_2y & \text{при } k\neq 0,\\ -\frac{a}{6\nu}y^3+C_2y^2+C_1y & \text{при } k=0\end{cases}$
5	$f(x)=ax^{-3}$	$w=k\ln\lvert x\rvert+u(z),\ z=y/x$	$-(u'_z)^2-ku''_{zz}=\nu u'''_{zzz}+a$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}+f(x).$

Уравнение гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления. Справедлива формула $f(x)=UU'_x$, где $U=U(x)$ — скорость жидкости в ядре потока* на границе с пограничным слоем.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(x,y+\varphi(x))+C,$$
$$w_1=-w(x,-y+\varphi(x))+C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная, также будут решениями этого уравнения.

⊙ *Литература*: Ю. Н. Павловский (1961), Л. В. Овсянников (1978).

2°. Вырожденные решения (линейные и квадратичные по y) для произвольной $f(x)$:

$$w(x,y)=\pm y\Big[2\int f(x)\,dx+C_1\Big]^{1/2}+\varphi(x),$$
$$w(x,y)=C_1y^2+\varphi(x)y+\frac{1}{4C_1}\Big[\varphi^2(x)-2\int f(x)\,dx\Big]+C_2,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Эти решения не зависят от ν и отвечают невязкому движению жидкости.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *c*).

3°. В табл. 3 указаны точные решения уравнения гидродинамического пограничного слоя, которые можно получить методами группового анализа (при $\varphi=0$).

Отметим, что задача Фолкнера — Скен о симметричном обтекании клина описывается уравнением, приведенным во второй строке табл. 3. Случай $m=1$ соответствует натеканию жидкости на плоскость (течение в окрестности точки разветвления потока), а $m=0$ — симметричному обтеканию клина с углом раствора $\alpha=\frac{2}{3}\pi$.

⊙ *Литература*: Ю. Н. Павловский (1961), Л. Г. Лойцянский (1973), Г. Шлихтинг (1974), А. Д. Полянин (2001 *c*).

4°. Точное решение (линейное по x) при $f(x)=ax+b$:

$$w(x,y)=xF(y)+G(y),$$

* В ядре потока решается гидродинамическая задача об обтекании тела идеальной (невязкой) жидкостью.

где функции $F = F(y)$ и $G = G(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(F_y')^2 - FF_{yy}'' = \nu F_{yyy}''' + a, \qquad (1)$$

$$F_y' G_y' - FG_{yy}'' = \nu G_{yyy}''' + b. \qquad (2)$$

Порядок автономного уравнения (1) может быть понижен на единицу. Если известно частное решение уравнения (1), то соответствующее ему уравнение (2) подстановкой $H(y) = G_y'$ сводится к линейному уравнению второго порядка. При $F(y) = \pm\sqrt{a}\,y + C$ уравнение (2) интегрируется в квадратурах (поскольку при $b = 0$ известны два его частных решения: $G_1 = 1$, $G_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a}\,y^2 + Cy$).

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 c).

5°. Точное решение при $f(x) = ae^{\beta x}$:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \frac{a}{2\beta\lambda^2\varphi(x)}e^{\beta x - \lambda y} - \nu\lambda x + \frac{2\nu\lambda^2}{\beta}y + \frac{2\nu\lambda}{\beta}\ln|\varphi(x)|,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, λ — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 c).

6°. Ниже указаны два преобразования, понижающих порядок уравнения пограничного слоя.

Преобразование Мизеса

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad U(\xi,\eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y),$$

приводит к нелинейному уравнению теплопроводности

$$U\frac{\partial U}{\partial \xi} = \nu U \frac{\partial}{\partial \eta}\left(U\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) + f(\xi).$$

Преобразование Крокко

$$\xi = x, \quad \zeta = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \Psi(\xi,\zeta) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y),$$

приводит к нелинейному уравнению второго порядка

$$\zeta\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\Psi}\right) + \nu\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - f(\xi)\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\Psi}\right) = 0.$$

⊙ *Литература*: Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 522–523).

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \nu\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f(x).$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится система уравнений осесимметричного стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(x), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \qquad (2)$$

(u и v — осевая и радиальная компоненты скорости жидкости, x и r — цилиндрические координаты) путем введения функции тока w и новой переменной z по формулам

$$u = \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}, \quad v = -\frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad z = \frac{1}{4}r^2.$$

Система (1), (2) используется для описания осесимметричной струи и пограничного слоя на протяженном теле вращения. Функция $f(x)$ выражается через продольную скорость жидкости $U = U(x)$ в невязком ядре потока по формуле $f = UU_x'$.

⊙ *Литература*: F. L. Crabtree, D. Kuchemann, L. Sowerby (1963), Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 555), Г. Шлихтинг (1974, стр. 223).

1°. Автомодельное решение при $f(x) = Ax^k$:

$$w(x,z) = xU(\zeta), \qquad \zeta = zx^{\frac{k-1}{2}},$$

где функция $U = U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-\tfrac{1}{2}(k+1)(U'_\zeta)^2 + UU''_{\zeta\zeta} + A + \nu(\zeta U''_{\zeta\zeta})'_\zeta = 0.$$

Пример. Осесимметричная струя характеризуется значениями $A=0$, $k=-3$. В этом случае последнее уравнение при соответствующих граничных условиях имеет решение

$$U(\zeta) = \frac{2\nu\zeta}{\zeta + C},$$

где постоянную интегрирования C можно выразить через импульс струи.

⊙ *Литература*: Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 555–558), Г. Шлихтинг (1974, стр. 223–225).

2°. Точные решения (линейные и квадратичные по z) для произвольной $f(x)$:

$$w(x,z) = \pm z\left[2\int f(x)\,dx + C_1\right]^{1/2} + \varphi(x),$$
$$w(x,z) = C_1 z^2 + \varphi(x)z + \frac{1}{4C_1}\varphi^2(x) - \frac{1}{2C_1}\int f(x)\,dx - \nu x + C_2,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Первое решение является «невязким» (оно не зависит от ν).

3°. Точное решение для произвольной $f(x)$:

$$w(x,z) = 2\nu x + \nu\varphi(x)\left(\frac{2C_1}{\xi} + C_2\xi\right), \quad \xi = \frac{z}{\varphi^2(x)} - C_1\varphi'_x(x),$$
$$\varphi(x) = \pm\nu C_2\left[2\int f(x)\,dx + C_3\right]^{-1/2},$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: G. I. Burde (1994).

4°. Точное решение при $f(x) = ax + b$:

$$w(x,z) = \nu\lambda\varphi(x) + \frac{\nu}{a}(ax+b)\big(Ce^{-\lambda\xi} + \lambda\xi - 3\big), \qquad \xi = z - \varphi'_x(x), \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{a}}{\nu},$$

где C, λ — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция.

⊙ *Литература*: G. I. Burde (1994).

5°. Точное решение (линейное по x) при $f(x) = ax + b$:

$$w(x,z) = x\varphi(z) + \psi(z),$$

где функции $\varphi = \varphi(z)$ и $\psi = \psi(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\varphi'_z)^2 - \varphi\varphi''_{zz} = \nu(z\varphi''_{zz})'_z + a,$$
$$\varphi'_z\psi'_z - \varphi\psi''_{zz} = \nu(z\psi''_{zz})'_z + b.$$

Первое уравнение имеет частные решения $\varphi = \pm\sqrt{a}\,z + C$.

6°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов при $f(x) = a$:

$$w(x,z) = \nu(1-k)x + C_1 z^k + \frac{a}{2\nu(k-2)}z^2 + C_2 z + C_3,$$
$$w(x,z) = -\nu x - \frac{a}{2\nu}z^2\ln z + C_1 z^2 + C_2 z + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3, k — произвольные постоянные.

9.2.2. Уравнения стационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей

1. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^{n-1}\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}$.

Это уравнение описывает пограничный слой на плоской пластине, обтекаемой степенной неньютоновской жидкостью, где w — функция тока, x и y — соответственно продольная и поперечная координаты, n и k — реологические параметры ($n > 0$, $k > 0$).

1°. Пусть $w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(C_1^{2-n} C_2^{2n-1} x + C_3, C_2 y + C_4) + C_5,$$
$$w_2 = w(x, y + \varphi(x)),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \frac{1}{C_1^2 n(2n-1)}\big[C_1(n-1)y + C_2\big]^{\frac{2n-1}{n-1}} + C_3 y + C_4 - kC_1 x \quad \text{при} \quad n \neq 1/2,$$
$$w(x,y) = -\frac{1}{C_1^2}\ln(C_1 y + C_2) + C_3 y + C_4 + 2kC_1 x \quad \text{при} \quad n = 1/2.$$

3°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \big[\lambda(2-n)x + C_1\big]^{\frac{1}{2-n}} F(y) \quad \text{при} \quad n \neq 2,$$
$$w(x,y) = C_1 e^{\lambda x} F(y) \quad \text{при} \quad n = 2,$$

где $F = F(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda(F'_y)^2 - \lambda F F''_{yy} = k(F''_{yy})^{n-1} F'''_{yyy},$$

порядок которого может быть понижен на две единицы. Уравнение для F имеет частное решение в виде степенной функции $F = A_n(y + C)^{\beta_n}$, где $\beta_n = \frac{2n-1}{n-2}$.

4°. Автомодельное решение ($n \neq 2$, λ — любое):

$$w(x,y) = x^{\frac{2\lambda n - \lambda + 1}{2-n}} \psi(z), \qquad z = x^\lambda y, \tag{1}$$

где функция $\psi = \psi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{\lambda n + \lambda + 1}{2-n}(\psi'_z)^2 - \frac{2\lambda n - \lambda + 1}{2-n}\psi\psi''_{zz} = k(\psi''_{zz})^{n-1}\psi'''_{zzz}, \tag{2}$$

порядок которого может быть понижен на две единицы.

⊙ *Литература*: З. П. Шульман, Б. М. Берковский (1966).

Пример 1. Обобщенная задача Блазиуса об обтекании плоской пластины поступательным потоком степенной жидкости со скоростью U_i характеризуется граничиыми условиями:

$$\partial_x w = \partial_y w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w \to U_i \quad \text{при} \quad y \to \infty, \qquad \partial_y w = U_i \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Решение этой задачи (в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) ищется в виде (1) при $\lambda = -\frac{1}{n+1}$. Граничные условия для функции $\psi(z)$ имеют вид

$$\psi = \psi'_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \psi'_z \to U_i \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{3}$$

В работах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1989, 1993) указаны точные аналитические решения задачи (2)–(3) при $\lambda = -\frac{1}{n+1}$ для $n = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, 2$.

Пример 2. Обобщенная задача Шлихтинга о симметричном истечении плоской ламинарной струи степенной жидкости из тонкой щели характеризуется граничными условиями

$$\partial_x w = \partial_{yy} w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \partial_y w \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

которые дополняются интегральным условием сохранения количества движения

$$\int_0^\infty (\partial_y w)^2\, dy = A \qquad (A = \text{const}).$$

Решение этой задачи (в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) ищется в виде (1) при $\lambda = -\frac{2}{3n}$. Решение уравнения (2) для функции $\psi(z)$ с соответствующими граничными и интегральным условиями (см. условия в примере 1 из разд. 9.2.1, где F следует заменить на ψ) приведено в в книгах З. П. Шульмана, Б. М. Берковского (1966), А. М. Кутепова, А. Д. Полянина и др. (1996).

5°. Автомодельное решение при $n = 2$ (λ — любое):

$$w(x,y) = x^{\lambda} U(z), \quad z = yx^{-1/3},$$

где функция $U = U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\lambda - \tfrac{1}{3})(U'_z)^2 + \lambda U U''_{zz} = kU''_{zz}U'''_{zzz}.$$

порядок которого может быть понижен на две единицы.

6°. Точное решение (λ — любое):

$$w(x,y) = e^{\lambda(2n-1)x}\Phi(\tau), \quad \tau = e^{\lambda(2-n)x}y,$$

где функция $\Phi = \Phi(\tau)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda(n+1)(\Phi'_\tau)^2 - \lambda(2n-1)\Phi\Phi''_{\tau\tau} = k(\Phi''_{\tau\tau})^{n-1}\Phi'''_{\tau\tau\tau},$$

порядок которого может быть понижен на две единицы.

⊙ *Литература*: З. П. Шульман, Б. М. Берковский (1966).

7°. Точное решение при $n \neq 1/2$:

$$w(x,y) = C_1 \ln|x| + C_2 + g(\xi), \quad \xi = x^{\frac{1}{1-2n}}y,$$

где функция $g = g(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{1-2n}(g'_\xi)^2 - C_1 g''_{\xi\xi} = k(g''_{\xi\xi})^{n-1}g'''_{\xi\xi\xi},$$

порядок которого можно понизить на две единицы.

8°. Точное решение при $n = 1/2$:

$$w(x,y) = C_1 x + C_2 + h(\zeta), \quad \zeta = e^{\lambda x}y,$$

где функция $h = h(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda(h'_\zeta)^2 - C_1 h''_{\zeta\zeta} = k(h''_{\zeta\zeta})^{-1/2}h'''_{\zeta\zeta\zeta},$$

порядок которого можно понизить на две единицы.

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^{n-1}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + f(x).$

Уравнение стационарного пограничного слоя степенной жидкости с градиентом давления.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x)) + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *c*).

2°. Вырожденные решения (линейные и квадратичные по y) для любой $f(x)$:

$$w(x,y) = \pm y\Big[2\int f(x)\,dx + C_1\Big]^{1/2} + \varphi(x),$$

$$w(x,y) = C_1 y^2 + \varphi(x)y + \frac{1}{4C_1}\Big[\varphi^2(x) - 2\int f(x)\,dx\Big] + C_2,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Эти решения не зависят от k и отвечают невязкому движению жидкости.

3°. Автомодельное решение при $f(x) = ax^m$:

$$w(x,y) = x^{\frac{2nm+2n-m+1}{2(n+1)}}\psi(z), \qquad z = x^{\frac{2m-n-nm}{2(n+1)}}y,$$

где функция $\psi = \psi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{nm+n+m+1}{2(n+1)}(\psi'_z)^2 - \frac{2nm+2n-m+1}{2(n+1)}\psi\psi''_{zz} = k(\psi''_{zz})^{n-1}\psi'''_{zzz} + a.$$

Отметим, что к последнему уравнению сводится решение обобщенной задачи Фолкнера — Скен о симметричном обтекании клина степенной жидкостью.

⊙ *Литература*: З. П. Шульман, Б. М. Берковский (1966).

4°. Точное решение при $f(x) = ae^{\beta x}$:

$$w(x,y) = \exp\Bigl(\beta\frac{2n-1}{2n+2}x\Bigr)\Phi(\tau), \qquad \tau = \exp\Bigl(\beta\frac{2-n}{2n+2}x\Bigr)y,$$

где функция $\Phi = \Phi(\tau)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{2}\beta(\Phi'_\tau)^2 - \beta\frac{2n-1}{2n+2}\Phi\Phi''_{\tau\tau} = k(\Phi''_{\tau\tau})^{n-1}\Phi'''_{\tau\tau\tau} + a.$$

⊙ *Литература*: З. П. Шульман, Б. М. Берковский (1966).

5°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $f(x) = a$:

$$w(x,y) = C_1 x + h(y),$$

где функция $h = h(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(h''_{yy})^{n-1}h'''_{yyy} + C_1 h''_{yy} + a = 0.$$

Его общее решение можно представить в параметрическом виде:

$$y = -k\int_{C_2}^{t}\frac{u^{n-1}\,du}{C_1u+a}, \quad h = k^2\int_{C_3}^{t}\frac{u^{n-1}\varphi(u)\,du}{C_1u+a}, \quad \text{где} \quad \varphi(u) = \int_{C_4}^{u}\frac{v^n\,dv}{C_1v+a}.$$

6°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $f(x) = ax^{\frac{n}{2-n}}$, $n \neq 2$:

$$w(x,y) = x^{\frac{1}{2-n}}F(y),$$

где функция $F = F(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{2-n}(F'_y)^2 - \frac{1}{2-n}FF''_{yy} = k(F''_{yy})^{n-1}F'''_{yyy} + a.$$

7°. Автомодельное решение при $f(x) = ax^m$, $n = 2$:

$$w(x,y) = x^{\frac{1}{2}m+\frac{5}{6}}U(z), \qquad z = yx^{-1/3},$$

где функция $U = U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\tfrac{1}{2}(m+1)(U'_z)^2 + \tfrac{1}{6}(3m+5)UU''_{zz} = kU''_{zz}U'''_{zzz} + a.$$

8°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов при $f(x) = ae^{\lambda x}$, $n = 2$:

$$w(x,y) = e^{\frac{1}{2}\lambda x}G(y),$$

где функция $G = G(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\tfrac{1}{2}\lambda(G'_y)^2 - \tfrac{1}{2}\lambda GG''_{yy} = k(G''_{yy})^{n-1}G'''_{yyy} + a.$$

9°. Точное решение $f(x) = ax^{\frac{2n+1}{1-2n}}$, $n \neq 1/2$:

$$w(x,y) = C_1 \ln|x| + C_2 + g(\xi), \quad \xi = x^{\frac{1}{1-2n}} y,$$

где функция $g = g(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(g''_{\xi\xi})^{n-1} g'''_{\xi\xi\xi} + C_1 g''_{\xi\xi} - \frac{1}{1-2n}(g'_\xi)^2 + a = 0,$$

10°. Точное решение $f(x) = ae^{\lambda x}$, $n = 1/2$:

$$w(x,y) = C_1 x + C_2 + h(\zeta), \quad \zeta = e^{\frac{1}{2}\lambda x} y,$$

где функция $h = h(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k(h''_{\zeta\zeta})^{-1/2} h'''_{\zeta\zeta\zeta} + C_1 h''_{\zeta\zeta} - \tfrac{1}{2}\lambda(h'_\zeta)^2 + a = 0.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big[f\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)\Big].$

Уравнение стационарного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой неньютоновской жидкостью общего вида (w — функция тока, x и y — продольная и поперечная координаты).

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится система уравнений пограничного слоя неньютоновской жидкости

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big[f\Big(\frac{\partial u_1}{\partial y}\Big)\Big],$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ (u_1 и u_2 — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости).

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(C_1^3 x + C_2, C_1 y + C_3) + C_4,$$
$$w_2 = w(x, y + \varphi(x)),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будут решениями этого уравнения.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *c*).

2°. Точные решения, содержащие произвольные функции:

$$w(x,y) = C_1 y^2 + \varphi(x) y + \frac{1}{4C_1}\varphi^2(x) + C_2,$$
$$w(x,y) = g(z) + C_1 x + C_2, \quad z = y + \varphi(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция. Во второй формуле функция $g = g(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(g''_{zz}) + C_1 g'_z = C_3,$$

общее решение которого можно представить в параметрическом виде

$$g = \frac{1}{C_1^2}\int \frac{f'_t(t)}{t}\,[f(t) - C_2]\,dt + C_3, \quad z = C_4 - \frac{1}{C_1}\int \frac{f'_t(t)}{t}\,dt.$$

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,y) = x^{2/3}\psi(\xi), \quad \xi = yx^{-1/3},$$

где функция $\psi = \psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\psi'_\xi)^2 - 2\psi\psi''_{\xi\xi} = 3[f(\psi''_{\xi\xi})]'_\xi.$$

4°. Преобразование Мизеса

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad U(\xi,\eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y),$$

приводит к нелинейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta}\Big[f\Big(U\frac{\partial U}{\partial \eta}\Big)\Big].$$

Последнее допускает, например, точное решение типа бегущей волны $U = U(a\xi + b\eta)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[f\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)\Big] + g(x).$

Уравнение стационарного пограничного неньютоновской жидкости общего вида с градиентом давления.

1°. Пусть $w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x)) + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Уравнение имеет вырожденные решения [см. п. 2° уравнения 9.2.2.2, где $f(x)$ следует заменить на $g(x)$].

3°. Точное решение при $g(x) = a$:

$$w(x, y) = \zeta(z) + C_1 x + C_2, \quad z = y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Функция $\zeta = \zeta(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$f(\zeta''_{zz}) + C_1\zeta'_z + a\zeta = C_3.$$

4°. Автомодельное решение при $g(x) = a(x + b)^{-1/3}$:

$$w(x, y) = (x + b)^{2/3}\psi(\xi), \quad \xi = y(x + b)^{-1/3},$$

где функция $\psi = \psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\psi'_\xi)^2 - 2\psi\psi''_{\xi\xi} = 3[f(\psi''_{\xi\xi})]'_\xi + 3a.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *c*).

9.2.3. Уравнения нестационарного пограничного слоя ньютоновской жидкости

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}.$

Это уравнение описывает нестационарный гидродинамический пограничный слой на плоской пластине, где w — функция тока, x и y — соответственно продольная и поперечная координаты, ν — кинематическая вязкость жидкости. Аналогичное уравнение описывает нестационарное истечение плоской ламинарной струи из тонкой щели.

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится система уравнений нестационарного гидродинамического пограничного слоя (u_1 и u_2 — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$.

1°. Пусть $w(x, y, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x, t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x, t)\,dx + \chi(t),$$
$$w_2 = C_1 w(C_2 x + C_2 C_3 t + C_4,\ C_1 C_2 y + C_1 C_2 C_5 t + C_6,\ C_1^2 C_2^2 t + C_7) + C_5 x - C_3 y + C_8,$$

где $\varphi(x, t)$ и $\chi(t)$ — произвольные функции, C_n — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

⊙ *Литература*: Л. И. Верещагина (1973), Л. В. Овсянников (1978).

2°. Вырожденные решения (линейные и квадратичные по y):

$$w = C_1 y + \varphi(x,t),$$
$$w = C_1 y^2 + \varphi(x,t)y + \frac{1}{4C_1}\varphi^2(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух переменных [здесь и далее аддитивная произвольная функция времени $\chi = \chi(t)$ в точных решениях для функции тока опускается]; C_1 — произвольная постоянная. Эти решения не зависят от ν и отвечают невязкому течению жидкости.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*).

3°. Точные решения, содержащие произвольные функции:

$$w = \frac{6\nu x + C_1}{y + \varphi(x,t)} + \frac{C_2}{[y+\varphi(x,t)]^2} + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$
$$w = C_1 \exp\bigl[-C_2 y - C_2\varphi(x,t)\bigr] + C_3 y + C_3\varphi(x,t) + \nu C_2 x + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$
$$w = 6\nu C_1 x^{1/3}\,\mathrm{th}\,\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx, \qquad \xi = C_1\frac{y+\varphi(x,t)}{x^{2/3}},$$
$$w = -6\nu C_1 x^{1/3}\,\mathrm{tg}\,\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx, \qquad \xi = C_1\frac{y+\varphi(x,t)}{x^{2/3}},$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух переменных, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Для построения этих решений в качестве основы использованы более простые стационарные решения, указанные в 9.2.1.1.

Отметим также решение

$$w = f(x)\exp\bigl[-\lambda y - \lambda g(t)\bigr] + \bigl[\nu\lambda + g'_t(t)\bigr]x,$$

где $f(x)$, $g(t)$ — произвольные функции, λ — произвольная постоянная. Его можно получить из указанного выше второго решения при $\varphi(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln f(x) + g(t)$, $C_2 = \lambda$, $C_3 = 0$.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

4°. Точное решение линейное по переменной x:

$$w(x,y,t) = xF(y,t) + G(y,t), \tag{1}$$

где функции $F = F(y,t)$ и $G = G(y,t)$ определяются из более простых уравнений с двумя переменными

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}, \tag{2}$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 G}{\partial y^3}. \tag{3}$$

Уравнение (2) решается независимо от уравнения (3). Если $F = F(y,t)$ — решение уравнения (2), то функции

$$F_1 = F(y+\psi(t),t) + \psi'_t(t),$$
$$F_2 = C_1 F(C_1 y + C_1 C_2 t + C_3, C_1^2 t + C_4) + C_2,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

Если известно частное решение $F = F(y,t)$ уравнения (2), то соответствующее уравнение (3) заменой $U = \frac{\partial G}{\partial y}$ приводится к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} - F\frac{\partial U}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial y}U. \tag{4}$$

Точные решения уравнения (2) приведены в табл. 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения в последних двух строках табл. 4, определяющие решение типа бегущей волны и автомодельное решение, являются автономными и поэтому допускают понижение порядка.

ТАБЛИЦА 4
Точные решения уравнения (2)

№	Функция $F = F(y,t)$ (или общий вид решения)	Замечания (или определяющее уравнение)
1	$F = \psi(t)$	$\psi(t)$ — произвольная функция
2	$F = \frac{y}{t+C_1} + \psi(t)$	$\psi(t)$ — произвольная функция, C_1 — любое
3	$F = \frac{6\nu}{y+\psi(t)} + \psi'_t(t)$	$\psi(t)$ — произвольная функция
4	$F = C_1 \exp[-\lambda y + \lambda\psi(t)] - \psi'_t(t) + \nu\lambda$	$\psi(t)$ — произвольная функция, C_1, λ — любые
5	$F = F(\xi)$, $\xi = y + \lambda t$	$\lambda F''_{\xi\xi} + (F'_\xi)^2 - FF''_{\xi\xi} = \nu F'''_{\xi\xi\xi}$
6	$F = t^{-1/2}\bigl[H(\xi) - \frac{1}{2}\xi\bigr]$, $\xi = yt^{-1/2}$	$\frac{3}{4} - 2H'_\xi + (H'_\xi)^2 - HH''_{\xi\xi} = \nu H'''_{\xi\xi\xi}$

ТАБЛИЦА 5
Преобразования уравнения (4) для соответствующих точных решений уравнения (2)
[номер в первом столбце соответствует номеру точного решения $F = F(y,t)$ в табл. 4]

№	Преобразования уравнения (4)	Полученное уравнение
1	$U = u(\zeta,t)$, $\zeta = y + \int \psi(t)\,dt$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}$
2	$U = \frac{1}{t+C_1}u(z,\tau)$, $\tau = \frac{1}{3}(t+C_1)^3 + C_2$, $z = (t+C_1)y + \int \psi(t)(t+C_1)\,dt + C_3$	$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
3	$U = \zeta^{-3}u(\zeta,t)$, $\zeta = y + \psi(t)$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}$
4	$U = e^\eta Z(\eta,t)$, $\eta = -\lambda y + \lambda\psi(t)$	$\frac{\partial Z}{\partial t} = \nu\lambda^2\frac{\partial^2 Z}{\partial\eta^2} + (\nu\lambda^2 - C_1\lambda e^\eta)\frac{\partial Z}{\partial\eta}$
5	$U = u(\xi,t)$, $\xi = y + \lambda t$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \bigl[F(\xi) - \lambda\bigr]\frac{\partial u}{\partial\xi} - F'_\xi(\xi)u$
6	$U = t^{-1/2}u(\xi,\tau)$, $\xi = yt^{-1/2}$, $\tau = \ln t$	$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + H(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi} + \bigl[1 - H'_\xi(\xi)\bigr]u$

В табл. 5 приведены преобразования, упрощающие уравнение (4) для соответствующих решений уравнения (2) из табл. 4. Видно, что в первых трех случаях решения уравнения (4) выражаются через решения линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. В остальных трех случаях уравнение (4) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Четвертое уравнение в табл. 5 имеет частные решения (A, B — любые):

$$Z(\eta) = A + B\int \Phi(\eta)\,d\eta, \quad \Phi(\eta) = \exp\Bigl(\frac{C_1}{\nu\lambda}e^\eta - \eta\Bigr);$$

$$Z(\eta,t) = A\nu\lambda^2 t + A\int \Phi(\eta)\Bigl[\int \frac{d\eta}{\Phi(\eta)}\Bigr]\,d\eta.$$

О других точных решениях этого уравнения см. книгу А. Д. Полянина (2001 *b*), где рассматривалось более общее уравнение вида $\partial_t w = f(x)\partial_{xx}w + g(x)\partial_x w$.

Уравнение 5 в табл. 5 имеет частное стационарное решение $u_0 = F'_\xi(\xi)$ (сравни с уравнением 5 в табл. 4). Поэтому другими частными решениями этого уравнения будут функции [см. А. Д. Полянин (2001 *b*)]:

$$u(\xi) = C_1 F'_\xi(\xi) + C_2 F'_\xi(\xi) \int \frac{\Psi(\xi)\,d\xi}{[F'_\xi(\xi)]^2}, \quad \Psi(\xi) = \exp\Bigl[\frac{\lambda}{\nu}\xi - \frac{1}{\nu}\int F(\xi)\,d\xi\Bigr];$$

$$u(\xi,t) = C_1 \nu t F'_\xi(\xi) + C_1 F'_\xi(\xi) \int \frac{\Psi(\xi)\Phi(\xi)}{[F'_\xi(\xi)]^2}\,d\xi, \quad \Phi(\xi) = \int \frac{[F'_\xi(\xi)]^2}{\Psi(\xi)}\,d\xi.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

5°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \bigl[A(t)e^{k_1x} + B(t)e^{k_2x}\bigr]e^{\lambda y} + \varphi(t)x + ay,$$
$$A(t) = C_1 \exp\Bigl[(\nu\lambda^2 - ak_1)t + \lambda\int\varphi(t)\,dt\Bigr],$$
$$B(t) = C_2 \exp\Bigl[(\nu\lambda^2 - ak_2)t + \lambda\int\varphi(t)\,dt\Bigr],$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, a, k_1, k_2, λ — произвольные постоянные.

6°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = A(t)\exp(kx + \lambda y) + B(t)\exp(\beta kx + \beta\lambda y) + \varphi(t)x + ay,$$
$$A(t) = C_1 \exp\Bigl[(\nu\lambda^2 - ak)t + \lambda\int\varphi(t)\,dt\Bigr],$$
$$B(t) = C_2 \exp\Bigl[(\nu\beta^2\lambda^2 - ak\beta)t + \beta\lambda\int\varphi(t)\,dt\Bigr],$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, a, k, β, λ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

7°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \int u(z,t)\,dz + \varphi(t)y + \psi(t)x, \qquad z = kx + \lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $u(z,t)$ описывается линейным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bigl[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\bigr]\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\lambda}\varphi'_t(t).$$

Преобразование

$$u = U(\xi,t) - \frac{1}{\lambda}\varphi(t), \quad \xi = z - \int\bigl[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\bigr]\,dt$$

приводит его к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu\lambda^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

8°. Точные решения:

$$w = e^{\nu\lambda^2 t}(C_1e^{\lambda z} + C_2e^{-\lambda z}) + \frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx, \quad z = y + \varphi(x,t);$$
$$w = e^{-\nu\lambda^2 t}\bigl[C_1\sin(\lambda z) + C_2\cos(\lambda z)\bigr] + \frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx, \quad z = y + \varphi(x,t);$$
$$w = C_1e^{-\nu\lambda^2 z}\sin(\lambda z - 2\nu\lambda^2 t + C_2) + \frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx, \quad z = y + \varphi(x,t),$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов; C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Для периодической функции $\varphi(x,t) = \varphi(x,t+T)$ последнее решение при $\lambda = \sqrt{\dfrac{\pi}{\nu T}}$ также будет периодическим: $w(x,y,t) = w(x,y,t+T)$.

9°. «Двумерное» решение:

$$w = W(\xi,\eta) + a_1 x + a_2 y, \qquad \xi = k_1 x + \lambda_1 t, \qquad \eta = k_2 y + \lambda_2 t,$$

где функция W описывается уравнением

$$(\lambda_1 + a_2 k_1)\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta} + (\lambda_2 - a_1 k_2)\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2} + k_1 k_2\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial W}{\partial\xi}\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}\right) = \nu k_2^2\frac{\partial^3 W}{\partial\eta^3}.$$

В частном случае

$$a_1 = \lambda_2/k_2, \qquad a_2 = -\lambda_1/k_1$$

имеем уравнение стационарного пограничного слоя 9.2.1.1:

$$\frac{\partial W}{\partial\eta}\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial W}{\partial\xi}\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2} = \beta\frac{\partial^3 W}{\partial\eta^3}, \qquad \beta = \nu\frac{k_2}{k_1}.$$

10°. «Двумерное» решение:

$$w = V(\xi,\eta), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{t}},$$

где функция V описывается уравнением

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial\eta} - \frac{1}{2}\xi\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2}\eta\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2} + \frac{\partial V}{\partial\eta}\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial V}{\partial\xi}\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2} = \nu\frac{\partial^3 V}{\partial\eta^3}.$$

Последнее имеет, например, решения вида $V = F(\eta)\xi + G(\eta)$.

⊙ *Литература*: Л. В. Овсянников (1978).

2. $\displaystyle\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + f(x,t).$

Это уравнение описывает нестационарный гидродинамический пограничный слой с градиентом давления.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x,t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx,$$
$$w_2 = -w(x,-y,t) + \psi(t),$$

где $\varphi(x,t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

⊙ *Литература*: Л. И. Верещагина (1973), Л. В. Овсянников (1978).

2°. При $f(x,t) = g(t)$ преобразование

$$w = u(\xi,y,t) - h'_t(t)y, \qquad \xi = x + h(t), \qquad \text{где} \quad h(t) = -\int_{t_0}^{t}(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

приводит к более простому уравнению вида 9.2.2.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial y} - \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}.$$

Отметим, что функции $f = g(t)$ и $h = h(t)$ связаны простым соотношением $h''_{tt} = -g$.

В общем случае преобразование (1) приводит рассматриваемое уравнение к аналогичному уравнению с измененной функцией $f(x,t)$ согласно правилу:

$$f(x,t) \quad \xrightarrow{\text{преобразование (1)}} \quad f(x,t) - g(t).$$

⊙ *Литература*: Л. В. Овсянников (1978).

3°. Вырожденное решение (квадратичное по y) для любой $f(x,t)$:

$$w(x,y,t) = ay^2 + \varphi(x,t)y + \frac{1}{4a}\varphi^2(x,t) + \frac{1}{2a}\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - f(x,t)\right]dx.$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов [здесь и далее аддитивная произвольная функция времени $\psi=\psi(t)$ в точных решениях для функции тока опускается]; a — произвольная постоянная. Это решение не зависит от ν и отвечает невязкому течению жидкости.

Вырожденное решение (линейное по y) для любой $f(x,t)$:

$$w(x,y,t)=\psi(x,t)y+\varphi(x,t),$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция, а $\psi=\psi(x,t)$ определяется путем решения уравнения с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}=f(x,t).$$

О методах интегрирования и точных решениях таких уравнений (для различных F) см. книги Э. Камке (1966), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Moussiaux (2002).

Вырожденные решения при $f(x,t)=f(x)$:

$$w(x,y,t)=\pm y\Bigl[2\int f(x)\,dx+C_1\Bigr]^{1/2}+\varphi(x,t),$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

4°. Точное решение (линейное по x) при $f(x,t)=f_1(t)x+f_2(t)$:

$$w(x,y,t)=xF(y,t)+G(y,t),\tag{2}$$

где функции $F=F(y,t)$ и $G=G(y,t)$ определяются из более простых уравнений с двумя переменными

$$\frac{\partial^2F}{\partial t\partial y}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-F\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3F}{\partial y^3}+f_1(t),\tag{3}$$

$$\frac{\partial^2G}{\partial t\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y}-F\frac{\partial^2G}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3G}{\partial y^3}+f_2(t).\tag{4}$$

Уравнение (3) решается независимо от уравнения (4).

Если $F=F(y,t)$ — решение уравнения (3), то функция

$$F_1=F(y+\psi(t),t)+\psi_t'(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

Точные решения уравнения (3) для различных зависимостей $f_1=f_1(t)$ представлены в табл. 6. Отметим, что решения вида (2) при $G\equiv0$, указанные в первой и двух последних строках табл. 6, рассматривались в книге Л. В. Овсянникова (1978).

Замена $U=\frac{\partial G}{\partial y}$ приводит уравнение (4) к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t}-F\frac{\partial U}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2U}{\partial y^2}-\frac{\partial F}{\partial y}U+f_2(t).\tag{5}$$

Остановимся подробнее на первом решении уравнения (3), указанном в табл. 6:

$$F(y,t)=a(t)y+\psi(t),\qquad\text{где}\qquad a_t'+a^2=f_1(t).\tag{6}$$

Уравнение Риккати для функции $a=a(t)$ подстановкой $a=h_t'/h$ сводится к линейному уравнению второго порядка $h_{tt}''-f_1(t)h=0$. Точные решения этого уравнения для различных $f_1(t)$ описаны в книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*). В частности, при $f_1(t)=\mathrm{const}$ имеем

$$a(t)=k\frac{C_1\cos(kt)-C_2\sin(kt)}{C_1\sin(kt)+C_2\cos(kt)}\quad\text{при}\quad f_1=-k^2<0,$$

$$a(t)=k\frac{C_1\operatorname{ch}(kt)+C_2\operatorname{sh}(kt)}{C_1\operatorname{sh}(kt)+C_2\operatorname{ch}(kt)}\quad\text{при}\quad f_1=k^2>0.$$

Подставив решение (6) [для произвольной $f_1(t)$] в уравнение (5), получим

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\bigl[a(t)y+\psi(t)\bigr]\frac{\partial U}{\partial y}-a(t)U+f_2(t).$$

ТАБЛИЦА 6

Точные решения уравнения (3) для различных $f_1(t)$ [$\psi(t)$ — произвольная функция]

Функция $f_1 = f_1(t)$	Функция $F = F(y,t)$ (или общий вид решения)	Определяющее уравнение (или определяющие коэффициенты)
Любая	$F = a(t)y + \psi(t)$	$a'_t + a^2 = f_1(t)$
$f_1(t) = Ae^{-\beta t}$, $A > 0, \beta > 0$	$F = Be^{-\frac{1}{2}\beta t}\sin[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$, $F = Be^{-\frac{1}{2}\beta t}\cos[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$B = \pm\sqrt{\frac{2A\nu}{\beta}}$, $\lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}}$
$f_1(t) = Ae^{\beta t}$, $A > 0, \beta > 0$	$F = Be^{\frac{1}{2}\beta t}\operatorname{sh}[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$B = \pm\sqrt{\frac{2A\nu}{\beta}}$, $\lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}}$
$f_1(t) = Ae^{\beta t}$, $A < 0, \beta > 0$	$F = Be^{\frac{1}{2}\beta t}\operatorname{ch}[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$B = \pm\sqrt{\frac{2\lvert A\rvert\nu}{\beta}}$, $\lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}}$
$f_1(t) = Ae^{\beta t}$, A — любое, $\beta > 0$	$F = \psi(t)e^{\lambda y} - \frac{Ae^{\beta t - \lambda y}}{4\lambda^2\psi(t)} + \frac{\psi'_t(t)}{\lambda\psi(t)} - \nu\lambda$	$\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{\beta}{2\nu}}$
$f_1(t) = At^{-2}$	$F = t^{-1/2}\left[H(\xi) - \frac{1}{2}\xi\right]$, $\xi = yt^{-1/2}$	$\frac{3}{4} - A - 2H'_\xi + (H'_\xi)^2 - HH''_{\xi\xi} = \nu H'''_{\xi\xi\xi}$
$f_1(t) = A$	$F = F(\xi)$, $\xi = y + \lambda t$	$-A + \lambda F''_{\xi\xi} + (F'_\xi)^2 - FF''_{\xi\xi} = \nu F'''_{\xi\xi\xi}$

Преобразование (А. Д. Полянин, 2001 *b*)

$$U = \frac{1}{\Phi(t)}\left[u(z,\tau) + \int f_2(t)\Phi(t)\,dt\right], \quad \tau = \int \Phi^2(t)\,dt + C_1,$$
$$z = y\Phi(t) + \int \psi(t)\Phi(t)\,dt + C_2, \quad \Phi(t) = \exp\left[\int a(t)\,dt\right],$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

Замечание 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения в последних двух строках табл. 6 (см. последний столбец), определяющие автомодельное решение и решение типа бегущей волны, являются автономными и поэтому допускают понижение порядка.

Замечание 2. Пусть $w(x,y,t)$ — решение уравнения нестационарного гидродинамического пограничного слоя при $f(x,t) = f_1(t)x + f_2(t)$. Тогда функция

$$w_1 = w(x + h(t), y, t) - h'_t(t)y, \qquad \text{где} \quad h''_{tt} + f_1(t)h = 0,$$

также будет решением этого уравнения.

⊙ *Литература*: Л. В. Овсянников (1978).

5°. Точное решение при $f(x,t) = g(x)e^{\beta t}$, $\beta > 0$:

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)e^{\lambda y} + \psi(x,t)e^{-\lambda y} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\int \ln|\varphi(x,t)|\,dx - \nu\lambda x,$$
$$\psi(x,t) = -\frac{e^{\beta t}}{2\lambda^2\varphi(x,t)}\int g(x)\,dx, \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

6°. Точные решения при $f(x,t) = g(x)e^{\beta t}$, $\beta > 0$:

$$w(x,y,t) = \pm\frac{1}{\lambda}\exp\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right)\sqrt{\psi(x)}\,\operatorname{sh}\left[\lambda y + \varphi(x,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

$$w(x,y,t) = \pm\frac{1}{\lambda}\exp\left(\tfrac{1}{2}\beta t\right)\sqrt{\psi(x)}\,\operatorname{ch}\left[\lambda y + \varphi(x,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

$$\psi(x) = 2\int g(x)\,dx + C_1, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

7°. Точное решение при $f(x,t) = g(x)e^{-\beta t}$, $\beta > 0$:

$$w(x,y,t) = \pm\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\beta t\right)\sqrt{\psi(x)}\,\sin\left[\lambda y + \varphi(x,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

$$w(x,y,t) = \pm\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\beta t\right)\sqrt{\psi(x)}\,\cos\left[\lambda y + \varphi(x,t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx,$$

$$\psi(x) = 2\int g(x)\,dx + C_1, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}}.$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

8°. Точное решение при $f(x,t) = ae^{\beta x - \gamma t}$:

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)e^{\lambda y} - \frac{a}{2\beta\lambda^2\varphi(x,t)}e^{\beta x - \lambda y - \gamma t} + \\ + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\int \ln|\varphi(x,t)|\,dx - \nu\lambda x + \frac{2\nu\lambda^2 + \gamma}{\beta}\left(y + \frac{1}{\lambda}\ln|\varphi(x,t)|\right),$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов, λ — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

9°. Точное решение при $f(x,t) = f(t)$:

$$w(x,y,t) = \int u(z,t)\,dz + \varphi(t)y + \psi(t)x, \qquad z = kx + \lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $u(z,t)$ описывается линейным уравнением второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\right]\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\lambda}\varphi_t'(t) + \frac{1}{\lambda}f(t).$$

Преобразование

$$u = U(\xi,t) - \frac{1}{\lambda}\varphi(t) + \frac{1}{\lambda}\int f(t)\,dt, \qquad \xi = z - \int\left[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\right]dt$$

приводит его линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu\lambda^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

10°. Точное решение при $f(x,t) = f(t)$:

$$w(x,y,t) = Ce^{-\lambda y + \lambda\varphi(x,t)} - a(t)\varphi(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx + a(t)y + \nu\lambda x, \quad a(t) = \int f(t)\,dt,$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов; C, λ — произвольные постоянные.

11°. Точное решение при $f(x,t) = f(t)$:

$$w(x,y,t) = \varphi(x,t)e^{\lambda y} + \psi(x,t)e^{-\lambda y} + \chi(x,t) + a(t)y,$$

ТАБЛИЦА 7

Решения уравнения нестационарного гидродинамического пограничного слоя, зависящие от двух обобщенных переменных. Обозначения: $\mathcal{R}[z] = \nu z_{\eta\eta\eta} + z_\xi z_{\eta\eta} - z_\eta z_{\xi\eta}$, $g = g(u)$ — произвольная функция.

Функция $f = f(x,t)$	Общий вид решения	Уравнение для функции $z = z(\xi,\eta)$
$f = f(x+\lambda t)$	$w = z(\xi, y) - \lambda y$, $\xi = x + \lambda t$	$\nu z_{yyy} + z_\xi z_{yy} - z_y z_{\xi y} + f(\xi) = 0$
$f = g(x)t^{-2}$	$w = z(x,\eta)t^{-1/2}$, $\eta = yt^{-1/2}$	$\nu z_{\eta\eta\eta} + z_x z_{\eta\eta} - z_\eta z_{x\eta} + \frac{1}{2}\eta z_{\eta\eta} + z_\eta + g(x) = 0$
$f = e^{\lambda t} g(xe^{-\lambda t})$	$w = e^{\lambda t} z(\xi, y)$, $\xi = xe^{-\lambda t}$	$\nu z_{yyy} + z_\xi z_{yy} - z_y z_{\xi y} + \lambda\xi z_{\xi y} - \lambda z_y + g(\xi) = 0$
$f = t^{-n-2} g(xt^n)$	$w = z(\xi,\eta)t^{-(2n+1)/2}$, $\xi = xt^n$, $\eta = yt^{-1/2}$	$\mathcal{R}[z] + \frac{1}{2}\eta z_{\eta\eta} - n\xi z_{\xi\eta} + (1+n)z_\eta + g(\xi) = 0$
$f = ax^n$	$w = z(\xi,\eta)t^{-(n+3)/(2n-2)}$, $\xi = xt^{2/(n-1)}$, $\eta = yt^{-1/2}$	$\mathcal{R}[z] + \frac{1}{2}\eta z_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{n-1} z_{\xi\eta} + \frac{n+1}{n-1} z_\eta + a\xi^n = 0$
$f = ae^{\lambda x}$	$w = z(\xi,\eta)t^{-1/2}$, $\xi = x + \frac{2}{\lambda}\ln t$, $\eta = yt^{-1/2}$	$\mathcal{R}[z] + \frac{1}{2}\eta z_{\eta\eta} - \frac{2}{\lambda} z_{\xi\eta} + z_\eta + ae^{\lambda\xi} = 0$

где λ — любое, $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов, а остальные функции определяются по формулам

$$\psi(x,t) = \frac{C\nu e^{2\nu\lambda^2 t}}{\varphi(x,t)}\left[x - \int a(t)\,dt\right], \quad a(t) = \int f(t)\,dt + Ce^{2\nu\lambda^2 t};$$

$$\chi(x,t) = \frac{1}{\lambda}a(t)\ln|\varphi(x,t)| + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\int \ln|\varphi(x,t)|\,dx - \nu\lambda x.$$

12°. Точные решения при $f(x,t) = f(t)$:

$$w = e^{\nu\lambda^2 t}(C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z}) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx + z\int f(t)\,dt, \qquad z = y + \varphi(x,t);,$$

$$w = e^{-\nu\lambda^2 t}[C_1\sin(\lambda z) + C_2\cos(\lambda z)] + \frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx + z\int f(t)\,dt, \quad z = y + \varphi(x,t);$$

$$w = C_1 e^{-\lambda z}\sin(\lambda z - 2\nu\lambda^2 t + C_2) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx + z\int f(t)\,dt, \qquad z = y + \varphi(x,t),$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов; C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Для периодической функции $f(t) = f(t+T)$, удовлетворяющей условию $\int_0^T f(t)\,dt = 0$, при $\varphi(x,t) = \varphi(x)$ и $\lambda = \sqrt{\dfrac{\pi}{\nu T}}$ последнее решение также будет периодическим: $w(x,y,t) = w(x,y,t+T)$.

13°. Точные решения при $f(x,t) = A$:

$$w = -\frac{A}{6\nu}z^3 + C_2 z^2 + C_1 z + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx, \qquad z = y + \varphi(x,t);$$

$$w = kx + C_1\exp\left(-\frac{k}{\nu}z\right) - \frac{A}{2k}z^2 + C_2 z + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx, \qquad z = y + \varphi(x,t),$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция двух аргументов; C_1, C_2, k — произвольные постоянные.

14°. В табл. 7 описаны решения уравнения нестационарного гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления, зависящие от двух обобщенных переменных [использованы результаты Л. В. Овсянникова (1978)].

При $f(x,t) = f(k_1 x + \lambda_1 t)$ имеется также широкий класс «двумерных» решений вида

$$w = z(\xi,\eta) + a_1 x + a_2 y, \qquad \xi = k_1 x + \lambda_1 t, \qquad \eta = k_2 y + \lambda_2 t,$$

где функция z описывается уравнением

$$(\lambda_1 + a_2 k_1)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} + (\lambda_2 - a_1 k_2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + k_1 k_2\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\right) = \nu k_2^2\frac{\partial^3 z}{\partial\eta^3} + f(\xi).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \nu\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(z\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) + f(x,t).$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится система уравнений осесимметричного нестационарного ламинарного пограничного слоя

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(x,t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \qquad (2)$$

(u и v — осевая и радиальная компоненты скорости жидкости, x и r — цилиндрические координаты) путем введения функции тока w и новой переменной z по формулам

$$u = \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}, \quad v = -\frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad z = \frac{1}{4}r^2.$$

Система (1), (2) описывает осесимметричную струю ($f \equiv 0$) и пограничный слой на протяженном теле вращения ($f \not\equiv 0$).

1°. Уравнение сохраняется при замене w на $w + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — произвольная функция.

2°. Точное решение (квадратичное по z) для произвольной $f(x,t)$:

$$w(x,z,t) = Cz^2 + \varphi(x,t)z + \frac{1}{4C}\varphi^2(x,t) + \\ + \frac{1}{2C}\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x,t)\,dx - \frac{1}{2C}\int f(x,t)\,dx - \nu x + \psi(t),$$

где $\varphi(x,t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, C — произвольная постоянная.

Уравнение имеет также «невязкое» решение вида $w = \varphi(x,t)z + \psi(x,t)$, где $\psi(x,t)$ — произвольная функция, а функция $\varphi = \varphi(x,t)$ описывается уравнением с частными производными первого порядка $\partial_t\varphi + \varphi\partial_x\varphi = f(x,t)$.

3°. Точное решение (линейное по x) при $f(x,t) = a(t)x + b(t)$:

$$w(x,z,t) = x\varphi(z,t) + \psi(z,t),$$

где функции $\varphi = \varphi(z,t)$ и $\psi = \psi(z,t)$ описываются системой уравнений с частными производными

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nu\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + a(t),$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \nu\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + b(t).$$

Первое уравнение имеет точное решение $\varphi = C(t)z$, где функция $C = C(t)$ описывается уравнением Риккати $C'_t + C^2 = a(t)$. Второе уравнение заменой $V = \frac{\partial\psi}{\partial z}$ сводится к линейному уравнению второго порядка.

4°. «Двумерное» решение при $f(x,t) = f(x+\lambda t)$:

$$w(x,z,t) = U(\xi,z) - \lambda z, \quad \xi = x + \lambda t,$$

где функция $U = U(\xi,z)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial z} - \frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nu\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + f(\xi),$$

которое с точностью до переобозначений совпадает со стационарным уравнением (см. уравнение 9.2.1.3 и его решения).

5°. Точное решение (линейное по x) при $f(x,t) = f(t)$:

$$w(x,z,t) = A(t)x + B(t) + z\int f(t)\,dt + u(z,t),$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — произвольные функции, а функция $u = u(z,t)$ описывается линейным параболическим уравнением второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(t)\frac{\partial u}{\partial z} = \nu z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

6°. Пусть $w(x,z,t)$ — решение уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя при $f(x,t) = a(t)x + b(t)$. Тогда функция

$$w_1 = w(\xi, z, t) - \varphi_t'(t)z + \psi(t), \qquad \xi = x + \varphi(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а $\varphi = \varphi(t)$ — решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения $\varphi_{tt}'' - a(t)\varphi = 0$, также будет решением этого уравнения.

9.2.4. Уравнения нестационарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей

1. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^{n-1}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}.$

Уравнение нестационарного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой степенной жидкостью (w — функция тока, x и y — продольная и поперечная координаты).

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= C_1 w(C_1^{n-2}C_2^{2n-1}x + C_1^{n-2}C_2^{2n-1}C_3 t,\ C_2 y + C_2 C_5 t,\ C_1^{n-1}C_2^{2n}t) + C_5 x - C_3 y,\\
w_2 &= w(x + C_6, y + C_7, t + C_8) + C_9,\\
w_3 &= w(x, y + \varphi(x,t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx + \psi(t),
\end{aligned}$$

где C_n — произвольные постоянные, $\varphi(x,t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение линейное по x:

$$w(x,y,t) = \psi(t)x + \int U(z,t)\,dz, \quad z = y + \int \psi(t)\,dt,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а функция $U(z,t)$ описывается уравнением второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Об этом уравнении см. 1.6.16.1 при $f(x) = \mathrm{const}$ и 1.6.16.2 при $f(U) = kU^{n-1}$.

3°. Точное решение линейное по x:

$$w(x,y,t) = \frac{xy}{t + C_1} + \psi(t)x + \int U(y,t)\,dy,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C_1 — произвольная постоянная, а функция $U(y,t)$ описывается уравнением второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^{n-1}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left[\frac{y}{t + C_1} + \psi(t)\right]\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{t + C}U.$$

Преобразование

$$U = \frac{1}{t + C_1}u(\zeta, \tau), \quad \tau = \tfrac{1}{3}(t + C_1)^3 + C_2, \quad \zeta = (t + C_1)y + \int \psi(t)(t + C_1)\,dt + C_3$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = k\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}.$$

Об этом уравнении см. 1.6.16.1 при $f(x) = \mathrm{const}$ и 1.6.16.2 при $f(U) = kU^{n-1}$.

4°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \int v(\eta,t)\,d\eta + \varphi(t)y + \psi(t)x, \qquad \eta = kx + \lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $v(\eta,t)$ описывается уравнением второго порядка

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \bigl[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\bigr]\frac{\partial v}{\partial \eta} = k\lambda^{2n}\Bigl(\frac{\partial v}{\partial \eta}\Bigr)^{n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\lambda}\varphi_t'(t)$$

Преобразование

$$v = R(\zeta,t) - \frac{1}{\lambda}\varphi(t), \qquad \zeta = \eta - \int \bigl[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\bigr]\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial t} = k\lambda^{2n}\Bigl(\frac{\partial R}{\partial \zeta}\Bigr)^{n-1}\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2}.$$

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Bigl[f\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr)\Bigr].$

Уравнение нестационарного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой неньютоновской жидкостью (w — функция тока, x и y — продольная и поперечная координаты).

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x,t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx + \psi(t),$$

$$w_2 = C_1^{-2}w(C_1^3x + C_1^3C_2t + C_3,\; C_1y + C_1C_4t + C_5,\; C_1^2t + C_6) + C_4x - C_2y + C_7,$$

где $\varphi(x,t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, C_n — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точное решение линейное по x:

$$w(x,y,t) = \psi(t)x + \int U(z,t)\,dz, \quad z = y + \int \psi(t)\,dt,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а функция $U(z,t)$ описывается уравнением второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\Bigl[f\Bigl(\frac{\partial U}{\partial z}\Bigr)\Bigr].$$

Последнее допускает точные решения вида [для любой функции $f = f(v)$]:

$$U(z,t) = H(\zeta), \qquad \zeta = kz + \lambda t \implies \text{уравнение } \lambda H = kf(kH_\zeta') + C;$$

$$U(z,t) = az + H(\zeta), \quad \zeta = kz + \lambda t \implies \text{уравнение } \lambda H = kf(kH_\zeta' + a) + C;$$

$$U(z,t) = \sqrt{t}\,H(\zeta), \quad \zeta = z/\sqrt{t} \implies \text{уравнение } \tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}\zeta H_\zeta' = [f(H_\zeta')]_\zeta',$$

где a, k, C, λ — произвольные постоянные. Решение первых двух уравнений для $H = H(\zeta)$ можно получить в параметрическом виде [см. Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *a*)].

3°. Точное решение линейное по x:

$$w(x,y,t) = \frac{xy}{t+C} + \psi(t)x + \int U(y,t)\,dy,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная, а функция $U(y,t)$ описывается уравнением второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\Bigl[f\Bigl(\frac{\partial U}{\partial y}\Bigr)\Bigr] + \Bigl[\frac{y}{t+C} + \psi(t)\Bigr]\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{t+C}U.$$

Преобразование

$$U = \frac{1}{t+C_1}u(\zeta,\tau), \quad \tau = \tfrac{1}{3}(t+C_1)^3 + C_2, \quad \zeta = (t+C_1)y + \int \psi(t)(t+C_1)\,dt + C_3$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\Bigl[f\Bigl(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\Bigr)\Bigr].$$

Об этом уравнении см. п. 2°.

4°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \int v(\eta,t)\,d\eta + \varphi(t)y + \psi(t)x, \qquad \eta = kx + \lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $v(\eta,t)$ описывается уравнением второго порядка

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \big[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\big]\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[f\left(\lambda^2\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right] - \frac{1}{\lambda}\varphi_t'(t)$$

Преобразование

$$v = R(\zeta,t) - \frac{1}{\lambda}\varphi(t), \qquad \zeta = \eta - \int\big[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\big]\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[f\left(\lambda^2\frac{\partial R}{\partial \zeta}\right)\right].$$

⊙ *Литература к уравнению 9.2.4.2*: А. Д. Полянин (2001 *а*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

3. $\displaystyle\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] + g(x,t).$

Уравнение нестационарного пограничного слоя неньютоновской жидкости с градиентом давления.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x, y + \varphi(x,t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)\,dx + \psi(t),$$

где $\varphi(x,t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, C_n — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Уравнение имеет вырожденные решения [см. п. 3° уравнения 9.2.3.2, где $f(x,t)$ следует заменить на $g(x,t)$].

3°. При $g(x,t) = g(t)$ преобразование

$$w = u(\xi,y,t) - \varphi_t'(t)y, \qquad \xi = x + \varphi(t), \qquad \text{где} \quad \varphi(t) = -\int_{t_0}^{t}(t-\tau)g(\tau)\,d\tau,$$

приводит к более простому уравнению вида 9.2.4.2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right].$$

Отметим, что функции $g = g(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ связаны простым соотношением: $\varphi_{tt}'' = -g$.

4°. «Двумерное» решение (линейное по x) при $g(x,t) = g(t)$:

$$w(x,y,t) = a(t)x + \int U(y,t)\,dy,$$

где функция $U = U(y,t)$ описывается уравнением второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a(t)\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right] + g(t).$$

Преобразование

$$U = u(\xi,t) + \int g(t)\,dt, \qquad \xi = y + \int a(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

Об этом уравнении см. 9.2.4.2, п. 2°.

5°. «Двумерное» решение (линейное по x) при $g(x,t) = s(t)x + h(t)$:

$$w(x,y,t) = \big[a(t)y + \psi(t)\big]x + \int Q(y,t)\,dy,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, $a = a(t)$ описывается уравнением Риккати

$$a'_t + a^2 = s(t),$$

а функция $Q = Q(y,t)$ удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\Big[f\Big(\frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\Big] + \big[a(t)y + \psi(t)\big]\frac{\partial Q}{\partial y} - a(t)Q + h(t).$$

Преобразование

$$Q = \frac{1}{\Phi(t)}\Big[Z(\xi,\tau) + \int h(t)\Phi(t)\,dt\Big], \quad \tau = \int \Phi^2(t)\,dt + A, \quad \xi = y\Phi(t) + \int \psi(t)\Phi(t)\,dt + B,$$

где $\Phi(t) = \exp\Big[\int a(t)\,dt\Big]$, приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}\Big[f\Big(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\Big)\Big].$$

Об этом уравнении см. 9.2.4.2, п. 2°.

6°. Точное решение при $g(x,t) = g(t)$:

$$w(x,y,t) = \int v(\eta,t)\,d\eta + \varphi(t)y + \psi(t)x, \qquad \eta = kx + \lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $v(\eta,t)$ описывается уравнением второго порядка

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \big[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\big]\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\Big[f\Big(\lambda^2\frac{\partial v}{\partial \eta}\Big)\Big] - \frac{1}{\lambda}\varphi'_t(t) + \frac{1}{\lambda}g(t).$$

Преобразование

$$v = R(\zeta,t) - \frac{1}{\lambda}\varphi(t) + \frac{1}{\lambda}\int g(t)\,dt, \quad \zeta = \eta - \int\big[k\varphi(t) - \lambda\psi(t)\big]\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big[f\Big(\lambda^2\frac{\partial R}{\partial \zeta}\Big)\Big].$$

⊙ *Литература к уравнению 9.2.4.3*: А. Д. Полянин (2001 *a*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2001).

9.3. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)

9.3.1. Стационарные уравнения

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = 0, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся двумерные стационарные уравнения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ с последующим исключением давления (с помощью перекрестного дифференцирования) из первых двух уравнений.

1°. Пусть $w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1 w(C_2 x + C_3, C_2 y + C_4) + C_5,$$
$$w_2 = w(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha),$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \alpha$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения общего вида:

$$w(x, y) = \varphi_1(\xi), \quad \xi = a_1 x + b_1 y;$$
$$w(x, y) = \varphi_2(r), \quad r = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2};$$

где $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(r)$ — произвольные функции; a_1, b_1, a_2, b_2 — произвольные постоянные.

3°. Любые решения линейных уравнений

$$\Delta w = 0 \qquad \text{(уравнение Лапласа)},$$
$$\Delta w = C \qquad \text{(уравнение Пуассона)},$$
$$\Delta w = \lambda w \qquad \text{(уравнение Гельмгольца)},$$
$$\Delta w = \lambda w + C \qquad \text{(неоднородное уравнение Гельмгольца)},$$

где C, λ — произвольные постоянные, являются также решениями исходного уравнения. Об уравнениях Лапласа, Пуассона, Гельмгольца см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. С. Владимирова (1985), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Решения уравнения Лапласа $\Delta w = 0$ соответствуют безвихревым (потенциальным) решениям уравнений Эйлера. Такие решения подробно рассматриваются в книгах по гидродинамике [см. Л. И. Седов (1966), Л. Г. Лойцянский (1973)], где широко используются методы теории функций комплексного переменного.

4°. В левой части рассматриваемого уравнения стоит якобиан функций w и $v = \Delta w$. Равенство якобиана нулю означает, что эти величины функционально зависимы, т. е. v должна выражаться через w:

$$\Delta w = f(w), \tag{1}$$

где $f(w)$ — произвольная функция. Любое решение уравнения второго порядка (1) для любой функции $f(w)$ будет решением исходного уравнения.

Результаты п. 3° соответствуют частным случаям линейной функции $f(w) = \lambda w + C$. О решениях уравнения (1) для некоторых нелинейных зависимостей $f = f(w)$ см. 5.1.1.1, 5.2.1.1, 5.3.1.1, 5.3.2.1, 5.3.3.1, 5.4.1.1 и разд. A.3.3-2 (пример 13).

5°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x, y) = A_1 x^2 + A_2 x + B_1 y^2 + B_2 y + C,$$
$$w(x, y) = A_1 \exp(\lambda x) + A_2 \exp(-\lambda x) + B_1 \exp(\lambda y) + B_2 \exp(-\lambda y) + C,$$
$$w(x, y) = A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda y) + B_2 \cos(\lambda y) + C,$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, C, λ — произвольные постоянные.

6°. Точные решения:

$$w(x, y) = (Ax + B)e^{-\lambda y} + C,$$
$$w(x, y) = \big[A_1 \sin(\beta x) + A_2 \cos(\beta x)\big]\big[B_1 \sin(\lambda y) + B_2 \cos(\lambda y)\big] + C,$$
$$w(x, y) = \big[A_1 \sin(\beta x) + A_2 \cos(\beta x)\big]\big[B_1 \operatorname{sh}(\lambda y) + B_2 \operatorname{ch}(\lambda y)\big] + C,$$
$$w(x, y) = \big[A_1 \operatorname{sh}(\beta x) + A_2 \operatorname{ch}(\beta x)\big]\big[B_1 \sin(\lambda y) + B_2 \cos(\lambda y)\big] + C,$$
$$w(x, y) = \big[A_1 \operatorname{sh}(\beta x) + A_2 \operatorname{ch}(\beta x)\big]\big[B_1 \operatorname{sh}(\lambda y) + B_2 \operatorname{ch}(\lambda y)\big] + C,$$
$$w(x, y) = Ae^{\alpha x + \beta y} + Be^{\gamma x + \lambda y} + C, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \lambda^2,$$

где A, B, C, D, k, β, λ — произвольные постоянные.

7°. Точное решение линейное по переменной x:

$$w(x,y) = F(z)x + G(z), \qquad z = y + kx,$$

где функции $F = F(z)$ и $G = G(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка

$$F'_z F''_{zz} - F F'''_{zzz} = 0, \tag{2}$$

$$G'_z F''_{zz} - F G'''_{zzz} = \frac{2k}{(k^2+1)} F F''_{zz}. \tag{3}$$

В результате однократного интегрирования получим систему уравнений второго порядка

$$(F'_z)^2 - F F''_{zz} = A_1, \tag{4}$$

$$G'_z F'_z - F G''_{zz} = \frac{2k}{k^2+1} \int F F''_{zz}\, dz + A_2, \tag{5}$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные.

Автономное уравнение (4) заменой $Z(F) = (F'_z)^2$ приводится к линейному уравнению первого порядка.

Общее решение уравнения (2) [или (4)] описывается формулами:

$$\begin{aligned}
&F(z) = B_1 z + B_2, && A_1 = B_1^2;\\
&F(z) = B_1 \exp(\lambda z) + B_2 \exp(-\lambda z), && A_1 = -4\lambda^2 B_1 B_2;\\
&F(z) = B_1 \sin(\lambda z) + B_2 \cos(\lambda z), && A_1 = \lambda^2 (B_1^2 + B_2^2),
\end{aligned}$$

где B_1, B_2, λ — произвольные постоянные.

Общее решение уравнения (3) [или (5)] имеет вид

$$G = C_1 \int F\, dz - \int F\biggl(\int \frac{\psi\, dz}{F^2}\biggr) dz + C_2,$$

$$F = F(z), \qquad \psi = \frac{2k}{k^2+1} \int F F''_{zz}\, dz + A_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,y) = a \ln|x| + V(\zeta), \qquad \zeta = y/x.$$

Значению $a = 0$ соответствует автомодельное решение.

▶ *О других точных решениях см. уравнение 9.3.1.2.*

⊙ *Литература к уравнению 9.3.1.1*: А. А. Бучнев (1971), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta w) = 0, \qquad \Delta w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится уравнение 9.3.1.1 путем перехода к полярной системе координат [с центром в точке (x_0, y_0), где x_0 и y_0 — любые] по формулам:

$$\begin{aligned}
&x = r\cos\theta + x_0, && y = r\sin\theta + y_0 && \text{(прямое преобразование)},\\
&r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, && \operatorname{tg}\theta = \frac{y-y_0}{x-x_0} && \text{(обратное преобразование)}.
\end{aligned}$$

Радиальная и тангенциальная компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока w следующим образом: $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$, $u_\theta = -\frac{\partial w}{\partial r}$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(r,\theta) = r^\lambda U(\theta),$$

где функция $U = U(\theta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$U''_{\theta\theta} + \lambda^2 U = C U^{\frac{\lambda-2}{\lambda}} \qquad (\lambda, C \text{ — любые}).$$

Его решение можно представить в неявном виде. В частности, при $C = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&U = A_1 \sin(\lambda\theta) + A_2 \cos(\lambda\theta) && \text{при} \quad \lambda \neq 0,\\
&U = A_1 \theta + A_2 && \text{при} \quad \lambda = 0.
\end{aligned}$$

Значению $\lambda = 0$ соответствует решение, зависящее только от угловой координаты θ.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(r,\theta) = f(r)g(\theta),$$

где функции $f = f(r)$ и $g = g(\theta)$ описываются линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\mathbf{L}(f) = (\beta - \lambda r^{-2})f,$$
$$g''_{\theta\theta} = \lambda g,$$

где β, λ — произвольные постоянные; $\mathbf{L}(f) = r^{-1}(rf'_r)'_r$.

3°. Точное решение:

$$w = b\theta + U(\xi), \qquad \xi = \theta + a\ln r, \tag{1}$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$abU'''_{\xi\xi\xi} = 2bU''_{\xi\xi} + 2U'_\xi U''_{\xi\xi}.$$

После однократного интегрирования, имеем

$$abU''_{\xi\xi} = (U'_\xi)^2 + 2bU'_\xi + C_1, \tag{2}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Интегрируя далее, получим

$$\xi = ab\int\frac{dz}{z^2 + 2bz + C_1}, \qquad z = U'_\xi.$$

4°. Точное решение линейное по переменной θ:

$$w(r,\theta) = f(r)\theta + g(r).$$

Здесь функции $f = f(r)$ и $g = g(r)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &-f'_r\mathbf{L}(f) + f[\mathbf{L}(f)]'_r = 0,\\ &-g'_r\mathbf{L}(f) + f[\mathbf{L}(g)]'_r = 0,\end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{L}(f) = r^{-1}(rf'_r)'_r$.

Система (3) допускает первые интегралы. В результате для определения функций f и g получим линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(f) &= Af,\\ \mathbf{L}(g) &= Ag + B,\end{aligned} \tag{4}$$

где A, B — произвольные постоянные. При $A = 0$ решения уравнений (4) имеют вид

$$f(r) = C_1\ln r + C_2,$$
$$g(r) = \tfrac{1}{4}Br^2 + C_3\ln r + C_4.$$

При $A \neq 0$ решения уравнений (4) выражаются через функции Бесселя.

▶ *О других точных решениях см. уравнение 9.3.1.1.*

⊙ *Литература к уравнению 9.3.1.2*: А. А. Бучнев (1971), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial \mathrm{E}w}{\partial r} - \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial \mathrm{E}w}{\partial z} - \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial z}\mathrm{E}w = 0, \qquad \mathrm{E}w = r\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Big) + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся стационарные уравнения Эйлера, записанные для осесимметричного случая в цилиндрической системе координат, в результате введения функции тока w по формулам $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial z}$, $u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, u_r и u_z — радиальная и осевая компоненты скорости жидкости.

1°. Любая функция $w = w(r,z)$, являющаяся решением линейного уравнения второго порядка $\mathrm{E}w = 0$, будет также решением рассматриваемого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w = \varphi(r),$$
$$w = (C_1 z^2 + C_2 z + C_3) r^2 + C_4 z + C_5,$$

где $\varphi(r)$ — произвольная функция, а C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение линейное по переменной z:

$$w(r, z) = \varphi(r) z + \psi(r).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(r)$ и $\psi = \psi(r)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi[\mathbf{L}(\varphi)]'_r - \varphi'_r \mathbf{L}(\varphi) - 2r^{-1} \varphi\, \mathbf{L}(\varphi) = 0, \\ &\varphi[\mathbf{L}(\psi)]'_r - \psi'_r \mathbf{L}(\varphi) - 2r^{-1} \varphi\, \mathbf{L}(\psi) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{L}(\varphi) = \varphi''_{rr} - r^{-1} \varphi'_r$.

Система (1) допускает первые интегралы. В результате для определения функций φ и ψ получим линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}(\varphi) = 4C_1 r^2 \varphi, \\ &\mathbf{L}(\psi) = 4C_1 r^2 \psi + 4C_2 r^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Замена $\xi = r^2$ приводит (2) к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\varphi''_{\xi\xi} = C_1 \varphi,$$
$$\psi''_{\xi\xi} = C_1 \psi + C_2.$$

Интегрируя, получим

$$\varphi = \begin{cases} A_1 \operatorname{ch}(k\xi) + B_1 \operatorname{sh}(k\xi) & \text{при } C_1 = k^2 > 0, \\ A_1 \cos(k\xi) + B_1 \sin(k\xi) & \text{при } C_1 = -k^2 < 0, \\ A_1 \xi + B_1 & \text{при } C_1 = 0, \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} A_2 \operatorname{ch}(k\xi) + B_2 \operatorname{sh}(k\xi) - C_2/C_1 & \text{при } C_1 = k^2 > 0, \\ A_2 \cos(k\xi) + B_2 \sin(k\xi) - C_2/C_1 & \text{при } C_1 = -k^2 < 0, \\ \tfrac{1}{2} C_2 \xi^2 + A_2 \xi + B_2 & \text{при } C_1 = 0, \end{cases}$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — произвольные постоянные.

⦿ *Литература к уравнению 9.3.1.3*: А. А. Бучнев (1971), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

9.3.2. Нестационарные уравнения

1. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial t}(\Delta w) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = 0, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся двумерные нестационарные уравнения идеальной несжимаемой жидкости (уравнения Эйлера)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ с последующим исключением давления (с помощью перекрестного дифференцирования) из первых двух уравнений.

О стационарных решениях см. разд. 9.3.1.

1°. Пусть $w(x, y, t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1 x + C_2,\ C_1 y + C_3,\ C_1^2 t + C_4) + C_5,$$
$$w_2 = w(x \cos\beta + y \sin\beta,\ -x \sin\beta + y \cos\beta,\ t),$$
$$w_3 = w(x + \varphi(t),\ y + \psi(t),\ t) + \psi'_t(t) x - \varphi'_t(t) y + \chi(t),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, β — произвольные постоянные, а $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

2°. Любое решение уравнения Пуассона $\Delta w = C$ является также решением исходного уравнения. Решения уравнения Лапласа $\Delta w = 0$ описывают безвихревые (потенциальные) течения идеальной несжимаемой жидкости.

3°. Точные решения общего вида:

$$w(x,y,t) = Q(z) + \psi_t'(t)x - \varphi_t'(t)y, \quad z = C_1[x+\varphi(t)] + C_2[y+\psi(t)];$$
$$w(x,y,t) = Q(z) + \psi_t'(t)x - \varphi_t'(t)y, \quad z = [x+\varphi(t)]^2 + [y+\psi(t)]^2;$$

где $Q(z)$, $\varphi(t)$, $\varphi(t)$ — произвольные функции; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Аналогичным образом по формулам из п. 1° можно построить нестационарные решения, исходя из других стационарных решений (см. разд. 9.3.1).

4°. Точное решение линейное по переменной x:

$$w(x,y,t) = F(y,t)x + G(y,t), \tag{1}$$

где функции $F(y,t)$ и $G = G(y,t)$ определяются из системы одномерных уравнений третьего порядка

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (2) решается независимо от уравнения (3). Если $F = F(y,t)$ — решение уравнения (2), то функции

$$F_1 = F(y+\psi(t),t) + \psi_t'(t),$$
$$F_2 = C_1F(C_1y + C_1C_2t + C_3, C_1^2t + C_4) + C_2,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

Интегрируя уравнения (2) и (3) по y, получим систему уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f_1(t), \tag{4}$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = f_2(t), \tag{5}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — произвольная функция. Уравнение (5) линейно относительно функции G. Замена

$$G = \int U\,dy - hF + h_t'y, \qquad \text{где} \quad U = U(y,t), \quad F = F(y,t), \tag{6}$$

где функция $h = h(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$h_{tt}'' - f_1(t)h = f_2(t), \tag{7}$$

приводит (5) к линейному однородному уравнению с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} - F\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}U. \tag{8}$$

Таким образом, если известно частное решение уравнения (2) или (4), то определение функции G сводится к решению линейных уравнений (7), (8) с последующим интегрированием по формуле (6).

Точные решения уравнения (2) приведены в табл. 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения в двух последних строках табл. 8, подстановкой $H_z' = V(H)$ сводятся к уравнениям первого порядка с разделяющимися переменными. В табл. 9 указаны общие решения уравнения (5), соответствующие точным решениям уравнения (2) из табл. 8.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (7) можно найти по формуле

$$h(t) = C_1h_1(t) + C_2h_2(t) + \frac{1}{W_0}\left[h_2(t)\int h_1(t)f_2(t)\,dt - h_1(t)\int h_2(t)f_2(t)\,dt\right], \tag{9}$$

ТАБЛИЦА 8
Точные решения уравнений (2) и (4)

№	Функция $F = F(y,t)$ (или общий вид решения)	Функция $f_1(t)$ в уравнении (4)	Определяющие функции (или определяющее уравнение)
1	$F = \varphi(t)y + \psi(t)$	$f_1(t) = \varphi'_t + \varphi^2$	$\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольны
2	$F = A\exp[-\lambda y - \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$f_1(t) = 0$	$\psi(t)$ — произвольна; A, λ — любые
3	$F = A\,\mathrm{sh}[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$f_1(t) = A^2\lambda^2$	$\psi(t)$ — произвольна; A, λ — любые
4	$F = A\,\mathrm{ch}[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$f_1(t) = -A^2\lambda^2$	$\psi(t)$ — произвольна; A, λ — любые
5	$F = A\sin[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$f_1(t) = A^2\lambda^2$	$\psi(t)$ — произвольна; A, λ — любые
6	$F = A\cos[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$f_1(t) = A^2\lambda^2$	$\psi(t)$ — произвольна; A, λ — любые
7	$F = t^{-1}H(z) + \psi'_t(t),\ z = y + \psi(t)$	$f_1(t) = At^{-2}$	$-A - H'_z + (H'_z)^2 - HH''_{zz} = 0$
8	$F = t^{-1/2}\left[H(z) - \frac{1}{2}z\right],\ z = yt^{-1/2}$	$f_1(t) = At^{-2}$	$\frac{3}{4} - A - 2H'_z + (H'_z)^2 - HH''_{zz} = 0$

ТАБЛИЦА 9
Точные решения уравнения (5) [номер в первом столбце соответствует номеру точного решения в табл. 8]

№	Общее решение уравнения (5) [везде $\Theta(\xi)$ — произвольная функция]	Обозначения
1	$G = \frac{1}{\Phi^2(t)}\Theta(\xi) + \frac{y}{\Phi(t)}\int f_2(t)\Phi(t)\,dt,\ \xi = y\Phi(t) + \int\psi(t)\Phi(t)\,dt$	$\Phi(t) = \exp\left[\int\varphi(t)\,dt\right]$
2	Формула (6), где $U = e^{-\lambda z}\Theta(\xi),\ \xi = t + \frac{1}{A\lambda}e^{\lambda z}$	$z = y + \psi(t)$
3	Формула (6), где $U = \mathrm{sh}(\lambda z)\Theta(\xi),\ \xi = t + \frac{1}{A\lambda}\ln\left\lvert\mathrm{th}\,\frac{\lambda z}{2}\right\rvert$	$z = y + \psi(t)$
4	Формула (6), где $U = \mathrm{ch}(\lambda z)\Theta(\xi),\ \xi = t + \frac{2}{A\lambda}\,\mathrm{arctg}(e^{\lambda z})$	$z = y + \psi(t)$
5	Формула (6), где $U = \sin(\lambda z)\Theta(\xi),\ \xi = t + \frac{1}{A\lambda}\ln\left\lvert\mathrm{tg}\,\frac{\lambda z}{2}\right\rvert$	$z = y + \psi(t)$
6	Формула (6), где $U = \cos(\lambda z)\Theta(\xi),\ \xi = t + \frac{1}{A\lambda}\ln\left\lvert\mathrm{tg}\left(\frac{\lambda z}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$z = y + \psi(t)$
7	Формула (6), где $U = \Theta(\xi)H(z),\ \xi = t\exp\left[\int\frac{dz}{H(z)}\right]$	$z = y + \psi(t)$
8	Формула (6), где $U = \Theta(\xi)H(z)\exp\left[-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{H(z)}\right],\ \xi = t\exp\left[\int\frac{dz}{H(z)}\right]$	$z = \frac{y}{\sqrt{t}}$

где $h_1 = h_1(t)$ и $h_2 = h_2(t)$ — фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения при $f_2 \equiv 0$, $W_0 = h_1(h_2)'_t - h_2(h_1)'_t$ — детерминант Вронского ($W_0 = \mathrm{const}$).

Для точных решений 2–8 из табл. 8 в формуле (9) следует положить:

$$
\begin{array}{llll}
h_1 = 1, & h_2 = t, & W_0 = 1 & \text{для решения 2;} \\
h_1 = e^{-A\lambda t}, & h_2 = e^{A\lambda t}, & W_0 = 2A\lambda & \text{для решений 3, 5, 6;} \\
h_1 = \cos(A\lambda t), & h_2 = \sin(A\lambda t), & W_0 = A\lambda & \text{для решения 4;} \\
h_1 = |t|^{\frac{1}{2}-\mu}, & h_2 = |t|^{\frac{1}{2}+\mu}, & W_0 = 2\mu = (1+4A)^{\frac{1}{2}} & \text{для решений 7, 8.}
\end{array}
$$

5°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = F(\zeta,t)x + G(\zeta,t), \qquad \zeta = y + kx,$$

где функции $F(\zeta,t)$ и $G=G(\zeta,t)$ определяются из системы одномерных уравнений третьего порядка

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t\partial\zeta^2}+\frac{\partial F}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}-F\frac{\partial^3 F}{\partial\zeta^3}=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial t\partial\zeta^2}+\frac{\partial G}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}-F\frac{\partial^3 G}{\partial\zeta^3}=\frac{2k}{k^2+1}\Bigl(F\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial\zeta}\Bigr). \tag{11}$$

Интегрируя уравнения (10) и (11) по ζ, получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial\zeta}+\Bigl(\frac{\partial F}{\partial\zeta}\Bigr)^2-F\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}=f_1(t), \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial\zeta}+\frac{\partial F}{\partial\zeta}\frac{\partial G}{\partial\zeta}-F\frac{\partial^2 G}{\partial\zeta^2}=Q(\zeta,t), \tag{13}$$

где $f_1(t)$ — произвольная функция, а функция $Q(\zeta,t)$ определяется по формуле

$$Q(\zeta,t)=-\frac{2k}{k^2+1}\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{2k}{k^2+1}\int F\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}\,d\zeta+f_2(t)\qquad [f_2(t)\text{ — любая}].$$

Уравнение (13) линейно относительно функции G. Замена $U=\frac{\partial G}{\partial\zeta}$ приводит его к линейному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t}-F\frac{\partial U}{\partial\zeta}=-\frac{\partial F}{\partial\zeta}U+Q(\zeta,t). \tag{14}$$

Уравнение (10) с точностью до переобозначения совпадает уравнением (2), точные решения которого описаны в табл. 8. В этих случаях решения соответствующего уравнения (14) можно найти в квадратурах.

6°. Точное решение [частный случай решения вида (1)]:

$$w(x,y,t)=\exp\Bigl[-\lambda y-\lambda\int\varphi(t)\,dt\Bigr]\Bigl[C_1x+C_2-C_1\int\psi(t)\,dt\Bigr]+\varphi(t)x+\psi(t)y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

7°. Точное решение:

$$w(x,y,t)=e^{-\lambda y}\bigl[A(t)e^{\beta x}+B(t)e^{-\beta x}\bigr]+\varphi(t)x+\psi(t)y,$$

$$A(t)=C_1\exp\Bigl[-\beta\int\psi(t)\,dt-\lambda\int\varphi(t)\,dt\Bigr],$$

$$B(t)=C_2\exp\Bigl[\beta\int\psi(t)\,dt-\lambda\int\varphi(t)\,dt\Bigr],$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, λ, β — произвольные постоянные.

8°. Точное решение:

$$w(x,y,t)=e^{-\lambda y}\bigl[A(t)\sin(\beta x)+B(t)\cos(\beta x)\bigr]+\varphi(t)x+\psi(t)y,$$

$$A(t)=\exp\Bigl(-\lambda\int\varphi\,dt\Bigr)\Bigl[C_1\sin\Bigl(\beta\int\psi\,dt\Bigr)+C_2\cos\Bigl(\beta\int\psi\,dt\Bigr)\Bigr],$$

$$B(t)=\exp\Bigl(-\lambda\int\varphi\,dt\Bigr)\Bigl[C_1\cos\Bigl(\beta\int\psi\,dt\Bigr)-C_2\sin\Bigl(\beta\int\psi\,dt\Bigr)\Bigr],$$

где $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$ — произвольные функции, C_1, C_2, λ, β — произвольные постоянные.

9°. Точные решения:

$$w(x,y,t)=A(t)\exp(k_1x+\lambda_1y)+B(t)\exp(k_2x+\lambda_2y)+\varphi(t)x+\psi(t)y,$$

$$A(t)=C_1\exp\Bigl[\lambda_1\int\varphi(t)\,dt-k_1\int\psi(t)\,dt\Bigr],$$

$$B(t)=C_2\exp\Bigl[\lambda_2\int\varphi(t)\,dt-k_2\int\psi(t)\,dt\Bigr],$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольная функция; C_1, C_2 — произвольные постоянные; k_1, λ_1, k_2, λ_2 — произвольные параметры, связанные одним из двух соотношений:

$$k_1^2 + \lambda_1^2 = k_2^2 + \lambda_2^2 \quad \text{(первое семейство решений)},$$
$$k_1\lambda_2 = k_2\lambda_1 \quad \text{(второе семейство решений)}.$$

10°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \big[C_1\sin(\lambda x) + C_2\cos(\lambda x)\big]\big[A(t)\sin(\beta y) + B(t)\cos(\beta y)\big] + \varphi(t)x,$$
$$A(t) = C_3\cos\Big(\beta\int\varphi\,dt + C_4\Big),\quad B(t) = C_3\sin\Big(\beta\int\varphi\,dt + C_4\Big),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3, C_4, λ, β — произвольные постоянные.

11°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \big[C_1\operatorname{sh}(\lambda x) + C_2\operatorname{ch}(\lambda x)\big]\big[A(t)\sin(\beta y) + B(t)\cos(\beta y)\big] + \varphi(t)x,$$
$$A(t) = C_3\cos\Big(\beta\int\varphi\,dt + C_4\Big),\quad B(t) = C_3\sin\Big(\beta\int\varphi\,dt + C_4\Big),$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3, C_4, λ, β — произвольные постоянные.

12°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = f(z) + g(t)z + \varphi(t)x + \psi(t)y,\qquad z = kx + \lambda y + \int\big[\lambda\varphi(t) - k\psi(t)\big]\,dt,$$

где $f(z)$, $g(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные.

13°. Существуют «двумерные» решения вида

$$w = W(\xi,\eta) + c_1x + c_2y,\qquad \xi = a_1x + a_2y + a_3t,\qquad \eta = b_1x + b_2y + b_3t.$$

⦿ *Литература*: А. А. Бучнев (1971), П. Олвер (1989), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

2. $\displaystyle \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial Q}{\partial\theta} = 0,\qquad Q = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится уравнение 9.3.4.1 путем перехода к полярной системе координат [с центром в точке (x_0, y_0), где x_0 и y_0 — любые] по формулам:

$$x = r\cos\theta + x_0,\qquad y = r\sin\theta + y_0\qquad \text{(прямое преобразование)},$$
$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},\qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y-y_0}{x-x_0}\qquad \text{(обратное преобразование)}.$$

Радиальная и тангенциальная компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока w следующим образом: $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}$, $u_\theta = -\frac{\partial w}{\partial r}$.

1°. Точное решение линейное по переменной θ:

$$w(r,\theta,t) = f(r,t)\theta + g(r,t), \tag{1}$$

где функции $f = f(r,t)$ и $g = g(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\mathbf{L}(f_t) - r^{-1}f_r\mathbf{L}(f) + r^{-1}f[\mathbf{L}(f)]_r = 0, \tag{2}$$
$$\mathbf{L}(g_t) - r^{-1}g_r\mathbf{L}(f) + r^{-1}f[\mathbf{L}(g)]_r = 0. \tag{3}$$

Здесь индексы r и t обозначают соответствующие частные производные, $\mathbf{L}(f) = r^{-1}(rf_r)_r$.

2°. Для частного решения уравнения (2) вида

$$f = \varphi(t)\ln r + \psi(t) \tag{4}$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, уравнение (3) заменой $U = \mathbf{L}(g)$ сводится к линейному уравнению первого порядка $U_t + r^{-1}fU_r = 0$. Два частных решения этого уравнения описываются формулами

$$U = \Theta(\xi),\quad \xi = r^2 - 2\int\psi(t)\,dt \qquad \text{(первое семейство решений}, \varphi = 0),$$
$$U = \Theta(\xi),\quad \xi = \int\frac{r\,dr}{\ln r} - \int\varphi(t)\,dt \qquad \text{(второе семейство решений}, \psi = 0),$$

где $\Theta(\xi)$ — произвольная функция. Второе слагаемое в решении (1) [при условии, что первое слагаемое имеет вид (4)] выражается через $U = U(r,t)$ следующим образом:

$$g(r,t) = C_1(t)\ln r + C_2(t) + \int \Phi(r,t)\,dr, \qquad \Phi(r,t) = \frac{1}{r}\int rU(r,t)\,dr,$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$ — произвольные функции.

Замечание. Уравнение (2) имеет также частное решение $f = \frac{r^2}{2(t+C)}$.

► *О других точных решениях см. уравнение 9.3.2.1.*

⊙ *Литература*: А. А. Бучнев (1971), П. Олвер (1989), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

9.4. Другие нелинейные уравнения третьего порядка

9.4.1. Уравнения, содержащие вторые и третьи производные по t

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k(t)\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)w\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + g(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + p(t)w + q(t).$

Точное решение в виде полинома третьей степени по x:

$$w(x,t) = \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_3'' + k(t)\varphi_3' &= [6f(t)\varphi_3 + p(t)]\varphi_3,\\
\varphi_2'' + k(t)\varphi_2' &= [6f(t)\varphi_3 + p(t)]\varphi_2 + 3h(t)\varphi_3,\\
\varphi_1'' + k(t)\varphi_1' &= [6f(t)\varphi_3 + p(t)]\varphi_1 + 6g(t)\varphi_3 + 2h(t)\varphi_2,\\
\varphi_0'' + k(t)\varphi_0' &= [6f(t)\varphi_3 + p(t)]\varphi_0 + 2g(t)\varphi_2 + h(t)\varphi_1 + q(t).
\end{aligned}$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + aw\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\dfrac{\partial^3 w}{\partial t^3} = 0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-2}w(C_1^3x + C_2, C_1t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = U(\xi), \qquad \xi = t + \lambda x,$$

где функция $U = U(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\ln|w| + a\lambda w + bw''_{\xi\xi} = C_1.$$

3°. Автомодельное решение:

$$w = t^2u(z), \qquad z = x/t^3,$$

где функция $u = u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$b(27z^3u'''_{zzz} + 54z^2u''_{zz} + 6zu'_z) + 3\frac{z}{u}u'_z - au'_z - 2 = 0.$$

9.4.2. Уравнения, содержащие смешанные производные

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$

Это уравнение встречается в гидродинамике [см. 9.2.3.1, уравнение (4)].

1°. Пусть $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= w(x + \psi(t), t) + \psi_t'(t),\\
w_2 &= C_1w(C_1x + C_1C_2t + C_3, C_1^2t + C_4) + C_2,
\end{aligned}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = \frac{C_1 x}{C_1 t + C_2} + \psi(t),$$
$$w(x,t) = \frac{6\nu}{x + \psi(t)} + \psi'_t(t),$$
$$w(x,t) = C_1 \exp\bigl[-\lambda x + \lambda\psi(t)\bigr] - \psi'_t(t) + \nu\lambda,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Первое решение является «невязким» (оно не зависит от ν).

3°. Решение типа бегущей волны (λ — произвольная постоянная):

$$w = F(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $F(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda F''_{zz} + (F'_z)^2 - FF''_{zz} = \nu F'''_{zzz}.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w = t^{-1/2}\bigl[G(\xi) - \tfrac{1}{2}\xi\bigr], \quad \xi = xt^{-1/2},$$

где функция $G = G(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\tfrac{3}{4} - 2G'_\xi + (G'_\xi)^2 - GG''_{\xi\xi} = \nu G'''_{\xi\xi\xi}.$$

Решения в пп. 3°, 4° можно обобщить с помощью формул из п. 1°.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *a*).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f(t).$

Это уравнение встречается в гидродинамике [см. уравнение (3) в 9.2.3.2].

1°. Пусть $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + \psi(t), t) + \psi'_t(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение (линейное по x) для любой $f(t)$:

$$w(x,t) = \varphi(t)x + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается уравнением Риккати $\varphi'_t + \varphi^2 = f(t)$. О точных решениях этого уравнения см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *a*).

3°. Точные решения при $f(t) = Ae^{-\beta t}$, $A > 0$, $\beta > 0$:

$$w(x,t) = Be^{-\frac{1}{2}\beta t}\sin[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \qquad B = \pm\sqrt{\frac{2A\nu}{\beta}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$
$$w(x,t) = Be^{-\frac{1}{2}\beta t}\cos[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

4°. Точные решения при $f(t) = Ae^{\beta t}$, $A > 0$, $\beta > 0$:

$$w(x,t) = Be^{\frac{1}{2}\beta t}\,\mathrm{sh}[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \qquad B = \pm\sqrt{\frac{2A\nu}{\beta}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

5°. Точные решения при $f(t) = Ae^{\beta t}$, $A < 0$, $\beta > 0$:

$$w(x,t) = Be^{\frac{1}{2}\beta t}\,\mathrm{ch}[\lambda x + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t), \qquad B = \pm\sqrt{\frac{2|A|\nu}{\beta}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

6°. Точное решение при $f(t) = Ae^{\beta t}$, A — любое, $\beta > 0$:

$$w(x,t) = \psi(t)e^{\lambda x} - \frac{Ae^{\beta t-\lambda x}}{4\lambda^2\psi(t)} + \frac{\psi'_t(t)}{\lambda\psi(t)} - \nu\lambda, \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{\beta}{2\nu}},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция.

7°. Автомодельное решение при $f(t) = At^{-2}$:

$$w(x,t) = t^{-1/2}\bigl[u(z) - \tfrac{1}{2}z\bigr], \quad z = xt^{-1/2},$$

где функция $u = u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\tfrac{3}{4} - A - 2u'_z + (u'_z)^2 - uu''_{zz} = \nu u'''_{zzz},$$

порядок которого можно понизить на единицу.

8°. Решение типа бегущей волны при $f(t) = A$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = x + \lambda t,$$

где функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-A + \lambda w''_{\xi\xi} + (w'_\xi)^2 - ww''_{\xi\xi} = \nu w'''_{\xi\xi\xi},$$

порядок которого можно понизить на единицу.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 - w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$

1°. Пусть $w = w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x + \psi(t), t) + \psi'_t(t),$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = \frac{C_1 x}{C_1 t + C_2} + \varphi(t),$$
$$w(x,t) = \varphi(t)e^{-\lambda x} - \frac{\varphi'_t(t)}{\lambda\varphi(t)} + \lambda f(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Первое решение является вырожденным.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(y)\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} + g(y)x + h(y).$

Точное решение линейное по переменной x:

$$w = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f\varphi'''_{yyy} + \varphi\varphi''_{yy} - (\varphi'_y)^2 + g = 0,$$
$$f\psi'''_{yyy} + \varphi\psi''_{yy} - \varphi'_y\psi'_y + h = 0.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl[f(y)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr] + g(y)x + h(y).$

Точное решение линейное по переменной x:

$$w = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(f\varphi''_{yy})'_y + \varphi\varphi''_{yy} - (\varphi'_y)^2 + g = 0,$$
$$(f\psi''_{yy})'_y + \varphi\psi''_{yy} - \varphi'_y\psi'_y + h = 0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\dfrac{\partial w}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2}$.

BBM уравнение. Описывает длинные волны в дисперсных системах.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w(x + C_2, C_1 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = \frac{u(x)}{t},$$

где функция $u = u(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\beta u''_{xx} - uu'_x - u = 0.$$

Его решение можно представить в параметрическом виде

$$u = \sqrt{2\beta}(\tau - \ln|\tau + 1| + C_1)^{1/2},$$
$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2\beta}\int \frac{d\tau}{(\tau + 1)(\tau - \ln|\tau + 1| + C_1)^{1/2}} + C_2.$$

3°. Точное решение:

$$w = \frac{u(\xi)}{t}, \quad \xi = x - a\ln t,$$

где функция $u = u(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\beta(au'''_{\xi\xi\xi} + u''_{\xi\xi}) - (u + a)u'_\xi - u = 0.$$

4°. Решение типа бегущей волны:

$$w = a - \frac{2}{3}b(1 + s^{-2}) + 2b\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{6\beta a}}\,\frac{x - at}{s}; s\right),$$

где $\mathrm{sn}(\xi; s)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем s, a — амплитуда волны.

⊙ *Литература*: D. N. Peregrine (1966), T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony (1972), N. H. Ibragimov (1994, стр. 194–196).

10. Уравнения четвертого порядка

10.1. Уравнения, содержащие вторую производную по t

10.1.1. Уравнение Буссинеска и его модификации

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$

Уравнение Буссинеска в канонической форме.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(C_1 x + C_2, \pm C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= 2C_1 x - 2C_1^2 t^2 + C_2 t + C_3,\\
w(x,t) &= (C_1 t + C_2)x - \frac{1}{12C_1^2}(C_1 t + C_2)^4 + C_3 t + C_4,\\
w(x,t) &= -\frac{(x+C_1)^2}{(t+C_2)^2} + \frac{C_3}{t+C_2} + C_4(t+C_2)^2,\\
w(x,t) &= -\frac{x^2}{t^2} + C_1 t^3 x - \frac{C_1^2}{54}t^8 + C_2 t^2 + \frac{C_4}{t},\\
w(x,t) &= -\frac{(x+C_1)^2}{(t+C_2)^2} - \frac{12}{(x+C_1)^2},\\
w(x,t) &= -3\lambda^2 \cos^{-2}\left[\tfrac{1}{2}\lambda(x \pm \lambda t) + C_1\right],
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны (обобщает последнее решение из п. 2°):

$$w = w(\zeta), \quad \zeta = x + \lambda t,$$

где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (C_1, C_2 — произвольные постоянные)

$$w''_{\zeta\zeta} + w^2 + 2\lambda^2 w + C_1\zeta + C_2 = 0.$$

При $C_1 = 0$ это уравнение интегрируется в квадратурах.

4°. Автомодельное решение:

$$w = \frac{1}{t}U(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''''_{zzzz} + (UU'_z)'_z + \tfrac{1}{4}z^2 U''_{zz} + \tfrac{7}{4}zU'_z + 2U = 0.$$

5°. Вырожденное решение (обобщает четыре первых решения из п. 2°):

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi''_{tt} &= -6\varphi^2,\\
\psi''_{tt} &= -6\varphi\psi,\\
\chi''_{tt} &= -2\varphi\chi - \psi^2.
\end{aligned}$$

6°. Точное решение:

$$w = f(\xi) - 4k^2t^2, \quad \xi = x - kt^2.$$

Здесь функция $f = f(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$2kf + 8k^2\xi + C = ff'_\xi + f'''_{\xi\xi\xi},$$

где C, k — произвольные постоянные.

7°. Точное решение (обобщает предпоследнее решение из п. 2°):

$$w = (x + C_1)^2 u(t) - \frac{12}{(x + C_1)^2},$$

где функция $u = u(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$u''_{tt} = -6u^2.$$

Функция $u(t)$ представима через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

8°. Точное решение:

$$w = \frac{1}{t}F(z) - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{t} + Ct\right)^2, \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} - \frac{1}{3}Ct^{3/2},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $F = F(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$F''''_{zzzz} + (FF'_z)'_z + \tfrac{3}{4}zF'_z + \tfrac{3}{2}F - \tfrac{9}{8}z^2 = 0.$$

9°. Точное решение:

$$w(x,t) = (a_1t + a_0)^2 U(z) - \left(\frac{a_1x + b_1}{a_1t + a_0}\right)^2, \quad z = x(a_1t + a_0) + b_1t + b_0.$$

Здесь a_1, a_0, b_1, b_0 — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$U''_{zz} + \tfrac{1}{2}U^2 = c_1z + c_2, \tag{1}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. При $c_1 = 0$ решение уравнения (1) можно представить в неявном виде, при $c_1 \neq 0$ уравнение сводится к первому уравнению Пенлеве.

⊙ *Литература*: P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989).

10°. Точное решение:

$$w(x,t) = a^2U(z) - a^{-2}(a^2kt + b_1)^2, \quad z = ax + \tfrac{1}{2}a^2kt^2 + b_1t + b_0.$$

Здесь a, b_1, b_0, k — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$U'''_{zzz} + UU'_z + kU = 2k^2z + c, \tag{2}$$

где c — произвольная постоянная. Уравнение (2) сводится ко второму уравнению Пенлеве.

⊙ *Литература*: P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989).

11°. Точное решение:

$$w(x,t) = (a_1t + a_0)^2U(z) - \left[\frac{a_1^2x + \lambda(a_1t + a_0)^5 + a_1b_1}{a_1(a_1t + a_0)}\right]^2,$$

$$z = x(a_1t + a_0) + \frac{\lambda}{6a_1^2}(a_1t + a_0)^6 + b_1t + b_0.$$

Здесь a_1, a_0, b_1, b_0 — произвольные постоянные, а функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$U'''_{zzz} + UU'_z + 5\lambda U = 50\lambda^2z + c, \tag{3}$$

где c — произвольная постоянная. Уравнение (3) сводится ко второму уравнению Пенлеве.

⊙ *Литература*: P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989).

12°. Точное решение:

$$w(x,t) = t^{-1}U(z) - \tfrac{1}{4}t^{-2}(x - 3at^2)^2, \quad z = xt^{-1/2} + at^{3/2},$$

где a — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$U''''_{zzzz} + UU''_{zz} + (U'_z)^2 + \tfrac{3}{4}zU'_z + \tfrac{3}{2}U = \tfrac{9}{8}z^2.$$

Решения этого уравнения выражаются через решения четвертого уравнения Пенлеве.

⊙ *Литература*: P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989).

13°. Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi^2(t)U(z) - \frac{1}{\varphi^2(t)}\big[x\varphi'_t(t) + \psi'_t(t)\big]^2, \quad z = \varphi(t)x + \psi(t).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\varphi''_{tt} = A\varphi^5, \tag{4}$$

$$\psi''_{tt} = A\varphi^4\psi, \tag{5}$$

где A — произвольная постоянная, а функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка

$$U''''_{zzzz} + UU''_{zz} + (U'_z)^2 + AzU'_z + 2AU = 2A^2z^2.$$

Первый интеграл уравнения (4) имеет вид (B — произвольная постоянная)

$$(\varphi'_t)^2 = \tfrac{1}{3}A\varphi^6 + B.$$

Решение этого уравнения можно выразить через эллиптические функции Якоби. Общее решение уравнения (5) можно выразить через функцию $\varphi = \varphi(t)$ по формуле

$$\psi = C_1\varphi(t) + C_2\varphi(t)\int\frac{dt}{\varphi^2(t)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989).

14°. Уравнение Буссинеска интегрируется методом обратной задачи рассеяния, см. цитируемую ниже литературу.

⊙ *Литература*: В. Е. Захаров (1973), J. Weiss (1984), М. А. Абловиц, Х. Сигур (1987).

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(w\frac{\partial w}{\partial x}\Big) + b\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

Ненормированное уравнение Буссинеска.

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(C_1x + C_2, \pm C_1^2 t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,t) = 2C_1x + 2aC_1^2t^2 + C_2t + C_3,$$

$$w(x,t) = (C_1t + C_2)x + \frac{a}{12C_1^2}(C_1t + C_2)^4 + C_3t + C_4,$$

$$w(x,t) = \frac{(x + C_1)^2}{a(t + C_2)^2} + \frac{C_3}{t + C_2} + C_4(t + C_2)^2,$$

$$w(x,t) = \frac{x^2}{at^2} + C_1t^3x + \frac{aC_1^2}{54}t^8 + C_2t^2 + \frac{C_4}{t},$$

$$w(x,t) = \frac{(x + C_1)^2}{a(t + C_2)^2} - \frac{12b}{a(x + C_1)^2},$$

$$w(x,t) = \frac{3\lambda^2}{a}\,\mathrm{ch}^{-2}\Big[\frac{\lambda}{2\sqrt{b}}(x \pm \lambda t) + C_1\Big],$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны (обобщает последнее решение из п. 2°):

$$w = u(\zeta), \quad \zeta = x + \lambda t,$$

где функция $u = u(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (C_1, C_2 — произвольные постоянные)

$$bu''_{\zeta\zeta} + au^2 - 2\lambda^2 u + C_1\zeta + C_2 = 0.$$

При $C_1 = 0$ это уравнение интегрируется в квадратурах.

4°. Автомодельное решение:

$$w = \frac{1}{t}U(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

где функция $U = U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2U + \tfrac{7}{4}zU'_z + \tfrac{1}{4}z^2U''_{zz} = a(UU'_z)'_z + bU''''_{zzzz}.$$

5°. Вырожденное решение (обобщает четыре первых решения из п. 2°):

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi''_{tt} &= 6a\varphi^2, \\ \psi''_{tt} &= 6a\varphi\psi, \\ \chi''_{tt} &= 2a\varphi\chi + a\psi^2. \end{aligned}$$

6°. Точное решение:

$$w = f(\xi) + 4ak^2t^2, \quad \xi = x + akt^2.$$

Здесь функция $f = f(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$2akf + 8ak^2\xi + C = aff'_\xi + bf'''_{\xi\xi\xi},$$

где C, k — произвольные постоянные.

7°. Точное решение (обобщает предпоследнее решение из п. 2°):

$$w = (x + C_1)^2u(t) - \frac{12b}{a(x + C_1)^2},$$

где функция $u = u(t)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$u''_{tt} = 6au^2.$$

Функция $u(t)$ представима через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

8°. Точное решение:

$$w = \frac{1}{t}F(z) + \frac{1}{4a}\left(\frac{x}{t} + Ct\right)^2, \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} - \frac{1}{3}Ct^{3/2},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $F = F(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a(FF'_z)'_z + bF''''_{zzzz} = \frac{3}{4}zF'_z + \frac{3}{2}F + \frac{9}{8a}z^2.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 6\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

Решения этого уравнения можно представить в виде

$$w(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln u), \qquad (1)$$

где функция $u = u(x,t)$ описывается билинейным уравнением

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - u\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0. \qquad (2)$$

1°. Одно- и двухсолитонные решения исходного уравнения, порождаются следующими решениями уравнения (2):

$$u = 1 + A\exp\bigl(kx \pm kt\sqrt{1+k^2}\,\bigr),$$
$$u = 1 + A_1\exp(k_1x + m_1t) + A_2\exp(k_2x + m_2t) +$$
$$+ A_1A_2p_{12}\exp\bigl[(k_1+k_2)x + (m_1+m_2)t\bigr],$$

где A, A_1, A_2, k, k_1, k_2 — произвольные постоянные, и использованы обозначения

$$m_i = \pm k_i\sqrt{1+k_i^2}, \quad p_{12} = \frac{3(k_1-k_2)^2 + (n_1-n_2)^2}{3(k_1+k_2)^2 + (n_1-n_2)^2}, \quad n_i = \frac{m_i}{k_i}.$$

⊙ *Литература*: R. Hirota (1973).

2°. Рациональные решения порождаются следующими решениями уравнения (2):

$$u = x^2 - t^2 - 3,$$
$$u = (x \pm t)^3 + x \mp 5t.$$

⊙ *Литература*: М. Абловиц, Ч. Сигур (1987).

3°. Точное решение уравнения (2):

$$u = \exp(2kx - 2mt) + (Cx - At)\exp(kx - mt) - B,$$
$$A = \frac{C(2k^2+1)}{\sqrt{1+k^2}}, \quad B = \frac{C^2(4k^2+3)}{12k^2(1+k^2)}, \quad m = \sqrt{k^2+k^4},$$

где k, C — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: О. В. Капцов (1998).

4°. Точные решения уравнения (2):

$$u = \sin(kx - mt) + Ax + Bt,$$
$$u = \sin(kx) + C\sin(mt) + E\cos(mt),$$

где k, C — произвольные постоянные,

$$m = \sqrt{k^2-k^4}, \quad A = \sqrt{\frac{3m^2}{3-4k^2}}, \quad B = \frac{A(2k^2-1)}{\sqrt{1-k^2}}, \quad E = \sqrt{\frac{1-C^2+k^2C^2-4k^2}{1-k^2}}.$$

⊙ *Литература*: О. В. Капцов (1998).

5°. Точное решение (C — произвольная постоянная):

$$u = \sin(kx) + C\exp\bigl(t\sqrt{k^4-k^2}\,\bigr) + \frac{4k^2-1}{4C(k^2-1)}\exp\bigl(-t\sqrt{k^4-k^2}\,\bigr).$$

⊙ *Литература*: О. В. Капцов (1998).

6°. Замена $w = \frac{1}{6}(U-1)$ приводит к уравнению вида 10.1.1.2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(U\frac{\partial U}{\partial x}\Bigr) + \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}.$$

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(w\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + c\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

Замена $w = U - (a/b)$ приводит к уравнению вида 10.1.1.2:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(U\frac{\partial U}{\partial x}\Bigr) + c\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}.$$

10.1.2. Другие уравнения с квадратичной нелинейностью

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw^2 - f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - g(t)\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} - h(t)w - p(t).$

1°. Точное решение при $c/(a+b) = k^2 > 0$:

$$w(x,t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\cos(kx) + \varphi_3(t)\sin(kx),$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_1'' &= c\varphi_1^2 + bk^2(\varphi_2^2 + \varphi_3^2) - h(t)\varphi_1 - p(t),\\
\varphi_2'' &= (2c - ak^2)\varphi_1\varphi_2 + [k^2 f(t) - k^4 g(t) - h(t)]\varphi_2,\\
\varphi_3'' &= (2c - ak^2)\varphi_1\varphi_3 + [k^2 f(t) - k^4 g(t) - h(t)]\varphi_3.
\end{aligned}$$

Штрихи обозначают производные по t. Из двух последних уравнений имеем $\varphi_2''/\varphi_2 = \varphi_3''/\varphi_3$. Отсюда следует, что

$$\varphi_3 = C_1\varphi_2 + C_2\varphi_2\int\frac{dt}{\varphi_2^2}, \qquad (1)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение при $c/(a+b) = -k^2 < 0$:

$$w(x,t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\operatorname{ch}(kx) + \varphi_3(t)\operatorname{sh}(kx),$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_1'' &= c\varphi_1^2 + bk^2(\varphi_3^2 - \varphi_2^2) - h(t)\varphi_1 - p(t),\\
\varphi_2'' &= (2c + ak^2)\varphi_1\varphi_2 - [k^2 f(t) + k^4 g(t) + h(t)]\varphi_2,\\
\varphi_3'' &= (2c + ak^2)\varphi_1\varphi_3 - [k^2 f(t) + k^4 g(t) + h(t)]\varphi_3.
\end{aligned}$$

Функцию φ_3 можно выразить через функцию φ_2 по формуле (1).

3°. *Частный случай:* $a/b = -\frac{4}{3}$, $bc < 0$.

Точное решение:

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(kx) + \psi_3(t)\cos(\tfrac{1}{2}kx), \qquad k = \sqrt{-3c/b}.$$

Здесь функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\psi_1'' &= c\psi_1^2 + bk^2\psi_2^2 + \big(A + \tfrac{1}{4}bk^2\big)\psi_3^2 - h(t)\psi_1 - p(t),\\
\psi_2'' &= (2c - ak^2)\psi_1\psi_2 + A\psi_3^2 + \big[k^2 f(t) - k^4 g(t) - h(t)\big]\psi_2,\\
\psi_3'' &= \big(2c - \tfrac{1}{4}ak^2\big)\psi_1\psi_3 + bk^2\psi_2\psi_3 + \big[\tfrac{1}{4}k^2 f(t) - \tfrac{1}{16}k^4 g(t) - h(t)\big]\psi_3,
\end{aligned}$$

где

$$A = \tfrac{1}{8}\big[4c - (a+b)k^2\big].$$

Существует более общее точное решение вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(kx) + \psi_3(t)\sin(kx) + \psi_4(t)\cos(\tfrac{1}{2}kx) + \psi_5(t)\sin(\tfrac{1}{2}kx),$$

где $k = \sqrt{-3c/b}$.

4°. *Частный случай:* $a/b = -\frac{4}{3}$, $bc > 0$.

Точное решение:

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\operatorname{ch}(kx) + \psi_3(t)\operatorname{ch}(\tfrac{1}{2}kx), \qquad k = \sqrt{3c/b}.$$

Здесь функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\psi_1'' &= c\psi_1^2 - bk^2\psi_2^2 + \big(A - \tfrac{1}{4}bk^2\big)\psi_3^2 - h(t)\psi_1 - p(t),\\
\psi_2'' &= (2c + ak^2)\psi_1\psi_2 + A\psi_3^2 - \big[k^2 f(t) + k^4 g(t) + h(t)\big]\psi_2,\\
\psi_3'' &= \big(2c + \tfrac{1}{4}ak^2\big)\psi_1\psi_3 - k^2\psi_2\psi_3 - \big[\tfrac{1}{4}k^2 f(t) + \tfrac{1}{16}k^4 g(t) + h(t)\big]\psi_3,
\end{aligned}$$

где

$$A = \tfrac{1}{8}\big[4c + (a+b)k^2\big].$$

Существует более общее точное решение вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\operatorname{ch}(kx) + \psi_3(t)\operatorname{sh}(kx) + \psi_4(t)\operatorname{ch}(\tfrac{1}{2}kx) + \psi_5(t)\operatorname{sh}(\tfrac{1}{2}kx),$$

где $k = \sqrt{3c/b}$.

⊙ *Литература к уравнению 10.1.2.1*: V. A. Galaktionov (1995).

2. $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - a(t)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - b(t)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - c(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - d(t)\frac{\partial w}{\partial x} - e(t)w - f(t).$$

Уравнение имеет точное решение в виде полинома четвертой степени по x:

$$w(x,t) = \varphi_4(t)x^4 + \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t).$$

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995).

3. $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(t)w\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + g(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h(t)\frac{\partial w}{\partial x} + p(t)w + q(t).$$

Точное решение в виде полинома четвертой степени по x:

$$w(x,t) = \varphi_4(t)x^4 + \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\varphi_4'' &= (24f\varphi_4 + p)\varphi_4,\\
\varphi_3'' &= (24f\varphi_4 + p)\varphi_3 + 4h\varphi_4,\\
\varphi_2'' &= (24f\varphi_4 + p)\varphi_2 + 12g\varphi_4 + 3h\varphi_3,\\
\varphi_1'' &= (24f\varphi_4 + p)\varphi_1 + 6g\varphi_3 + 2h\varphi_2,\\
\varphi_0'' &= (24f\varphi_4 + p)\varphi_2 + 2g\varphi_2 + h\varphi_1 + q.
\end{aligned}$$

10.2. Уравнения гидродинамики (уравнения Навье — Стокса)

10.2.1. Стационарные уравнения

1. $$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся двумерные стационарные уравнения вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}
u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u_1,\\
u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta u_2,\\
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0
\end{aligned}$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ с последующим исключением давления (с помощью перекрестного дифференцирования) из первых двух уравнений.

⊙ *Литература*: Л. Г. Лойцянский (1973).

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
w_1 &= w(C_1x + C_2, C_1y + C_3) + C_4,\\
w_2 &= w(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha),
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, α — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

⊙ *Литература*: В. В. Пухначев (1960).

2°. Любое решение уравнения Пуассона $\Delta w = C$ является также решением исходного уравнения (это — «невязкие» решения). Об использовании этих решений в гидродинамике идеальной жидкости см. Л. И. Седов (1966), М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат (1973).

3°. Точные решения в виде функции одного аргумента или суммы функций разных аргументов:

$$
\begin{aligned}
w(y) &= C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4,\\
w(x,y) &= C_1x^2 + C_2x + C_3y^2 + C_4y + C_5,\\
w(x,y) &= C_1\exp(-\lambda y) + C_2y^2 + C_3y + C_4 + \nu\lambda x,\\
w(x,y) &= C_1\exp(\lambda x) - \nu\lambda x + C_2\exp(\lambda y) + \nu\lambda y + C_3,\\
w(x,y) &= C_1\exp(\lambda x) + \nu\lambda x + C_2\exp(-\lambda y) + \nu\lambda y + C_3,
\end{aligned}
$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, λ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. В. Пухначев (1960), Л. Г. Лойцянский (1973), А. Д. Полянин (2001 *d*).

4°. Точные решения:

$$
\begin{aligned}
w(x,y) &= A(kx+\lambda y)^3 + B(kx+\lambda y)^2 + C(kx+\lambda y) + D,\\
w(x,y) &= Ae^{-\lambda(y+kx)} + B(y+kx)^2 + C(y+kx) + \nu\lambda(k^2+1)x + D,
\end{aligned}
$$

где A, B, C, D, k, β, λ — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. В. Пухначев (1960).

5°. Точные решения:

$$
\begin{aligned}
w(x,y) &= 6\nu x(y+\lambda)^{-1} + A(y+\lambda)^3 + B(y+\lambda)^{-1} + C(y+\lambda)^{-2} + D \qquad (\nu\neq 0),\\
w(x,y) &= (Ax+B)e^{-\lambda y} + \nu\lambda x + C,\\
w(x,y) &= \bigl[A\,\mathrm{sh}(\beta x) + B\,\mathrm{ch}(\beta x)\bigr]e^{-\lambda y} + \frac{\nu}{\lambda}(\beta^2+\lambda^2)x + C,\\
w(x,y) &= \bigl[A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)\bigr]e^{-\lambda y} + \frac{\nu}{\lambda}(\lambda^2-\beta^2)x + C,\\
w(x,y) &= Ae^{\lambda y+\beta x} + Be^{\gamma x} + \nu\gamma y + \frac{\nu}{\lambda}\gamma(\beta-\gamma)x + C, \qquad \gamma = \pm\sqrt{\lambda^2+\beta^2},
\end{aligned}
$$

где A, B, C, D, k, β, λ — произвольные постоянные.

Частный случай. Полагая во втором решении $A=-\nu\lambda$, $B=C=0$, $\lambda=\sqrt{k/\nu}$, получим $w=\sqrt{k\nu}\,x\bigl[1-\exp\bigl(-\sqrt{k/\nu}\,y\bigr)\bigr]$. Это решение описывает стационарное движение жидкости, вызванное движением точек поверхности $y=0$ со скоростью $u_1|_{y=0}=kx$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

6°. Точное решение линейное по переменной x:

$$
w(x,y) = F(y)x + G(y), \tag{1}
$$

где функции $F=F(y)$ и $G=G(y)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$
F'_yF''_{yy} - FF'''_{yyy} = \nu F''''_{yyyy}, \tag{2}
$$

$$
G'_yF''_{yy} - FG'''_{yyy} = \nu G''''_{yyyy}. \tag{3}
$$

В результате однократного интегрирования получим систему уравнений третьего порядка

$$
(F'_y)^2 - FF''_{yy} = \nu F'''_{yyy} + A, \tag{4}
$$

$$
G'_yF'_y - FG''_{yy} = \nu G'''_{yyy} + B, \tag{5}
$$

где A и B — произвольные постоянные. Порядок автономного уравнения (4) может быть понижен на единицу.

Нетрудно проверить, что уравнение (2) имеет частные решения:

$$
F(y) = ay + b, \tag{6}
$$

$$
F(y) = 6\nu(y+a)^{-1}, \tag{7}
$$

$$
F(y) = ae^{-\lambda y} + \lambda\nu, \tag{8}
$$

где a, b, λ — произвольные постоянные.

В общем случае уравнение (5) подстановкой $U=G'_y$ приводится к линейному неоднородному уравнению второго порядка

$$
\nu U''_{yy} + FU'_y - F'_yU + B = 0, \qquad \text{где} \quad U = G'_y. \tag{9}
$$

Соответствующее однородное уравнение (при $B=0$) имеет два линейно независимых частных решения:

$$U_1=\begin{cases}F''_{yy} & \text{при } F''_{yy}\not\equiv 0,\\ F & \text{при } F''_{yy}\equiv 0,\end{cases}\quad U_2=U_1\int\frac{\Phi\,dy}{U_1^2},\qquad \text{где}\quad \Phi=\exp\Bigl(-\frac{1}{\nu}\int F\,dy\Bigr). \tag{10}$$

(Первое частное решение однородного уравнения следует из сопоставления уравнений (2) и (9) при $B=0$.) Поэтому общие решения уравнений (9) и (3) даются формулами (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$U=C_1U_1+C_2U_2+C_3\Bigl(U_2\int\frac{U_1}{\Phi}\,dy-U_1\int\frac{U_2}{\Phi}\,dy\Bigr),\quad G=\int U\,dy+C_4,\quad C_3=-\frac{B}{\nu}. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (3), соответствующее частному решению (7), имеет вид

$$G(y)=\tilde C_1(y+a)^3+\tilde C_2+\tilde C_3(y+a)^{-1}+\tilde C_4(y+a)^{-2},$$

где $\tilde C_1$, $\tilde C_2$, $\tilde C_3$, $\tilde C_4$ — произвольные постоянные (они выражаются через C_1, C_2, C_3, C_4).

Общие решения уравнения (3), соответствующее частным решениям (6) и (8), определяются по формулам (10), (11).

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

Частный случай. Решение вида (1) при $G(y)=kF(y)$ описывает ламинарное движение жидкости в плоском канале с пористыми стенками. В этом случае уравнение (3) выполняется в силу уравнения (2).

⦿ *Литература*: A. S. Berman (1953).

7°. Точное решение:

$$w(x,y)=F(z)x+G(z),\qquad z=y+kx,$$

где функции $F=F(z)$ и $G=G(z)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$F'_zF''_{zz}-FF'''_{zzz}=\nu(k^2+1)F''''_{zzzz}, \tag{12}$$

$$G'_zF''_{zz}-FG'''_{zzz}=\nu(k^2+1)G''''_{zzzz}+4k\nu F'''_{zzz}+\frac{2k}{k^2+1}FF''_{zz}. \tag{13}$$

В результате однократного интегрирования получим систему уравнений третьего порядка

$$(F'_z)^2-FF''_{zz}=\nu(k^2+1)F'''_{zzz}+A, \tag{14}$$

$$G'_zF'_z-FG''_{zz}=\nu(k^2+1)G'''_{zzz}+\psi(z)+B, \tag{15}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\psi(z)$ определяется формулой

$$\psi(z)=4k\nu F''_{zz}+\frac{2k}{k^2+1}\int FF''_{zz}\,dz.$$

Порядок автономного уравнения (14) может быть понижен на единицу.

Нетрудно проверить, что уравнение (12) имеет частные решения:

$$F(z)=az+b,\quad z=y+kx,$$
$$F(z)=6\nu(k^2+1)(z+a)^{-1},$$
$$F(z)=ae^{-\lambda z}+\lambda\nu(k^2+1),$$

где a, b, λ — произвольные постоянные.

В общем случае уравнение (15) подстановкой $U=G'_z$ приводится к линейному неоднородному уравнению второго порядка, которое при $\psi=B=0$ (т. е. в однородном случае) имеет частное решение $U=\begin{cases}F''_{zz} & \text{при } F''_{zz}\not\equiv 0,\\ F & \text{при } F''_{zz}\equiv 0.\end{cases}$ Поэтому его общее решение можно выразить в квадратурах (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*).

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

8°. Автомодельное решение:

$$w = \int F(z)\,dz + C_1, \quad z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right),$$

где функция F описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$3\nu(F_z')^2 - 2F^3 + 12\nu F^2 + C_2F + C_3 = 0, \qquad (16)$$

C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (16) можно записать в неявном виде (его можно выразить в эллиптических функциях Вейерштрасса).

⊙ *Литература*: Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 491–493).

9°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w = a\ln|x| + \int V(z)\,dz + C_1, \quad z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Значению $a = 0$ соответствует автомодельное решение (16).

▶ *О других точных решениях см. уравнение 10.2.1.3.*

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w + f(y), \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ сводится система уравнений

$$\begin{aligned} u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u_1 + F(y),\\ u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta u_2,\\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

описывающая плоское течение вязкой несжимаемой жидкости под действием поперечной силы. Здесь $f(y) = F_y'(y)$.

Случай $F(y) = a\sin(\lambda y)$ соответствует модели А. Н. Колмогорова, которая используется для описания докритических и переходных режимов (от ламинарного течения к турбулентному).

⊙ *Литература*: О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин (2000, стр. 106–110).

1°. Точное решение в виде функции одного аргумента:

$$w(y) = -\frac{1}{6\nu}\int_0^y (y-z)^3 f(z)\,dz + C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов для произвольной $f(y)$:

$$w(x,y) = -\frac{1}{2\nu}\int_0^y (y-z)^2\Phi(z)\,dz + C_1e^{-\lambda y} + C_2y^2 + C_3y + C_4 + \nu\lambda x,$$

$$\Phi(z) = e^{-\lambda z}\int e^{\lambda z}f(z)\,dz,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные.

Частный случай. В случае $f(y) = a\beta\cos(\beta y)$, что соответствует $F(y) = a\sin(\beta y)$, из предыдущей формулы при $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $B = -\nu\lambda$ можно получить решение

$$w(x,y) = -\frac{a}{\beta^2(B^2+\nu^2\beta^2)}\left[B\sin(\beta y) + \nu\beta\cos(\beta y)\right] + Cy - Bx,$$

где B, C — произвольные постоянные. Это решение указано в книге О. М. Белоцерковского, А. М. Опарина (2000, стр. 110); оно описывает течение с периодической структурой.

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов при $f(y) = Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y}$:

$$w(x,y) = C_1e^{-\lambda x} + C_2x - \frac{A}{\lambda^3(C_2+\nu\lambda)}e^{\lambda y} + \frac{B}{\lambda^3(C_2-\nu\lambda)}e^{-\lambda y} - \nu\lambda y,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Точное решение линейное по переменной x:

$$w(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\varphi'_y\varphi''_{yy} - \varphi\varphi'''_{yyy} = \nu\varphi''''_{yyyy}, \qquad (1)$$
$$\psi'_y\varphi''_{yy} - \varphi\psi'''_{yyy} = \nu\psi''''_{yyyy} + f(y). \qquad (2)$$

После однократного интегрирования получим систему уравнений третьего порядка

$$(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy} = \nu\varphi'''_{yyy} + A, \qquad (3)$$
$$\psi'_y\varphi'_y - \varphi\psi''_{yy} = \nu\psi'''_{yyy} + \int f(y)\,dy + B, \qquad (4)$$

где A и B — произвольные постоянные. Порядок автономного уравнения (3) может быть понижен на единицу.

Нетрудно проверить, что уравнение (1) имеет частные решения:

$$\varphi(y) = ay + b,$$
$$\varphi(y) = 6\nu(y+a)^{-1},$$
$$\varphi(y) = ae^{-\lambda y} + \lambda\nu,$$

где a, b, λ — произвольные постоянные.

В общем случае уравнение (4) подстановкой $U = \psi'_y$ приводится к линейному неоднородному уравнению второго порядка

$$\nu U''_{yy} + \varphi U'_y - \varphi'_y U + F = 0, \qquad \text{где} \quad U = \psi'_y, \quad F = \int f(y)\,dy + B. \qquad (5)$$

Соответствующее однородное уравнение (при $F = 0$) имеет два линейно независимых частных решения:

$$U_1 = \begin{cases} \varphi''_{yy} & \text{при } \varphi \neq ay+b, \\ \varphi & \text{при } \varphi = ay+b, \end{cases} \quad U_2 = U_1\int\frac{\Phi\,dy}{U_1^2}, \qquad \text{где} \quad \Phi = \exp\Bigl(-\frac{1}{\nu}\int\varphi\,dy\Bigr).$$

(Первое частное решение однородного уравнения следует из сопоставления уравнений (1) и (5) при $F = 0$.) Поэтому общие решения уравнений (5) и (2) даются формулами (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$U = C_1U_1 + C_2U_2 + \frac{1}{\nu}U_1\int U_2\frac{F}{\Phi}\,dy - \frac{1}{\nu}U_2\int U_1\frac{F}{\Phi}\,dy, \quad \psi = \int U\,dy + C_4.$$

3. $\displaystyle \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится уравнение 10.2.1.1 путем перехода к полярной системе координат [с центром в точке (x_0, y_0), где x_0 и y_0 — любые] по формулам:

$$x = r\cos\theta + x_0, \qquad y = r\sin\theta + y_0 \qquad \text{(прямое преобразование)},$$
$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y-y_0}{x-x_0} \qquad \text{(обратное преобразование)}.$$

Радиальная и тангенциальная компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока w следующим образом: $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}$, $u_\theta = -\frac{\partial w}{\partial r}$.

1°. Любое решение уравнения Пуассона $\Delta w = C$ является также решением исходного уравнения (это — «невязкие» решения).

2°. Точные решения в виде функции одного аргумента и суммы функций разных аргументов:

$$w(r) = C_1r^2\ln r + C_2r^2 + C_3\ln r + C_4,$$
$$w(r,\theta) = A\nu\theta + C_1r^{A+2} + C_2r^2 + C_3\ln r + C_4,$$

где A, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. В. Пухначев (1960).

3°. Точное решение:

$$w = b\theta + U(\xi), \quad \xi = \theta + a\ln r, \qquad (1)$$

где функция $U(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\nu(a^2+1)U_\xi^{(4)} - a(b+4\nu)U'''_{\xi\xi\xi} + 2(b+2\nu)U''_{\xi\xi} + 2U'_\xi U''_{\xi\xi} = 0.$$

После однократного интегрирования имеем

$$\nu(a^2+1)U'''_{\xi\xi\xi} - a(b+4\nu)U''_{\xi\xi} + 2(b+2\nu)U'_\xi + (U'_\xi)^2 = C_1, \qquad (3)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Уравнение (3) является автономным и не зависит явно от U. Преобразование

$$z = U'_\xi, \quad u(z) = U''_{\xi\xi}$$

приводит его к уравнению Абеля второго рода

$$\nu(a^2+1)uu'_z - a(b+4\nu)u + 2(b+2\nu)z + z^2 = C_1, \qquad (3)$$

которое интегрируется в квадратурах, например, в случаях $a = 0$ и $b = -4\nu$:

$$\nu u^2 + \tfrac{2}{3}z^3 + 2(b+2\nu)z^2 = 2C_1 z + C_2 \quad \text{при} \quad a = 0,$$
$$\nu(a^2+1)u^2 + \tfrac{2}{3}z^3 - 4\nu z^2 = 2C_1 z + C_2 \quad \text{при} \quad b = -4\nu.$$

Четыре других случая разрешимости уравнения (3) описаны в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) [сначала надо привести (3) к каноническому виду заменой $u = k\bar{u}$, где $k = \text{const}$].

Отметим, что значениям $a = b = 0$ в (1)–(3) соответствует решение, зависящее только от угловой координаты θ (это решение можно записать в неявном виде, см. уравнение 10.2.1.1, п. 8°).

4°. Точное решение линейное по переменной θ:

$$w(r,\theta) = f(r)\theta + g(r).$$

Здесь функции $f = f(r)$ и $g = g(r)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-f'_r\mathbf{L}(f) + f[\mathbf{L}(f)]'_r = \nu r\mathbf{L}^2(f), \qquad (4)$$
$$-g'_r\mathbf{L}(f) + f[\mathbf{L}(g)]'_r = \nu r\mathbf{L}^2(g), \qquad (5)$$

где $\mathbf{L}(f) = r^{-1}(rf'_r)'_r$.

Частное решения уравнения (4) имеет вид $f(r) = C_1\ln r + C_2$. Соответствующее ему уравнение (5) подстановкой $Q = \mathbf{L}(g)$ сводится к линейному уравнению второго порядка, которое легко интегрируется (поскольку имеет частное решение $Q = 1$). В результате получим точное решение системы (4)–(5):

$$f(r) = C_1\ln r + C_2, \quad g(r) = C_3r^2 + C_4\ln r + C_5\int\Bigl[\int rQ(r)\,dr\Bigr]\frac{dr}{r} + C_6,$$
$$Q(r) = \int r^{(C_2/\nu)-1}\exp\Bigl(\frac{C_1}{2\nu}\ln^2 r\Bigr)\,dr,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

4. $\displaystyle \frac{1}{r}\Bigl(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{E}w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{E}w}{\partial z}\Bigr) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{E}w = \nu\mathrm{E}^2 w,$

где $\displaystyle \mathrm{E}w = r\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad \mathrm{E}^2 w = \mathrm{E}(\mathrm{E}w).$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся стационарные уравнения Навье — Стокса, записанные для осесимметричного случая в цилиндрической системе координат, в результате введения функции тока w по формулам $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial z}$, $u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, u_r и u_z — радиальная и осевая компоненты скорости жидкости.

⊙ *Литература*: Дж. Хаппель, Г. Бреннер (1976, стр. 124).

1°. Любая функция $w = w(r, z)$, являющаяся решением линейного уравнения второго порядка $\mathrm{E}w = 0$, будет также решением рассматриваемого уравнения.

2°. Точные решения в виде функции одного аргумента и суммы функций разных аргументов:

$$w(r) = C_1 r^4 + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4,$$
$$w(r,z) = A\nu z + C_1 r^{A+2} + C_2 r^4 + C_3 r^2 + C_4,$$

где A, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(r,z) = r^2 f(z),$$

где функция $f = f(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (C — произвольная постоянная):

$$\nu f'''_{zzz} + 2ff''_{zz} - (f'_z)^2 = C. \tag{1}$$

Данное решение описывает осесимметричное натекание жидкости на стенку (течение в окрестности критической точки).

⊙ *Литература*: Г. Шлихтинг (1974, стр. 99–100).

4°. Точное решение квадратичное по переменной r (обобщает решение из п. 3°):

$$w(r,z) = r^2 f(z) + Az + B,$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $f = f(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (1).

5°. Точное решение линейное по переменной z:

$$w(r,z) = \varphi(r)z + \psi(r).$$

Здесь функции $\varphi = \varphi(r)$ и $\psi = \psi(r)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi[\mathbf{L}(\varphi)]'_r - \varphi'_r \mathbf{L}(\varphi) - 2r^{-1}\varphi\,\mathbf{L}(\varphi) = \nu r \mathbf{L}^2(\varphi), \tag{2}$$
$$\varphi[\mathbf{L}(\psi)]'_r - \psi'_r \mathbf{L}(\varphi) - 2r^{-1}\varphi\,\mathbf{L}(\psi) = \nu r \mathbf{L}^2(\psi), \tag{3}$$

где $\mathbf{L}(\varphi) = \varphi''_{rr} - r^{-1}\varphi'_r$.

Частное решение уравнения (2):

$$\varphi(r) = C_1 r^2 + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В этом случае замена $U = \mathbf{L}(\psi)$ приводит (3) к линейному уравнению второго порядка.

5. $\displaystyle \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial \mathrm{E}w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{E}w}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\mathrm{E}w = \nu\mathrm{E}^2 w,$
где $\displaystyle \mathrm{E}w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right), \quad \mathrm{E}^2 w = \mathrm{E}(\mathrm{E}w).$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся стационарные уравнения Навье — Стокса, записанные для осесимметричного случая в сферической системе координат, в результате введения функции тока w по формулам $u_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}$, $u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial r}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, u_r и u_θ — радиальная и угловая компоненты скорости жидкости.

⊙ *Литература*: М. Ван-Дайк (1967, стр. 205).

1°. Любая функция $w = w(r,\theta)$, являющаяся решением линейного уравнения второго порядка $\mathrm{E}w = 0$, будет также решением рассматриваемого уравнения.

Частный случай. Точное решение:

$$w(r,\theta) = (C_1 r^2 + C_2 r^{-1})\sin^2\theta,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Автомодельное решение:

$$w(r,\theta) = \nu r f(\xi), \quad \xi = \cos\theta,$$

где функция $f = f(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$2(1-\xi^2)f'_\xi - f^2 + 4\xi f + C_1\xi^2 + C_2\xi + C_3 = 0, \qquad (1)$$

C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Уравнение Риккати (1) заменой $f = -2(1-\xi^2)g'_\xi/g$ сводится к гипергеометрическому уравнению

$$(1-\xi^2)^2 g''_{\xi\xi} + (C_1\xi^2 + C_2\xi + C_3)g = 0,$$

которое при $C_1\xi^2 + C_2\xi + C_3 = A(1-\xi^2)$ имеет степенные решения

$$g = (1+\xi)^k, \quad k = \tfrac{1}{2}\bigl(1 \pm \sqrt{1+A}\bigr).$$

Частный случай. В задаче Ландау об истечении осесимметричной затопленной струи-источника решение уравнения (1) дается формулой

$$f(\xi) = \frac{2(1-\xi^2)}{B-\xi} \qquad (C_1 = C_2 = C_3 = 0),$$

где постоянную интегрирования B можно выразить через импульс струи.

⦿ *Литература*: Н. А. Слезкин (1934), Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 494-495), Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц (1986).

10.2.2. Нестационарные уравнения

1. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial t}(\Delta w) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся двумерные нестационарные уравнения вязкой несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta u_2,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

путем введения функции тока w по формулам $u_1 = \frac{\partial w}{\partial y}$, $u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x}$ с последующим исключением давления (с помощью перекрестного дифференцирования) из первых двух уравнений.

⦿ *Литература*: Л. Г. Лойцянский (1973).

О стационарных решениях см. разд. 10.2.1.

1°. Пусть $w(x,y,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1x + C_2,\ C_1y + C_3,\ C_1^2t + C_4) + C_5,$$
$$w_2 = w(x\cos\beta + y\sin\beta,\ -x\sin\beta + y\cos\beta,\ t),$$
$$w_3 = w(x + \varphi(t),\ y + \psi(t),\ t) + \psi'_t(t)x - \varphi'_t(t)y + \chi(t),$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, \beta$ — произвольные постоянные, а $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ — произвольные функции, также будут решениями этого уравнения.

⦿ *Литература*: В. В. Пухначев (1960), Л. В. Овсянников (1978), S. P. Lloyd (1981).

2°. Любое решение уравнения Пуассона $\Delta w = C$ является также решением исходного уравнения (это — «невязкие» решения). Об уравнении Пуассона см., например, книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

Пример невязкого решения, содержащего пять произвольных функций:

$$w = \varphi(t)x^2 + \psi(t)xy + [C - \varphi(t)]y^2 + a(t)x + b(t)y + c(t).$$

3°. Решение, зависящее от одной пространственной переменной:

$$w = W(x,t),$$

где функция W удовлетворяет линейному неоднородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = f_1(t)x + f_0(t),$$

$f_1(t)$, $f_0(t)$ — произвольные функции. Аналогичному уравнению удовлетворяет решение вида $w = V(y,t)$.

4°. Точное решение линейное по переменной x:

$$w(x,y,t) = F(y,t)x + G(y,t), \tag{1}$$

где функции $F(y,t)$ и $G = G(y,t)$ определяются из системы одномерных уравнений четвертого порядка

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = \nu\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} = \nu\frac{\partial^4 G}{\partial y^4}. \tag{3}$$

Уравнение (2) решается независимо от уравнения (3). Если $F = F(y,t)$ — решение уравнения (2), то функции

$$F_1 = F(y + \psi(t), t) + \psi_t'(t),$$
$$F_2 = C_1 F(C_1 y + C_1 C_2 t + C_3, C_1^2 t + C_4) + C_2,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

Интегрируя уравнения (2) и (3) по y, получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + f_1(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 G}{\partial y^3} + f_2(t), \tag{5}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — произвольные функции. Уравнение (5) линейно относительно функции G. Замена

$$G = \int U\,dy - hF + h_t' y, \qquad \text{где} \quad U = U(y,t), \quad F = F(y,t), \tag{6}$$

где функция $h = h(t)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$h_{tt}'' - f_1(t)h = f_2(t), \tag{7}$$

приводит (5) к линейному однородному уравнению второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + F\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}U. \tag{8}$$

Таким образом, если известно частное решение уравнения (2) или (4), то определение функции G сводится к решению линейных уравнений (7)–(8) с последующим интегрированием по формуле (6).

Точные решения уравнения (2) приведены в табл. 10. Обыкновенные дифференциальные уравнения в двух последних строках табл. 10, определяющие решение типа бегущей волны и автомодельное решение, являются автономными и поэтому допускают понижение порядка. Отметим, что решения вида (1) при $F(y,t) = Cy/t$ рассматривались в работе В. В. Пухначева (1960) [эти решения соответствуют функции $\varphi(t) = C/t$ в первой строке табл. 10].

Общее решение линейного неоднородного уравнения (7) можно найти по формуле

$$h(t) = C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t) + \frac{1}{W_0}\left[h_2(t)\int h_1(t) f_2(t)\,dt - h_1(t)\int h_2(t) f_2(t)\,dt\right], \tag{9}$$

где $h_1 = h_1(t)$ и $h_2 = h_2(t)$ — фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения при $f_2 \equiv 0$, $W_0 = h_1(h_2)_t' - h_2(h_1)_t'$ — детерминант Вронского (в данном случае $W_0 = \text{const}$). В табл. 11 приведены фундаментальные решения однородного уравнения (7), соответствующие указанным в табл. 10 точным решениям уравнения (2).

Уравнение (8) для любой функции $F = F(y,t)$ имеет тривиальное решение. Выражения в табл. 10–11 и формулы (6) и (9) при $U = 0$ описывают некоторые точные решения вида (1). Более широкий класс точных решений можно получить, если рассмотреть нетривиальные решения уравнения (8).

ТАБЛИЦА 10

Точные решения уравнений (2) и (4) [$\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, A, λ — произвольные постоянные]

№	Функция $F = F(y,t)$ (или общий вид решения)	Функция $f_1(t)$ в уравнении (4)	Определяющие коэффициенты (или определяющее уравнение)
1	$F = \varphi(t)y + \psi(t)$	$f_1(t) = \varphi'_t + \varphi^2$	—
2	$F = \frac{6\nu}{y+\psi(t)} + \psi'_t(t)$	$f_1(t) = 0$	—
3	$F = A\exp[-\lambda y - \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t) + \nu\lambda$	$f_1(t) = 0$	—
4	$F = Ae^{-\beta t}\sin[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$f_1(t) = Be^{-2\beta t}$	$\beta = \nu\lambda^2$, $B = A^2\lambda^2 > 0$
5	$F = Ae^{-\beta t}\cos[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$f_1(t) = Be^{-2\beta t}$	$\beta = \nu\lambda^2$, $B = A^2\lambda^2 > 0$
6	$F = Ae^{\beta t}\operatorname{sh}[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$f_1(t) = Be^{2\beta t}$	$\beta = \nu\lambda^2$, $B = A^2\lambda^2 > 0$
7	$F = Ae^{\beta t}\operatorname{ch}[\lambda y + \lambda\psi(t)] + \psi'_t(t)$	$f_1(t) = Be^{2\beta t}$	$\beta = \nu\lambda^2$, $B = -A^2\lambda^2 < 0$
8	$F = \psi(t)e^{\lambda y} - \frac{Ae^{\beta t-\lambda y}}{4\lambda^2\psi(t)} + \frac{\psi'_t(t)}{\lambda\psi(t)} - \nu\lambda$	$f_1(t) = Ae^{\beta t}$	$\beta = 2\nu\lambda^2$
9	$F = F(\xi)$, $\xi = y + \lambda t$	$f_1(t) = A$	$-A + \lambda F''_{\xi\xi} + (F'_\xi)^2 - FF''_{\xi\xi} = \nu F'''_{\xi\xi\xi}$
10	$F = t^{-1/2}[U(\xi) - \frac{1}{2}\xi]$, $\xi = yt^{-1/2}$	$f_1(t) = At^{-2}$	$\frac{3}{4} - A - 2U'_\xi + (U'_\xi)^2 - UU''_{\xi\xi} = \nu U'''_{\xi\xi\xi}$

В табл. 12 приведены преобразования, упрощающие уравнение (8) для некоторых из указанных в табл. 10 решений уравнения (2) [или (4)]. Видно, что в первых двух случаях решения уравнения (8) выражаются через решения линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Еще в трех случаях уравнение (8) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Третье уравнение в табл. 12 имеет частные решения (B_1, B_2 — любые):

$$Z(\eta) = B_1 + B_2\int\Phi(\eta)\,d\eta, \quad \Phi(\eta) = \exp\Bigl(\frac{A}{\nu\lambda}e^\eta - \eta\Bigr),$$

$$Z(\eta,t) = B_1\nu\lambda^2 t + B_1\int\Phi(\eta)\Bigl[\int\frac{d\eta}{\Phi(\eta)}\Bigr]\,d\eta.$$

О других точных решениях этого уравнения см. книгу А. Д. Полянина (2001 *b*), где рассматривалось более общее уравнение вида $\partial_t w = f(x)\partial_{xx}w + g(x)\partial_x w$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

5°. Точное решение (обобщает решение из п. 4°):

$$w(x,y,t) = F(\xi,t)x + G(\xi,t), \qquad \xi = y + kx,$$

где функции $F(\xi,t)$ и $G = G(\xi,t)$ определяются из системы одномерных уравнений четвертого порядка

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t\partial\xi^2} + \frac{\partial F}{\partial\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} - F\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^3} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^4 F}{\partial\xi^4}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial t\partial\xi^2} + \frac{\partial G}{\partial\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} - F\frac{\partial^3 G}{\partial\xi^3} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^4 G}{\partial\xi^4} + 4\nu k\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^3} + \frac{2k}{k^2+1}\Bigl(F\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial\xi}\Bigr). \tag{11}$$

Интегрируя уравнения (10) и (11) по ξ, получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial\xi} + \Bigl(\frac{\partial F}{\partial\xi}\Bigr)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^3} + f_1(t), \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial\xi} + \frac{\partial F}{\partial\xi}\frac{\partial G}{\partial\xi} - F\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^3 G}{\partial\xi^3} + Q(\xi,t), \tag{13}$$

ТАБЛИЦА 11

Фундаментальная система решений, определяющая общее решение (9) неоднородного уравнения (7) [номер в первом столбце соответствует номеру точного решения из табл. 10]

№	Фундаментальная система решений	Вронскиан W_0	Обозначения и замечания
1	$h_1 = \Phi(t)$, $h_2 = \Phi(t)\int \frac{dt}{\Phi^2(t)}$	$W_0 = 1$	$\Phi(t) = \exp\bigl[\int \varphi(t)\,dt\bigr]$
2	$h_1 = 1$, $h_2 = t$	$W_0 = 1$	—
3	$h_1 = 1$, $h_2 = t$	$W_0 = 1$	—
4	$h_1 = I_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta}e^{-\beta t}\bigr)$, $h_2 = K_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta}e^{-\beta t}\bigr)$	$W_0 = \beta$	$I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $\beta = \nu\lambda^2$
5	$h_1 = I_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta}e^{-\beta t}\bigr)$, $h_2 = K_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta}e^{-\beta t}\bigr)$	$W_0 = \beta$	$I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $\beta = \nu\lambda^2$
6	$h_1 = I_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta}e^{\beta t}\bigr)$, $h_2 = K_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta}e^{\beta t}\bigr)$	$W_0 = -\beta$	$I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $\beta = \nu\lambda^2$
7	$h_1 = J_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta}e^{\beta t}\bigr)$, $h_2 = Y_0\bigl(\frac{A\lambda}{\beta}e^{\beta t}\bigr)$	$W_0 = \frac{2\beta}{\pi}$	$J_0(z)$, $Y_0(z)$ — функции Бесселя, $\beta = \nu\lambda^2$
8	$h_1 = I_0\bigl(\frac{2\sqrt{A}}{\beta}e^{\beta t/2}\bigr)$, $h_2 = K_0\bigl(\frac{2\sqrt{A}}{\beta}e^{\beta t/2}\bigr)$	$W_0 = -\frac{\beta}{2}$	$I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $\beta = 2\nu\lambda^2$
9	$h_1 = \operatorname{ch}(kt)$, $h_2 = \operatorname{sh}(kt)$ $h_1 = \cos(kt)$, $h_2 = \sin(kt)$	$W_0 = k$ $W_0 = k$	при $A = k^2 > 0$ при $A = -k^2 < 0$
10	$h_1 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}-\mu}$, $h_2 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}+\mu}$ $h_1 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}}$, $h_2 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}}\ln\lvert t\rvert$ $h_1 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}}\cos(\mu\ln\lvert t\rvert)$, $h_2 = \lvert t\rvert^{\frac{1}{2}}\sin(\mu\ln\lvert t\rvert)$	$W_0 = 2\mu$ $W_0 = 1$ $W_0 = \mu$	при $A > -\frac{1}{4}$; $\mu = \frac{1}{2}\lvert 1+4A\rvert^{\frac{1}{2}}$ при $A = -\frac{1}{4}$ при $A < -\frac{1}{4}$; $\mu = \frac{1}{2}\lvert 1+4A\rvert^{\frac{1}{2}}$

ТАБЛИЦА 12

Преобразования уравнения (8) для соответствующих точных решений уравнения (4) [номер в первом столбце соответствует номеру точного решения $F = F(y,t)$ в табл. 10]

№	Преобразования уравнения (8)	Полученное уравнение
1	$U = \frac{1}{\Phi(t)}u(z,\tau)$, $\tau = \int \Phi^2(t)\,dt + C_1$, $z = y\Phi(t) + \int \psi(t)\Phi(t)\,dt + C_2$, $\Phi(t) = \exp\bigl[\int \varphi(t)\,dt\bigr]$	$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
2	$U = \zeta^{-3}u(\zeta,t)$, $\zeta = y + \psi(t)$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$
3	$U = e^{\eta}Z(\eta,t)$, $\eta = -\lambda y - \lambda\psi(t)$	$\frac{\partial Z}{\partial t} = \nu\lambda^2\frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} + (\nu\lambda^2 - A\lambda e^{\eta})\frac{\partial Z}{\partial \eta}$
9	$U = u(\xi,t)$, $\xi = y + \lambda t$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \bigl[F(\xi) - \lambda\bigr]\frac{\partial u}{\partial \xi} - F'_\xi(\xi)u$
10	$U = t^{-1/2}u(\xi,\tau)$, $\xi = yt^{-1/2}$, $\tau = \ln t$	$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + H(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \bigl[1 - H'_\xi(\xi)\bigr]u$

где $f_1(t)$ — произвольная функция, а функция $Q(\xi,t)$ определяется по формуле

$$Q(\xi,t) = 4\nu k\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{2k}{k^2+1}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{2k}{k^2+1}\int F\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\,d\xi + f_2(t) \qquad [f_2(t) \text{ — любая}].$$

Уравнение (13) линейно относительно функции G. Замена $U = \frac{\partial G}{\partial \xi}$ приводит его к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu(k^2+1)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + F\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi}U + Q(\xi,t). \qquad (14)$$

Таким образом, если известно частное решение уравнения (10) или (12), то определение функции G сводится к линейному уравнению второго порядка (14). Уравнение (10) с помощью сжатия независимых переменных $\xi = (k^2+1)\zeta$, $t = (k^2+1)\tau$ приводится к уравнению (2), в котором y и t следует заменить на ζ и τ [точные решения уравнения (2) описаны в табл. 10].

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

6°. Точные решения:

$$w(x,y,t) = Az^3 + Bz^2 + Cz + \psi_t'(t)x, \quad z = y + kx + \psi(t);$$
$$w(x,y,t) = Ae^{-\lambda z} + Bz^2 + Cz + \nu\lambda(k^2+1)x + \psi_t'(t)x,$$

где A, B, C, k, λ — произвольные постоянные, $\psi(t)$ — произвольная функция.

7°. Точное решение [частный случай решения вида (1)]:

$$w(x,y,t) = e^{-\lambda y}\big[f(t)x + g(t)\big] + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$
$$f(t) = C_1E(t), \quad E(t) = \exp\Big[\nu\lambda^2 t - \lambda\int\varphi(t)\,dt\Big],$$
$$g(t) = C_2E(t) - C_1E(t)\int\psi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

8°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = e^{-\lambda y}\big[A(t)e^{\beta x} + B(t)e^{-\beta x}\big] + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$
$$A(t) = C_1\exp\Big[\nu(\lambda^2+\beta^2)t - \beta\int\psi(t)\,dt - \lambda\int\varphi(t)\,dt\Big],$$
$$B(t) = C_2\exp\Big[\nu(\lambda^2+\beta^2)t + \beta\int\psi(t)\,dt - \lambda\int\varphi(t)\,dt\Big],$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, C_1, C_2, λ, β — произвольные постоянные.

9°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = e^{-\lambda y}\big[A(t)\sin(\beta x) + B(t)\cos(\beta x)\big] + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, λ, β — произвольные постоянные, а функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют линейной неавтономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A_t' &= \big[\nu(\lambda^2-\beta^2) - \lambda\varphi(t)\big]A + \beta\psi(t)B,\\ B_t' &= \big[\nu(\lambda^2-\beta^2) - \lambda\varphi(t)\big]B - \beta\psi(t)A. \end{aligned} \qquad (15)$$

Общее решение системы (15) имеет вид

$$A(t) = \exp\Big[\nu(\lambda^2-\beta^2)t - \lambda\int\varphi\,dt\Big]\Big[C_1\sin\Big(\beta\int\psi\,dt\Big) + C_2\cos\Big(\beta\int\psi\,dt\Big)\Big],$$
$$B(t) = \exp\Big[\nu(\lambda^2-\beta^2)t - \lambda\int\varphi\,dt\Big]\Big[C_1\cos\Big(\beta\int\psi\,dt\Big) - C_2\sin\Big(\beta\int\psi\,dt\Big)\Big],$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$; C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В частности, при $\varphi = \frac{\nu}{\lambda}(\lambda^2-\beta^2)$, $\psi = a$ получим периодическое решение

$$A(t) = C_1\sin(a\beta t) + C_2\cos(a\beta t),$$
$$B(t) = C_1\cos(a\beta t) - C_2\sin(a\beta t).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

10°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = A(t)\exp(k_1x + \lambda_1 y) + B(t)\exp(k_2x + \lambda_2 y) + \varphi(t)x + \psi(t)y + \chi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, k_1, λ_1, k_2, λ_2 — произвольные постоянные, связанные одним из двух соотношений:

$$k_1^2 + \lambda_1^2 = k_2^2 + \lambda_2^2 \quad \text{(первое семейство решений)},$$
$$k_1\lambda_2 = k_2\lambda_1 \quad \text{(второе семейство решений)},$$

а функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$A'_t = \bigl[\nu(k_1^2 + \lambda_1^2) + \lambda_1\varphi(t) - k_1\psi(t)\bigr]A,$$
$$B'_t = \bigl[\nu(k_2^2 + \lambda_2^2) + \lambda_2\varphi(t) - k_2\psi(t)\bigr]B.$$

Эти уравнения легко интегрируются:

$$A(t) = C_1\exp\Bigl[\nu(k_1^2 + \lambda_1^2)t + \lambda_1\int\varphi(t)\,dt - k_1\int\psi(t)\,dt\Bigr],$$
$$B(t) = C_2\exp\Bigl[\nu(k_2^2 + \lambda_2^2)t + \lambda_2\int\varphi(t)\,dt - k_2\int\psi(t)\,dt\Bigr].$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

11°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \bigl[C_1\sin(\lambda x) + C_2\cos(\lambda x)\bigr]\bigl[A(t)\sin(\beta y) + B(t)\cos(\beta y)\bigr] + \varphi(t)x + \chi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, C_1, C_2, λ, β — произвольные постоянные, а функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют линейной неавтономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A'_t &= -\nu(\lambda^2 + \beta^2)A - \beta\varphi(t)B,\\ B'_t &= -\nu(\lambda^2 + \beta^2)B + \beta\varphi(t)A. \end{aligned} \qquad (16)$$

Общее решение системы (16) имеет вид

$$A(t) = \exp\bigl[-\nu(\lambda^2 + \beta^2)t\bigr]\Bigl[C_3\sin\Bigl(\beta\int\varphi\,dt\Bigr) + C_4\cos\Bigl(\beta\int\varphi\,dt\Bigr)\Bigr], \qquad \varphi = \varphi(t),$$
$$B(t) = \exp\bigl[-\nu(\lambda^2 + \beta^2)t\bigr]\Bigl[-C_3\cos\Bigl(\beta\int\varphi\,dt\Bigr) + C_4\sin\Bigl(\beta\int\varphi\,dt\Bigr)\Bigr],$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

12°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = \bigl[C_1\,\mathrm{sh}(\lambda x) + C_2\,\mathrm{ch}(\lambda x)\bigr]\bigl[A(t)\sin(\beta y) + B(t)\cos(\beta y)\bigr] + \varphi(t)x + \chi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, C_1, C_2, λ, β — произвольные постоянные, а функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют линейной неавтономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} A'_t &= \nu(\lambda^2 - \beta^2)A - \beta\varphi(t)B,\\ B'_t &= \nu(\lambda^2 - \beta^2)B + \beta\varphi(t)A. \end{aligned} \qquad (17)$$

Общее решение системы (17) имеет вид

$$A(t) = \exp\bigl[\nu(\lambda^2 - \beta^2)t\bigr]\Bigl[C_3\sin\Bigl(\beta\int\varphi\,dt\Bigr) + C_4\cos\Bigl(\beta\int\varphi\,dt\Bigr)\Bigr], \qquad \varphi = \varphi(t),$$
$$B(t) = \exp\bigl[\nu(\lambda^2 - \beta^2)t\bigr]\Bigl[-C_3\cos\Bigl(\beta\int\varphi\,dt\Bigr) + C_4\sin\Bigl(\beta\int\varphi\,dt\Bigr)\Bigr],$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

13°. Точное решение:

$$w(x,y,t) = u(z,t) + \varphi(t)x + \psi(t)y, \qquad z = kx + \lambda y,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, k, λ — произвольные постоянные, а функция $u(z,t)$ описывается линейным уравнением четвертого порядка:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} + \bigl[k\psi(t) - \lambda\varphi(t)\bigr]\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \nu(k^2+\lambda^2)\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}.$$

Преобразование

$$U(\xi,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \xi = z - \int \bigl[k\psi(t) - \lambda\varphi(t)\bigr]\,dt$$

приводит его к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu(k^2+\lambda^2)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

14°. Существуют «двумерные» решения вида

$$w = W(\xi,\eta) + c_1 x + c_2 y, \qquad \xi = a_1 x + a_2 y + a_3 t, \qquad \eta = b_1 x + b_2 y + b_3 t.$$

15°. «Двумерные» решения (a, b, c — произвольные постоянные):

$$w = Z(X,Y), \quad X = \frac{x+a}{\sqrt{t+c}}, \quad Y = \frac{y+b}{\sqrt{t+c}},$$

где функция $Z = Z(X,Y)$ описывается уравнением

$$-\tilde\Delta Z + \Bigl(\frac{\partial Z}{\partial Y} - \frac{1}{2}X\Bigr)\frac{\partial}{\partial X}(\tilde\Delta Z) - \Bigl(\frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{1}{2}Y\Bigr)\frac{\partial}{\partial Y}(\tilde\Delta Z) = \nu\tilde\Delta\tilde\Delta Z, \qquad \tilde\Delta Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}.$$

⊙ *Литература*: В. В. Пухначев (1960).

2. $$\boldsymbol{\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \nu\Delta Q, \qquad Q = \Delta w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.}$$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводится уравнение 10.2.2.1 путем перехода к полярной системе координат [с центром в точке (x_0, y_0), где x_0 и y_0 — любые] по формулам:

$$x = r\cos\theta + x_0, \qquad y = r\sin\theta + y_0 \qquad \text{(прямое преобразование)},$$
$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y-y_0}{x-x_0} \qquad \text{(обратное преобразование)}.$$

Радиальная и тангенциальная компоненты скорости жидкости выражаются через функцию тока w следующим образом: $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$, $u_\theta = -\frac{\partial w}{\partial r}$.

1°. Решение с осевой симметрией

$$w = W(r,t)$$

описывается линейным неоднородным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r\frac{\partial W}{\partial r}\Bigr) = \varphi(t)\ln r + \psi(t), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции. О частных решениях уравнения (1), встречающихся в гидродинамике, см. В. В. Пухначев (1960), Л. Г. Лойцянский (1973).

2°. Точное решение линейное по θ:

$$w(r,\theta,t) = f(r,t)\theta + g(r,t), \tag{2}$$

где функции $f = f(r,t)$ и $g = g(r,t)$ описывается уравнением

$$\mathbf{L}(f_t) - r^{-1} f_r \mathbf{L}(f) + r^{-1} f[\mathbf{L}(f)]_r = \nu\mathbf{L}^2(f), \tag{3}$$
$$\mathbf{L}(g_t) - r^{-1} g_r \mathbf{L}(f) + r^{-1} f[\mathbf{L}(g)]_r = \nu\mathbf{L}^2(g). \tag{4}$$

Здесь индексы r и t обозначают частные производные по соответствующим переменным, $\mathbf{L}(f) = r^{-1}(rf_r)_r$, $\mathbf{L}^2(f) = \mathbf{L}\mathbf{L}(f)$.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2001 *d*).

3°. Для частного решения уравнения (3) вида $f = \varphi(t)\ln r + \psi(t)$ (φ, ψ — произвольные функции) уравнение (4) заменой $U = \mathbf{L}(g)$ сводится к линейному уравнению второго порядка.

Замечание. Уравнение (3) имеет также частное решение $f = \frac{r^2}{2(t+C)}$.

4°. Рассмотрим подробнее случай $f = \psi(t)$ из п. 3°, который соответствует $w = \psi(t)\theta + g(r,t)$ [существование такого точного решения установил В. В. Пухначев (1960)]. Для определения функции g имеем

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\psi(t)}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right), \qquad \text{где} \quad U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right). \tag{5}$$

Приведем некоторые точные решения уравнения (5):

$$U = \frac{a}{t}\exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t} + \frac{1}{2\nu}\int\frac{\psi(t)}{t}\,dt\right] + b,$$

$$U = r^2 + 4\nu t - 2\int\psi(t)\,dt + a,$$

$$U = r^4 + p(t)r^2 + q(t), \;\; p(t) = 16\nu t - 4\int\psi(t)\,dt + a, \;\; q(t) = 2\int[2\nu - \psi(t)]p(t)\,dt + b,$$

где a и b — любые. Второе и третье решения являются частными случаями решения вида

$$U = r^{2n} + A_{2n-2}(t)r^{2n-2} + \cdots + A_2(t)r^2 + A_0(t),$$

которое содержит n произвольных постоянных.

Функцию $g(r,t)$ можно выразить через $U(r,t)$ по формуле

$$g(r,t) = C_1(t)\ln r + C_2(t) + \int\Phi(r,t)\,dr, \qquad \Phi(r,t) = \frac{1}{r}\int rU(r,t)\,dr,$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$ — произвольные функции.

3. $$\frac{\partial \mathbf{E}w}{\partial t} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{E}w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial \mathbf{E}w}{\partial z}\right) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial z}\mathbf{E}w = \nu\mathbf{E}^2 w,$$

где $$\mathbf{E}w = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \qquad \mathbf{E}^2 w = \mathbf{E}(\mathbf{E}w).$$

Предварительные замечания. К данному уравнению сводятся нестационарные уравнения Навье — Стокса, записанные для осесимметричного случая в цилиндрической системе координат, в результате введения функции тока w по формулам $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial z}$, $u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, u_r и u_z — радиальная и осевая компоненты скорости жидкости.

⦿ *Литература*: Дж. Хаппель, Г. Бреннер (1976, стр. 124).

1°. Любая функция $w = w(r,z,t)$, являющаяся решением линейного стационарного уравнения второго порядка $\mathrm{E}w = 0$, будет также решением рассматриваемого уравнения.

2°. Решение с осевой симметрией:

$$w = U(r,t) + \varphi(t)r^2 + \psi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, а функция $U = U(r,t)$ описывается линейным уравнением параболического типа

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0.$$

3°. Точное решение линейное по z:

$$w(r,z,t) = f(r,t)z + g(r,t).$$

Здесь функции $f = f(r,t)$ и $g = g(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\mathbf{L}(f_t) + r^{-1}f[\mathbf{L}(f)]_r - r^{-1}f_r\mathbf{L}(f) - 2r^{-2}f\,\mathbf{L}(f) = \nu\mathbf{L}^2(f), \tag{1}$$

$$\mathbf{L}(g_t) + r^{-1}f[\mathbf{L}(g)]_r - r^{-1}g_r\mathbf{L}(f) - 2r^{-2}f\,\mathbf{L}(g) = \nu\mathbf{L}^2(g), \tag{2}$$

где $\mathbf{L}(f) = f_{rr} - r^{-1}f_r$; индексы снизу обозначают соответствуют частные производные.

Частное решения уравнения (1):

$$f(r,t) = C_1(t)r^2 + C_2(t),$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — произвольные функции. В этом случае замена $U = \mathbf{L}(g)$ приводит (2) к линейному уравнению второго порядка.

10.3. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} = f(t)\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w(x+\varphi(t),t) + \varphi_t'(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})\exp\Bigl[\lambda^2 \int f(t)\,dt\Bigr],$$

$$w = A\sin(\lambda x + B)\exp\Bigl[-\lambda^2 \int f(t)\,dt\Bigr],$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. После однократного интегрирования по x получим уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция.

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = 3\alpha^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Уравнение Кадомцева — Петвиашвили. Возникает в теории длинных слабонелинейных волн на поверхности жидкости, распространяющихся вдоль оси x, причем изменение по y является достаточно медленным. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили интегрируется методом обратной задачи рассеяния, см. литературу в конце разд. 10.3.1.

1°. Не зависящие от времени решения удовлетворяют уравнению Буссинеска 10.1.1.2 (см. также 10.1.1.1). Не зависящие от y решения удовлетворяют уравнению Кортевега — де Фриза 9.1.1.1, продифференцированному по x (в котором x и w заменены на $-x$ и $-w$).

2°. Уравнение имеет вырожденные решения квадратичные по x:

$$w = x^2\varphi(y,t) + x\psi(y,t) + \chi(y,t).$$

3°. Точное решение:

$$w = -U(z,t) - \tfrac{1}{2}\alpha^2\lambda^2, \qquad z = \lambda y - x,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(z,t)$ описывается уравнением третьего порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 6U\frac{\partial U}{\partial z} = \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ — произвольная функция. При $\varphi = 0$ имеем уравнение Кортевега — де Фриза 9.1.2.1.

4°. N-солитонное решение при $\alpha = 1$:

$$w(x,y,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\mathbf{A},$$

где матрица $\mathbf{A}$ имеет элементы

$$A_{nm} = \delta_{nm} + f_n(y,t)\frac{\exp[(p_n+q_m)x]}{p_n+q_m}, \qquad \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases}$$

$$f_n(y,t) = C_n\exp\bigl[(q_n^2 - p_n^2)y - 4(p_n^3 + q_n^3)t\bigr], \qquad n, m = 1, 2, \ldots, N,$$

p_n, q_m, C_n — произвольные постоянные ($C_n > 0$).

5°. Положим $\alpha = 1$. Всякая быстро убывающая при $x \to +\infty$ функция $F(x, z; y, t)$, удовлетворяющая одновременно двум линейным уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 4\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}\right) = 0$$

порождает решение уравнения Кадомцева — Петвиашвили в виде

$$w = -2\frac{d}{dx}K(x, x; y, t),$$

где $K = K(x, z; y, t)$ — решение линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x, z; y, t) + F(x, z; y, t) + \int_{-\infty}^{x} K(x, s; y, t)F(s, z; y, t)\,ds = 0.$$

Переменные y и t входят как параметры.

⊙ *Литература*: В. С. Дрюма (1974), В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1974), И. М. Кричевер, С. П. Новиков (1978), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980, стр. 285–298), В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов (2000).

11. Уравнения старших порядков

11.1. Эволюционные уравнения, линейные относительно старшей производной

11.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x, t, w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x + bt, w)$.

Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = x + bt,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw_\xi^{(n)} - bw'_\xi + f(\xi, w) = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\ln w + f(t)w$.

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\Bigl[Ae^{bt}x + Be^{bt} + \frac{aA^n}{b(n-1)}e^{nbt} + e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\Bigr],$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\Bigl[Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\Bigr]\varphi(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_z^{(n)} - \lambda\varphi'_z + b\varphi\ln\varphi = 0,$$

порядок которого можно понизить на единицу.

3°. Замена

$$w(x,t) = \exp\Bigl[e^{bt}\int e^{-bt}f(t)\,dt\Bigr]u(x,t)$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + bu\ln u.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\ln w + \bigl[f(x) + g(t)\bigr]w$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\Bigl[Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt\Bigr]\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + b\varphi\ln\varphi + f(x)\varphi = 0.$$

2°. Замена

$$w(x,t) = \exp\Bigl[e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt\Bigr]u(x,t)$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + bu\ln u + f(x)u.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)w\ln w + g(t)w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x + \psi(t)\bigr].$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t) = Ae^F, \quad \psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(aA^n e^{nF} + g)\,dt, \qquad F = \int f\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)w\ln w + \bigl[g(t)x + h(t)\bigr]w.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x + \psi(t)\bigr].$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t) = Ae^F + e^F\int e^{-F}g\,dt, \quad F = \int f\,dt,$$
$$\psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(a\varphi^n + h)\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w\ln w + \bigl[bf(x)t + g(x)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bt}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\varphi\ln\varphi + \bigl[g(x) + b\bigr]\varphi = 0.$$

11.1.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Bigl(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

Замена $z = x + \displaystyle\int f(t)\,dt$ приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n w}{\partial z^n} + g(w),$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $w = w(kz + \lambda t)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\ln w + \bigl[g(x) + h(t)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \exp\Bigl[Ce^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}h(t)\,dt\Bigr]\varphi(x),$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\varphi'_x + b\varphi\ln\varphi + g(x)\varphi = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + [f(t)\ln w + g(t)]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \exp[\varphi(t)x + \psi(t)].$$

Здесь

$$\varphi(t) = -\Bigl[\int f(t)\,dt + C_1\Bigr]^{-1}, \qquad \psi(t) = \varphi(t)\int[g(t) + a\varphi^n(t)]\,dt + C_2\varphi(t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw + f(t).$

1°. Точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ удовлетворяют соответствующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{ct} + e^{ct}\int e^{-ct} f(t)\,dt + \Theta(\xi), \quad \xi = x + \lambda t,$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\Theta_\xi^{(n)} + b\big(\Theta'_\xi\big)^2 - \lambda\Theta'_\xi + c\Theta = 0.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw\dfrac{\partial w}{\partial x} + kw^2 + f(t)w + g(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корни квадратного уравнения $b\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = k\varphi^2 + f(t)\varphi + g(t), \tag{1}$$
$$\psi'_t = \big[(c\lambda + 2k)\varphi + f(t) + a\lambda^n\big]\psi. \tag{2}$$

Уравнение Риккати (1) интегрируется в квадратурах, например, в следующих частных случаях (Э. Камке, 1976; В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$1)\quad k = 0, \qquad 2)\quad g(t) \equiv 0, \qquad 3)\quad f(t) = \text{const},\ g(t) = \text{const}\,.$$

После решения уравнения (1) легко можно получить решение уравнения (2), которое линейно относительно функции ψ.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(x) + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \int h(t)\,dt + \varphi(x).$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\big(\varphi'_x\big)^2 + g(x) - A = 0.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bw + g(x) + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt} h(t)\,dt.$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)(\varphi'_x)^2 + b\varphi + g(x) = 0.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

1°. Точные решения, содержащие экспоненциальные функции x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\big(\pm x\sqrt{-b}\big), \qquad b<0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi'_t = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$

$$\psi'_t = \big[2bf\varphi + g + a(\pm\sqrt{-b}\,)^n\big]\psi. \tag{3}$$

Уравнение (2) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g, h.

Если решение уравнения (2) известно, то решение уравнения (3) для функции $\psi = \psi(t)$ определяется по формуле

$$\psi(t) = C\exp\Big[a(\pm\sqrt{-b}\,)^n t + \int(2bf\varphi + g)\,dt\Big], \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

Отметим два частных случая интегрирования уравнения (2).

Решение уравнения (2) при $h \equiv 0$:

$$\varphi(t) = e^G\Big(C_1 - b\int fe^G\,dt\Big)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha,\ \beta = \text{const}),$$

то решение уравнения (2) имеет вид

$$\int\frac{d\varphi}{b\varphi^2 + \alpha\varphi + \beta} = \int f\,dt + C_2, \tag{5}$$

где C_2 — произвольная постоянная. После интегрирования левой части выражения (5) можно получить явный вид зависимости $\varphi = \varphi(t)$.

2°. Точные решения более общего вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\big(x\sqrt{-b}\,\big) + \chi(t)\exp\big(-x\sqrt{-b}\,\big), \qquad b<0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = bf\varphi^2 + g\varphi + h + 4bf\psi\chi, \tag{7}$$

$$\psi'_t = \big[2bf\varphi + g + a(\sqrt{-b}\,)^n\big]\psi, \tag{8}$$

$$\chi'_t = \big[2bf\varphi + g + a(-\sqrt{-b}\,)^n\big]\chi. \tag{9}$$

Для уравнений четного порядка при $n = 2m$ ($m = 1,\ 2,\ \ldots$) из уравнений (8) и (9) следует, что функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ пропорциональны. Полагая $\psi(t) = A\theta(t)$ и $\chi(t) = B\theta(t)$, в этом случае решение (6) можно записать в виде

$$w(x,t) = \varphi(t) + \theta(t)\big[A\exp\big(x\sqrt{-b}\,\big) + B\exp\big(-x\sqrt{-b}\,\big)\big], \qquad b<0, \tag{10}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t = bf\big(\varphi^2 + 4AB\theta^2\big) + g\varphi + h, \tag{11}$$

$$\theta'_t = \big[2bf\varphi + g + (-1)^m ab^m\big]\theta. \tag{12}$$

Из уравнения (12) можно выразить φ через θ, а затем подставить в (11). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции θ (при f, g, h = const это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Отметим два частных случая решения вида (10), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \theta(t)\operatorname{ch}\bigl(x\sqrt{-b}\bigr) \quad \text{при} \quad A = \tfrac{1}{2},\ B = \tfrac{1}{2};$$
$$w(x,t) = \varphi(t) + \theta(t)\operatorname{sh}\bigl(x\sqrt{-b}\bigr) \quad \text{при} \quad A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2}.$$

3°. Точные решения, содержащие тригонометрические функции x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\bigl(x\sqrt{b}\bigr) + \chi(t)\sin\bigl(x\sqrt{b}\bigr), \qquad b > 0, \tag{13}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (которая здесь не приводится).

Для уравнений четного порядка при $n = 2m$ ($m = 1, 2, \ldots$) имеются точные решения следующего вида (c — любое):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \theta(t)\cos\bigl(x\sqrt{b} + c\bigr), \qquad b > 0, \tag{14}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\theta(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = bf\bigl(\varphi^2 + \theta^2\bigr) + g\varphi + h, \tag{15}$$
$$\theta'_t = \bigl[2bf\varphi + g + (-1)^m ab^m\bigr]\theta. \tag{16}$$

Из уравнения (16) можно выразить φ через θ, а затем подставить в (15). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции θ (при f, g, h = const это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Замечание. Подобные и другие уравнения старших порядков с квадратичной нелинейностью рассматривались в работе V. A. Galaktionov (1995).

9. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(w)\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^k + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя к новым независимым переменным

$$\tau = \int \varphi^n(t)\,dt, \quad z = \varphi(t)x + \int h(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$

приходим к более простому уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a\frac{\partial^n w}{\partial z^n} + f(w)\Bigl(\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr)^k,$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $w = w(kz + \lambda\tau)$.

10. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Bigl(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \int g(t)\,dt + \varphi(x).$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f\bigl(x, \varphi'_x\bigr) - A = 0.$$

11. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Bigl(x,\ \frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + bw + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt.$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f\bigl(x, \varphi'_x\bigr) + b\varphi = 0.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + wf\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda x + a\lambda^n t + \int f(t,\lambda)\,dt\Big],$$

где A, λ — произвольные постоянные.

11.1.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)\sum\limits_{i,j=0}^{i,j<n} b_{ij}\dfrac{\partial^i w}{\partial x^i}\dfrac{\partial^j w}{\partial x^j} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} g_k(t)\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k} + h(t).$

Здесь принято обозначение: $\frac{\partial^0 w}{\partial x^0} \equiv w$.

1°. В общем случае уравнение имеет точные решения вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корни алгебраического уравнения: $\sum\limits_{i,j=0}^{i,j<n} b_{ij}\lambda^{i+j} = 0.$

2°. Пусть n — четное число и в первой сумме все коэффициенты $b_{ij} = 0$, когда сумма их индексов $i+j$ — нечетное число. В этом случае исходное уравнение имеет также решения вида

$$w(x,t) = \varphi_1(t) + \psi_1(t)\big[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\big],$$

$$w(x,t) = \varphi_2(t) + \psi_2(t)\big[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\big],$$

где A, B — произвольные постоянные, параметр λ определяется путем решения алгебраических уравнений, а функции $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t)$ находятся из соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big) + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \int g(t)\,dt + \varphi(x).$$

Здесь A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f\big(x, \varphi'_x, \ldots, \varphi_x^{(n-1)}\big) - A = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big) + bw + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + Ae^{bt} + e^{bt}\int e^{-bt}g(t)\,dt.$$

Здесь A — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f\big(x, \varphi'_x, \ldots, \varphi_x^{(n-1)}\big) + b\varphi = 0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + wf\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda x + a\lambda^n t + \int f(t,\lambda,\ldots,\lambda^{n-1})\,dt\Big],$$

где A, λ — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} + wf\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n-2} w}{\partial x^{2n-2}}\Big).$

Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \big[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\big]\exp\Big[a\lambda^{2n}t + \int f(t,\lambda^2,\dots,\lambda^{2n-2})\,dt\Big],$$
$$w(x,t) = \big[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\big]\exp\big[(-1)^n a\lambda^{2n}t + F(t)\big],$$
$$F(t) = \int f(t,-\lambda^2,\dots,(-1)^{n-1}\lambda^{2n-2})\,dt,$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

11.1.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)w + g(t).$

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = F(t)\big(A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_0\big) + F(t)\int\frac{g(t)}{F(t)}\,dt,\quad F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

где A_0, A_1, …, A_{n-1} — произвольные постоянные.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)\big(x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_0\big) + \varphi(t)\int\frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt,$$
$$\varphi(t) = F(t)\Big[C - an!\int F(t)\,dt\Big]^{-1},\quad F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

где A_0, A_1, …, A_{n-1}, C — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w + \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$

Точное решение:

$$w(x,t) = t\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k - \frac{1}{a(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^{n-1}f(\xi)\,d\xi,$$

где C_0, C_1, …, C_{n-1}, x_0 — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw^2 + f(t)w + g(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (C — любое)

$$\varphi'_t = C\varphi^2 + b\varphi\psi + f(t)\varphi,$$
$$\psi'_t = C\varphi\psi + b\psi^2 + f(t)\psi + g(t),$$

а функция $\Theta(x)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$a\Theta_x^{(n)} + b\Theta = C.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} - ak^{2n}w^2 + f(x)w + b_1\operatorname{sh}(kx) + b_2\operatorname{ch}(kx).$

Точное решение линейное по переменной t:

$$w(x,t) = t\big[b_1\operatorname{sh}(kx) + b_2\operatorname{ch}(kx)\big] + \varphi(x).$$

Здесь функция $\varphi(x)$ определяется из линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a\varphi_x^{(2n)} - ak^{2n}\varphi + f(x) = 0.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + \big[xf(t) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = H(t)u(z,\tau), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^n(t)H(t)\,dt,$$

где функции $F(t)$ и $H(t)$ определяются формулами

$$F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big], \quad H(t) = \exp\Big[\int h(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = au\frac{\partial^n u}{\partial z^n},$$

которое допускает, например, точные решение типа бегущей волны $u = u(kz + \lambda\tau)$ и автомодельное решения вида $u = u(\xi)$, $\xi = z\tau^{-1/n}$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w + h(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\Theta(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} &\varphi_t' = C\varphi^2 + g(t)\varphi, \\ &\psi_t' = \big[C\varphi + g(t)\big]\psi + h(t), \\ &a\Theta_x^{(n)} + f(x)\Theta_x' = C, \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная. Последовательно интегрируя, для функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ получим

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = G(t)\Big[A - C\int G(t)\,dt\Big]^{-1}, \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big], \\ &\psi(t) = B\varphi(t) + \varphi(t)\int \frac{h(t)}{\varphi(t)}\,dt, \end{aligned}$$

где A, B — произвольные постоянные.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)w^2 + h(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)H(t)\Big[A + B\int H(t)\,dt\Big]^{-1}, \quad H(t) = \exp\Big[\int h(t)\,dt\Big],$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ определяется из линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\varphi_x' + g(x)\varphi + B = 0.$$

11.1.5. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\Big(w^m\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k}\Big) + \big[xf(t) + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^{n+k}(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции F и H определяются формулами

$$F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big], \quad H(t) = \exp\Big[\int h(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению
$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=a\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(u^m\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right).$$
Последнее допускает, например, точные решения следующего вида:

$u=U(kz+\lambda\tau)$ (решение типа бегущей волны),

$u=V\left(z\tau^{-1/(n+k)}\right)$ (автомодельное решение),

$u=\varphi(z)\psi(\tau)$ (решение в виде произведения функций разных аргументов).

2. $\displaystyle\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right)+f(t).$

Преобразование
$$w(x,t)=u(x,\tau)+F(t),\quad \tau=\int\exp\bigl[\lambda F(t)\bigr]\,dt,\qquad F(t)=\int f(t)\,dt,$$
приводит к более простому уравнению
$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{\lambda u}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right).$$
Последнее допускает, например, точные решения следующего вида:

$u=U(kx+\lambda\tau)$ (решение типа бегущей волны),

$u=V\left(x\tau^{-1/(n+k)}\right)$ (автомодельное решение),

$u=\varphi(x)+\psi(\tau)$ (решение в виде суммы функций разных аргументов).

3. $\displaystyle\frac{\partial w}{\partial t}=a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right)+f(x)e^{\lambda w}.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:
$$w=-\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t+C)+\varphi(x),$$
где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$a\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\lambda\varphi}\frac{d^k\varphi}{dx^k}\right)+f(x)e^{\lambda\varphi}+1=0.$$
При $k=1$ это уравнение сводится к линейному с помощью подстановки $\psi=e^{\lambda\varphi}$.

4. $\displaystyle\frac{\partial w}{\partial t}=\sum_{k=0}^{n}[f_k(t)\ln w+g_k(t)]\frac{\partial^k w}{\partial x^k}.$

Точное решение:
$$w(x,t)=\exp[\varphi(t)x+\psi(t)],$$
где функции $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка
$$\varphi'_t=\sum_{k=0}^{n}f_k(t)\varphi^{k+1},$$
$$\psi'_t=\sum_{k=0}^{n}\varphi^k[f_k(t)\psi+g_k(t)].$$

5. $\displaystyle\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[f(w)\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right].$

Это уравнение имеет точное решение типа бегущей волны
$$w(x,t)=u(\xi),\quad \xi=kx+\lambda t$$
и автомодельное решение вида
$$w(x,t)=z(\zeta),\quad \zeta=\frac{x^{n+k}}{t}.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\Big[f(w)\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k}\Big] + \big[xg(t) + h(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int G^{n+k}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 11.1.5.5:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\Big[f(w)\frac{\partial^k w}{\partial z^k}\Big].$$

11.2. Эволюционные уравнения общего вида

11.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big)$

Предварительные замечания. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big). \tag{1}$$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение уравнения (1). Тогда функция $w(x + C_1, t + C_2)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. В общем случае уравнение (1) допускает точное решение типа бегущей волны

$$w = w(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t, \tag{2}$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(w,\, kw'_\xi,\, \dots,\, k^n w^{(n)}_\xi\big) - \lambda w'_\xi = 0.$$

В данном разделе рассмотрены частные случаи уравнения (1), которые помимо решения типа бегущей волны (2) допускают также другие точные решения.

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big)$.

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = F(A)t + \frac{A}{n!}x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0,$$

где A, C_0, C_1, …, C_{n-1} — произвольные постоянные.

2°. Точное решение линейное по переменной t:

$$w(x,t) = (Ax + B)t + C + \varphi(x),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\varphi^{(n)}_x\big) = Ax + B.$$

3°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \psi(\xi), \qquad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(k^n \psi^{(n)}_\xi\big) = \lambda\psi'_\xi + A.$$

4°. Автомодельное решение:

$$w(x,t) = t\,\Theta(\zeta), \quad \zeta = xt^{-1/n},$$

где функция $\Theta(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$nF\big(\Theta^{(n)}_\zeta\big) + \zeta\Theta'_\zeta - n\Theta = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(\xi), \quad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(k\varphi'_\xi, k^2\varphi''_{\xi\xi}, \dots, k^n\varphi^{(n)}_\xi\big) - \lambda\varphi'_\xi - A = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение:

$$w(x,t) = t\varphi(\xi), \quad \xi = kx + \lambda\ln t,$$

где k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\Big(\frac{k}{\varphi}\varphi'_\xi, \frac{k^2}{\varphi}\varphi''_{\xi\xi}, \dots, \frac{k^n}{\varphi}\varphi^{(n)}_\xi\Big) = \lambda\varphi'_\xi + \varphi.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ce^{\lambda t}\varphi(x),$$

где C, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\Big(\frac{\varphi'_x}{\varphi}, \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}, \dots, \frac{\varphi^{(n)}_x}{\varphi}\Big) = \lambda.$$

Это уравнение имеет частные решения вида $\varphi(x) = e^{\alpha x}$, где α — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения $F\big(\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n\big) - \lambda = 0$.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ce^{\lambda t}\psi(\xi), \quad \xi = kx + \beta t$$

где C, k, λ, β — произвольные постоянные, а функция $\psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\psi F\Big(\frac{k}{\psi}\psi'_\xi, \frac{k^2}{\psi}\psi''_{\xi\xi}, \dots, \frac{k^n}{\psi}\psi^{(n)}_\xi\Big) = \beta\psi'_\xi + \lambda\psi.$$

Это уравнение имеет частные решения вида $\psi(\xi) = e^{\mu\xi}$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^\beta F\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

При $\beta = 0$ см. уравнение 11.2.1.3, а при $\beta = 1$ — уравнение 11.2.1.4.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \big[(1-\beta)At + B\big]^{\frac{1}{1-\beta}}\varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi^{\beta-1}F\Big(\frac{\varphi'_x}{\varphi}, \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}, \dots, \frac{\varphi^{(n)}_x}{\varphi}\Big) = A.$$

2°. Точное решение:

$$w(z,t) = (t+C)^{\frac{1}{1-\beta}}\Theta(z), \quad z = kx + \lambda\ln(t+C),$$

где C, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\Theta^\beta F\Big(k\frac{\Theta'_z}{\Theta}, k^2\frac{\Theta''_{zz}}{\Theta}, \dots, k^n\frac{\Theta^{(n)}_z}{\Theta}\Big) = \lambda\Theta'_z + \frac{1}{1-\beta}\Theta.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\beta w} F\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(A\beta t + B) + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\varphi} F\big(\varphi'_x, \varphi''_{xx}, \ldots, \varphi_x^{(n)}\big) + A = 0.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(t+C) + \Theta(\xi), \quad \xi = kx + \lambda\ln(t+C),$$

где C, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\Theta} F\big(k\Theta'_\xi, k^2\Theta''_{\xi\xi}, \ldots, \Theta_\xi^{(n)}\big) = \lambda\Theta'_\xi - \frac{1}{\beta}.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 11.2.1.2.

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(\xi), \quad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(k\varphi''_{\xi\xi}/\varphi'_\xi, \ldots, k^{n-1}\varphi_\xi^{(n)}/\varphi'_\xi\big) = \lambda\varphi'_\xi + A.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = (t+C_1)\Theta(z) + C_2, \quad z = kx + \lambda\ln(t+C_1),$$

где C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(k\Theta''_{zz}/\Theta'_z, \ldots, k^{n-1}\Theta_z^{(n)}/\Theta'_z\big) = \lambda\Theta'_z + \Theta.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x} F\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 11.2.1.2.

1°. Точное решение:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(z), \quad z = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k\varphi'_z F\big(k\varphi''_{zz}/\varphi'_z, \ldots, k^{n-1}\varphi_z^{(n)}/\varphi'_z\big) = \lambda\varphi'_z + A.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{\beta t}\Theta(\xi) + B, \quad \xi = kx + \lambda t,$$

где A, B, k, β, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k\Theta'_\xi F\big(k\Theta''_{\xi\xi}/\Theta'_\xi, \ldots, k^{n-1}\Theta_\xi^{(n)}/\Theta'_\xi\big) = \lambda\Theta'_\xi + \beta\Theta.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^{\beta}F\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x},\,\ldots,\,\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Частный случай уравнения 11.2.1.2. При $\beta=0$ и $\beta=1$ см. соответственно уравнения 11.2.1.7 и 11.2.1.8.

1°. Точное решение:

$$w(x,t)=\big[A(1-\beta)t+B\big]^{\frac{1}{1-\beta}}\varphi(x)+C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\varphi'_x)^{\beta}F\big(\varphi''_{xx}/\varphi'_x,\,\ldots,\,\varphi^{(n)}_x/\varphi'_x\big)=A\varphi.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=(t+A)^{\frac{1}{1-\beta}}\Theta(z)+B,\quad z=kx+\lambda\ln(t+A),$$

где A, B, k, λ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k^{\beta}(\Theta'_z)^{\beta}F\big(k\Theta''_{zz}/\Theta'_z,\,\ldots,\,k^{n-1}\Theta^{(n)}_z/\Theta'_z\big)=\lambda\Theta'_z+\frac{1}{1-\beta}\Theta.$$

11.2.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t}=F\Big(x,w,\dfrac{\partial w}{\partial x},\ldots,\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=F\Big(x,\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\,\ldots,\,\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение линейное по переменной t:

$$w(x,t)=Axt+Bt+C+\varphi(x),$$

где A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(x,\,\varphi''_{xx},\,\ldots,\,\varphi^{(n)}_x\big)=Ax+B.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=F\Big(x,\,\dfrac{\partial w}{\partial x},\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\,\ldots,\,\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t)=At+B+\varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(x,\,\varphi'_x,\,\varphi''_{xx},\,\ldots,\,\varphi^{(n)}_x\big)=A.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=F\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x},\,x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\,\ldots,\,x^{n-1}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t)=At+B+\varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\varphi'_x,\,x\varphi''_{xx},\,\ldots,\,x^{n-1}\varphi^{(n)}_x\big)=A.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t)=x\Theta(\xi)+C,\quad \xi=\frac{x}{t},$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\Theta(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\Theta+\xi\Theta'_\xi,\,2\xi\Theta'_\xi+\xi^2\Theta''_{\xi\xi},\,\ldots,\,n\xi^{n-1}\Theta^{(n-1)}_\xi+\xi^n\Theta^{(n)}_\xi\big)+\xi^2\Theta'_\xi=0.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(w,\, x\dfrac{\partial w}{\partial x},\, x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \dots,\, x^n\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Замена $x = \pm e^z$ приводит к уравнению, которое рассматривается в разд. 11.2.1 и допускает точные решения типа бегущей волны $w = w(kz + \lambda t)$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k F\Big(w,\, x\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dots,\, x^n\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Автомодельное решение:

$$w(x,t) = w(z), \quad z = xt^{1/k},$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$kz^{k-1}F\big(w,\, zw'_z,\, \dots,\, z^n w_z^{(n)}\big) - w'_z = 0.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k F\Big(w,\, x\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dots,\, x^n\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big) + ax\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя к новым независимым переменным

$$z = xe^{at}, \quad \tau = \frac{1}{ak}\big(1 - e^{-akt}\big),$$

получим уравнение вида 11.2.2.5:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^k F\Big(w,\, z\frac{\partial w}{\partial z},\, \dots,\, z^n\frac{\partial^n w}{\partial z^n}\Big).$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\lambda x} F\Big(w,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dots,\, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение:

$$w(x,t) = w(z), \quad z = \lambda x + \ln t,$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^z F\big(w,\, \lambda w'_z,\, \dots,\, \lambda^n w_z^{(n)}\big) - w'_z = 0.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = wF\Big(x,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \dots,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = Ae^{\mu t}\varphi(x),$$

где A, μ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\Big(x,\, \frac{\varphi'_x}{\varphi},\, \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi},\, \dots,\, \frac{\varphi_x^{(n)}}{\varphi}\Big) = \mu.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^\beta F\Big(x,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \dots,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

При $\beta = 1$ см. уравнение 11.2.2.8.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \big[(1-\beta)At + B\big]^{\frac{1}{1-\beta}}\varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi^{\beta-1}F\Big(x,\, \frac{\varphi'_x}{\varphi},\, \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi},\, \dots,\, \frac{\varphi_x^{(n)}}{\varphi}\Big) = A.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\beta w} F\Big(x,\, \dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \dots,\, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = -\frac{1}{\beta}\ln(A\beta t + B) + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$e^{\beta\varphi}F\big(x,\, \varphi'_x,\, \varphi''_{xx},\, \dots,\, \varphi_x^{(n)}\big) + A = 0.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x} F\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi'_x F\big(x,\ \varphi''_{xx}/\varphi'_x,\ \dots,\ \varphi^{(n)}_x/\varphi'_x\big) = A.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = Ae^{\mu t}\Theta(x) + B$$

где A, B, μ — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\Theta'_x F\big(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x\ \dots,\ \Theta^{(n)}_x/\Theta'_x\big) = \mu\Theta.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^{\beta} F\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

При $\beta = 1$ см. уравнение 11.2.2.11.

1°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = At + B + \varphi(x),$$

где A, B — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\big(\varphi'_x\big)^{\beta} F\big(x,\ \varphi''_{xx}/\varphi'_x,\ \dots,\ \varphi^{(n)}_x/\varphi'_x\big) = A.$$

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \big[A(1-\beta)t + C_1\big]^{\frac{1}{1-\beta}}\big[\Theta(x) + B\big] + C_2,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\Theta(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\big(\Theta'_x\big)^{\beta} F\big(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x\ \dots,\ \Theta^{(n)}_x/\Theta'_x\big) = A\Theta + AB.$$

11.2.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big)$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(ax + bt,\ w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = ax + bt,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\xi,\ w,\ aw'_\xi,\ \dots,\ a^n w^{(n)}_\xi\big) - bw'_\xi = 0.$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\Big(ax + bt,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение:

$$w = \varphi(\xi) + Ct, \quad \xi = ax + bt,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\xi,\ a\varphi'_\xi,\ \dots,\ a^n \varphi^{(n)}_\xi\big) - b\varphi'_\xi - C = 0.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)x^k\Phi\Big(w,\, x\dfrac{\partial w}{\partial x},\, \dots,\, x^n\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big) + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя к новым независимым переменным

$$z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{-k}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приходим к более простому уравнению вида 11.2.2.5:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^k\Phi\Big(w,\, z\frac{\partial w}{\partial z},\, \dots,\, z^n\frac{\partial^n w}{\partial z^n}\Big).$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\, \dots,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda x + \int \Phi(t,\lambda,\dots,\lambda^n)\,dt\Big],$$

где A, λ — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \dots,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big).$

Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda x + \int \Phi(t,\lambda^2,\dots,\lambda^{2n})\,dt\Big],$$

$$w(x,t) = \big[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\big]\exp\Big[\int \Phi\big(t,\lambda^2,\dots,\lambda^{2n}\big)\,dt\Big],$$

$$w(x,t) = \big[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\big]\exp\Big[\int \Phi\big(t,-\lambda^2,\dots,(-1)^n\lambda^{2n}\big)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \dots,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + f(t)e^{\lambda x}.$

Точное решение:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}E(t)\Big[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big] + Be^{-\lambda x}E(t),$$

$$E(t) = \exp\Big[\int \Phi\big(t,\lambda^2,\dots,\lambda^{2n}\big)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \dots,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + f(t)e^{\lambda x} + g(t)e^{-\lambda x}.$

Точное решение:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}E(t)\Big[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big] + e^{-\lambda x}E(t)\Big[B + \int \frac{g(t)}{E(t)}\,dt\Big],$$

$$E(t) = \exp\Big[\int \Phi\big(t,\lambda^2,\dots,\lambda^{2n}\big)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\, \dots,\, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + f(t)\operatorname{ch}(\lambda x) + g(t)\operatorname{sh}(\lambda x).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \operatorname{ch}(\lambda x)E(t)\Big[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big] + \operatorname{sh}(\lambda x)E(t)\Big[B + \int \frac{g(t)}{E(t)}\,dt\Big],$$

$$E(t) = \exp\Big[\int \Phi\big(t,\lambda^2,\dots,\lambda^{2n}\big)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + f(t)\cos(\lambda x).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)E(t)\Big[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big] + B\sin(\lambda x)E(t),$$
$$E(t) = \exp\Big[\int \Phi\big(t, -\lambda^2, \dots, (-1)^n\lambda^{2n}\big)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w\Phi\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Big) + f(t)\cos(\lambda x) + g(t)\sin(\lambda x).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \cos(\lambda x)E(t)\Big[A + \int \frac{f(t)}{E(t)}\,dt\Big] + \sin(\lambda x)E(t)\Big[B + \int \frac{g(t)}{E(t)}\,dt\Big],$$
$$E(t) = \exp\Big[\int \Phi\big(t, -\lambda^2, \dots, (-1)^n\lambda^{2n}\big)\,dt\Big],$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)w^\beta\Phi\Big(\dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big) + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(x,\tau), \qquad \tau = \int f(t)G^{\beta-1}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 11.2.1.5:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u^\beta\Phi\Big(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \dots,\ \frac{1}{u}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big),$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u = u(Ax + B\tau)$ и решение в виде произведения функций разных аргументов $u = \varphi(x)\psi(\tau)$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)w^\beta\Phi\Big(x,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ \dots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big) + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = G(t)u(x,\tau), \qquad \tau = \int f(t)G^{\beta-1}(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 11.2.2.9:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u^\beta\Phi\Big(x,\ \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{1}{u}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big),$$

которое имеет точное решение в произведения функций разных аргументов $u = \varphi(x)\psi(\tau)$.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k\Phi\Big(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + g(t)w + h(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (C — произвольная постоянная)

$$\varphi'_t = Af(t)\varphi^k + g(t)\varphi, \tag{1}$$
$$\psi'_t = g(t)\psi + Bf(t)\varphi^k + h(t), \tag{2}$$

а функция $\Theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$(\Theta'_x)^k\Phi\big(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x,\ \dots,\ \Theta^{(n)}_x/\Theta'_x\big) = A\Theta + B.$$

Общее решение системы (1), (2) дается формулами

$$\varphi(t) = G(t)\Big[C - kA\int f(t)G^{k-1}(t)\,dt\Big]^{\frac{1}{1-k}}, \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$
$$\psi(t) = DG(t) + G(t)\int \big[Bf(t)\varphi^k(t) + h(t)\big]\frac{dt}{G(t)},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\left[f_1(t)w+f_0(t)\right]\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^k\Phi\left(x,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big/\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+g_1(t)w+g_0(t).$

Точное решение:

$$w(x,t)=\varphi(t)\Theta(x)+\psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (C — произвольная постоянная):

$$\varphi'_t=Cf_1(t)\varphi^{k+1}+g_1(t)\varphi, \tag{1}$$
$$\psi'_t=\left[Cf_1(t)\varphi^k+g_1(t)\right]\psi+Cf_0(t)\varphi^k+g_0(t), \tag{2}$$

а функция $\Theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$\left(\Theta'_x\right)^k\Phi\left(x,\ \Theta''_{xx}/\Theta'_x,\ \dots,\ \Theta_x^{(n)}/\Theta'_x\right)=C.$$

Общее решение системы (1), (2) дается формулами

$$\varphi(t)=G(t)\left[A-kC\int f_1(t)G^k(t)\,dt\right]^{-1/k},\quad G(t)=\exp\left[\int g_1(t)\,dt\right],$$
$$\psi(t)=B\varphi(t)+\varphi(t)\int\left[Cf_0(t)\varphi^k(t)+g_0(t)\right]\frac{dt}{\varphi(t)},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=f(t)e^{\beta w}\Phi\left(\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)+g(t).$

Преобразование

$$w(x,t)=u(x,\tau)+G(t),\quad \tau=\int f(t)\exp\left[\beta G(t)\right]dt,\qquad G(t)=\int g(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению вида 11.2.1.6:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=e^{\beta u}\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \dots,\ \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right),$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $u=u(Ax+B\tau)$ и решение в виде суммы функций разных аргументов $u=\varphi(x)+\psi(\tau)$.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=f(t)e^{\beta w}\Phi\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)+g(t).$

Преобразование

$$w(x,t)=u(x,\tau)+G(t),\quad \tau=\int f(t)\exp\left[\beta G(t)\right]dt,\qquad G(t)=\int g(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению вида 11.2.2.10:

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=e^{\beta u}\Phi\left(x,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \dots,\ \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right),$$

которое имеет точное решение в виде суммы функций разных аргументов $u=\varphi(x)+\psi(\tau)$.

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=f(t)\Phi\left(w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \dots,\ \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)+g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$\tau=\int f(t)\,dt,\qquad z=x+\int g(t)\,dt,$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial\tau}=\Phi\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\ \dots,\ \frac{\partial^n w}{\partial z^n}\right),$$

которое имеет точное решение в типа бегущей волны $w=w(kz+\lambda\tau)$.

18. $$\frac{\partial w}{\partial t}=w\Phi_0\Bigl(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\Phi_k\Bigl(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^n w}{\partial x^n}\Bigr).$$

Уравнение имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=Ae^{\lambda x}\Theta(t),$$

где A, λ — произвольные постоянные.

19. $$\frac{\partial w}{\partial t}=w\Phi_0\Bigl(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}}\Phi_k\Bigl(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr).$$

Уравнение имеет точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$\begin{aligned}w(x,t)&=Ae^{\lambda x}\Theta_1(t),\\ w(x,t)&=\bigl[A\operatorname{ch}(\lambda x)+B\operatorname{sh}(\lambda x)\bigr]\Theta_1(t),\\ w(x,t)&=\bigl[A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)\bigr]\Theta_2(t),\end{aligned}$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

20. $$\frac{\partial w}{\partial t}=w\Phi_0\Bigl(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}}\Phi_k\Bigl(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr)+f(t)e^{\lambda x}+g(t)e^{-\lambda x}.$$

Уравнение имеет точное решение вида:

$$w(x,t)=e^{\lambda x}\varphi(t)+e^{-\lambda x}\psi(t),$$

где λ — произвольная постоянная.

21. $$\frac{\partial w}{\partial t}=w\Phi_0\Bigl(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ \ldots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}}\Phi_k\Bigl(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr)+f(t)\operatorname{ch}(\lambda x)+g(t)\operatorname{sh}(\lambda x).$$

Уравнение имеет точное решение вида:

$$w(x,t)=\operatorname{ch}(\lambda x)\varphi(t)+\operatorname{sh}(\lambda x)\psi(t),$$

где λ — произвольная постоянная.

22. $$\frac{\partial w}{\partial t}=w\Phi_0\Bigl(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}}\Phi_k\Bigl(t,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{1}{w}\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}}\Bigr)+f(t)\cos(\lambda x)+g(t)\sin(\lambda x).$$

Уравнение имеет точное решение вида:

$$w(x,t)=\cos(\lambda x)\varphi(t)+\sin(\lambda x)\psi(t),$$

где λ — произвольная постоянная.

23. $$\frac{\partial w}{\partial t}=wF(t,\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n),\qquad \zeta_k=\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{i+k}}{k!\,(i-k)!}x^{i-k}\frac{\partial^i w}{\partial x^i},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t)=(C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n)\varphi(t),$$

где C_0, C_1, …, C_n — произвольные постоянные, а функция $\varphi=\varphi(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi_t'=\varphi F(t,C_0\varphi,C_1\varphi,\ldots,C_n\varphi).$$

⊙ *Литература*: Ph. W. Doyle (1996), рассматривался случай $\partial_t F\equiv 0$.

11.3. Уравнения, содержащие вторую производную $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

11.3.1. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x+bt, w)$.

Уравнение имеет точные решения вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = x + bt,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aw_\xi^{(n)} - b^2 w''_{\xi\xi} + f(\xi, w) = 0.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\ln w + f(t)w$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \bigl[b\ln\varphi + f(t) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$a\psi_x^{(n)} + \bigl(b\ln\psi - C\bigr)\psi = 0,$$

где C — произвольная постоянная.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw\ln w + \bigl[f(x) + g(t)\bigr]w$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \bigl[b\ln\varphi + g(t) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$a\psi_x^{(n)} + \bigl[b\ln\psi + f(x) - C\bigr]\psi = 0,$$

где C — произвольная постоянная.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w\ln w + \bigl[bf(x)t + g(x)\bigr]w$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{-bt}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\varphi\ln\varphi + \bigl[g(x) - b^2\bigr]\varphi = 0.$$

11.3.2. Уравнения вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Bigl(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw\ln w + \bigl[g(x) + h(t)\bigr]w$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t)\psi(x),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - \bigl[b\ln\varphi + h(t) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$a\psi_x^{(n)} + f(x)\psi'_x + \bigl[b\ln\psi + g(x) - C\bigr]\psi = 0,$$

где C — произвольная постоянная.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw + f(t).$

1°. Точное решение квадратичное по переменной x:

$$w(x,t) = \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(t)$ удовлетворяют соответствующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

2°. Точное решение:

$$w(x,t) = \psi(t) + \Theta(\xi), \quad \xi = x + \lambda t.$$

Здесь функции $\psi(t)$ и $\Theta(\xi)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\psi''_{tt} - c\psi - f(t) = A,$$
$$a\Theta^{(n)}_{\xi} - \lambda^2\Theta''_{\xi\xi} + b\big(\Theta'_{\xi}\big)^2 + c\Theta = A,$$

где λ, A — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw\dfrac{\partial w}{\partial x} + kw^2 + f(t)w + g(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корни квадратного уравнения $b\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = k\varphi^2 + f(t)\varphi + g(t), \tag{1}$$
$$\psi''_{tt} = \big[(c\lambda + 2k)\varphi + f(t) + a\lambda^n\big]\psi. \tag{2}$$

В частном случае при $f(t) = \text{const}$, $g(t) = \text{const}$ уравнение (1) имеет частные решения вида $\varphi = \text{const}$ и ввиду его автономности может быть проинтегрировано в квадратурах. Уравнение (2) линейно относительно функции ψ, поэтому при $\varphi = \text{const}$ его общее решение выражается через экспоненты или синус и косинус.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(x) + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}At^2 + Bt + C + \int_0^t (t-\tau)h(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi^{(n)}_x + f(x)\big(\varphi'_x\big)^2 + g(x) - A = 0.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bw + g(x) + h(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - h(t) = 0,$$
$$a\psi^{(n)}_x + f(x)(\psi'_x)^2 + b\psi + g(x) = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\operatorname{ch}(kx) + C_2\operatorname{sh}(kx) + \frac{1}{k}\int_0^t h(\tau)\operatorname{sh}\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$

$$\varphi(t) = C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx) + \frac{1}{k}\int_0^t h(\tau)\sin\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} + f(t)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

1°. Точные решения, содержащие экспоненциальные функции x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\bigl(\pm x\sqrt{-b}\bigr), \qquad b<0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{tt} = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$
$$\psi''_{tt} = \bigl[2bf\varphi + g + (-1)^n ab^n\bigr]\psi. \tag{3}$$

В частном случае, когда f, g, h — некоторые постоянные, уравнение (2) имеет частные решения вида $\varphi = \text{const}$. В этом случае общее решение уравнения (3) выражается через экспоненты или синус и косинус.

2°. Точные решения более общего вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\bigl[A\exp\bigl(x\sqrt{-b}\bigr) + B\exp\bigl(-x\sqrt{-b}\bigr)\bigr], \qquad b<0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{tt} = bf\bigl(\varphi^2 + 4AB\psi^2\bigr) + g\varphi + h, \tag{7}$$
$$\psi''_{tt} = \bigl[2bf\varphi + g + (-1)^n ab^n\bigr]\psi. \tag{8}$$

Из уравнения (8) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (7). В итоге получается нелинейное уравнение четвертого порядка для функции ψ (при f, g, $h = \text{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{ch}\bigl(x\sqrt{-b}\bigr) \quad \text{при } A = \tfrac{1}{2},\ B = \tfrac{1}{2};$$
$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}\bigl(x\sqrt{-b}\bigr) \quad \text{при } A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2}.$$

3°. Точные решения, содержащие тригонометрические функции x:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\bigl(x\sqrt{b} + c\bigr), \qquad b>0,$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{tt} = bf\bigl(\varphi^2 + \psi^2\bigr) + g\varphi + h,$$
$$\psi''_{tt} = \bigl[2bf\varphi + g + (-1)^n ab^n\bigr]\psi.$$

Замечание. Подобные и другие уравнения старших порядков с квадратичной нелинейностью рассматривались в работе V. A. Galaktionov (1995).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\left(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}At^2 + Bt + C + \int_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f\bigl(x, \varphi'_x\bigr) - A = 0,$$

порядок которого можно понизить с помощью подстановки $u = \varphi'_x$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - g(t) = 0,$$
$$a\psi_x^{(n)} + f(x, \psi'_x) + b\psi = 0.$$

Решение первого уравнения для $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\operatorname{sh}\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$
$$\varphi(t) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\sin\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + wf\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}\varphi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{tt} = \big[a\lambda^n + f(t,\lambda)\big]\varphi.$$

11.3.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Big(x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)\displaystyle\sum_{i,j=0}^{i,j<n} b_{ij}\dfrac{\partial^i w}{\partial x^i}\dfrac{\partial^j w}{\partial x^j} + \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t)\dfrac{\partial^k w}{\partial x^k} + h(t).$

Здесь принято обозначение: $\dfrac{\partial^0 w}{\partial x^0} \equiv w$.

1°. В общем случае уравнение имеет точные решения вида

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\lambda x),$$

где λ — корни алгебраического уравнения: $\displaystyle\sum_{i,j=0}^{i,j<n} b_{ij}\lambda^{i+j} = 0.$

2°. Пусть n — четное число и в первой сумме все коэффициенты $b_{ij} = 0$, когда сумма их индексов $i+j$ — нечетное число. В этом случае исходное уравнение имеет также решения вида

$$w(x,t) = \varphi_1(t) + \psi_1(t)\big[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\big],$$
$$w(x,t) = \varphi_2(t) + \psi_2(t)\big[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\big],$$

где A, B — произвольные постоянные, параметр λ определяется путем решения алгебраических уравнений, а функции $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t)$ находятся из соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big) + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}At^2 + Bt + C + \int_0^t (t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \varphi(x).$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a\varphi_x^{(n)} + f\big(x, \varphi'_x, \ldots, \varphi_x^{(n-1)}\big) - A = 0,$$

порядок которого можно понизить с помощью подстановки $u = \varphi'_x$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big) + bw + g(t).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} - b\varphi - g(t) = 0,$$
$$a\psi_x^{(n)} + f\big(x, \psi'_x, \ldots, \psi_x^{(n-1)}\big) + b\psi = 0.$$

Решение первого для $\varphi(t)$ уравнения имеет вид

$$\varphi(t) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\operatorname{sh}\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \qquad \text{при} \quad b = k^2 > 0,$$
$$\varphi(t) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + \frac{1}{k}\int_0^t g(\tau)\sin\big[k(t-\tau)\big]\,d\tau \quad \text{при} \quad b = -k^2 < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + wf\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{n-1} w}{\partial x^{n-1}}\Big).$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = e^{\lambda x}\varphi(t),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\varphi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{tt} = \big[a\lambda^n + f(t, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1})\big]\varphi.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} + wf\Big(t,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ldots,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2n-2} w}{\partial x^{2n-2}}\Big).$

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \big[A\operatorname{ch}(\lambda x) + B\operatorname{sh}(\lambda x)\big]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{tt} = F(t)\varphi, \qquad F(t) = a\lambda^{2n} + f\big(t, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2n-2}\big).$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \big[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\big]\varphi(t),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi''_{tt} = F(t)\varphi, \qquad F(t) = (-1)^n a\lambda^{2n} + f\big(t, -\lambda^2, \ldots, (-1)^{n-1}\lambda^{2n-2}\big).$$

11.3.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x,t,w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x,t,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$

Точное решение:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}t^2\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k + t\sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} B_k x^k - \frac{1}{a(n-1)!}\int_0^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)\,d\xi,$$

где A_0, A_1, …, A_{n-1}; B_0, B_1, …, B_{n-1} — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(t)w + g(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)\big(A_n x^n + \ldots + A_1 x\big) + \psi(t),$$

где A_1, …, A_n — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{tt} = A_n a n!\,\varphi^2 + f(t)\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = A_n a n!\,\varphi\psi + f(t)\psi + g(t).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + bw^2 + f(t)w + g(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (C — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{tt} = C\varphi^2 + b\varphi\psi + f(t)\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = C\varphi\psi + b\psi^2 + f(t)\psi + g(t),$$

а функция $\Theta(x)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$a\Theta_x^{(n)} + b\Theta = C.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} - ak^{2n}w^2 + f(x)w + b_1\operatorname{sh}(kx) + b_2\operatorname{ch}(kx).$

Точное решение квадратичное по переменной t:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}(t+C)^2\big[b_1\operatorname{sh}(kx) + b_2\operatorname{ch}(kx)\big] + \varphi(x).$$

Здесь C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(x)$ определяется из линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a\varphi_x^{(2n)} - ak^{2n}\varphi + f(x) = 0.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w + h(t).$

Точное решение:

$$w(x,t) = \varphi(t)\Theta(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\Theta(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{tt} = C\varphi^2 + g(t)\varphi,$$
$$\psi''_{tt} = \big[C\varphi + g(t)\big]\psi + h(t),$$
$$a\Theta_x^{(n)} + f(x)\Theta'_x = C,$$

C — произвольная постоянная.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = aw\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n} + f(x)w\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)w^2 + h(t)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\varphi_x^{(n)} + f(x)\varphi'_x + g(x)\varphi - C = 0,$$
$$\psi''_{tt} - C\psi^2 - h(t)\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

11.4. Другие уравнения

11.4.1. Уравнения гидродинамического типа

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1(x,t) = w(x+\varphi(t),t) + \varphi'_t(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение:

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(t)} - \lambda^{n-2}f(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, λ — произвольная постоянная.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\dfrac{\partial^n w}{\partial y^n}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1(x,y) = C_1^{n-2}w(x, C_1 y + \varphi(x)) + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\bigl[y+\varphi(x)\bigr]^k,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_k — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C, λ — произвольные постоянные.

4°. Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(y)\int f(x)\,dx + \psi(y),$$

где функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy} = \varphi_y^{(n)},$$
$$\varphi'_y\psi'_y - \varphi\psi''_{yy} = \psi_y^{(n)}.$$

5°. Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)U(z), \qquad z = \psi(x)y$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $U = U(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\varphi\psi)'_x = C_1 f(x)\psi^{n-1},$$
$$\varphi'_x = C_2 f(x)\psi^{n-2},$$
$$C_1(U'_z)^2 - C_2 U U''_{zz} = U_z^{(n)}.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\dfrac{\partial^{2n} w}{\partial y^{2n}} + g(x).$

Частный случай уравнения 11.4.1.4.

Точное решение:

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \frac{1}{2\lambda^2\varphi(x)}\left[\int g(x)\,dx + C_1\right]e^{-\lambda y} - \lambda^{2n-2}\int f(x)\,dx + C_2,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\Big(x, w, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial y^n}\Big).$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1(x,y) = w(x, y + \varphi(x)),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, также будет решением этого уравнения.

2°. Пусть правая часть уравнения не зависит явно от x. Точное решение:

$$w = w(z), \quad z = y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $F\big(w, w'_z, \ldots, w_z^{(n)}\big) = 0$.

3°. Пусть правая часть уравнения не зависит явно от x и w. Точное решение:

$$w = Cx + g(z), \quad z = y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная, а функция $g(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $F\big(g'_z, \ldots, g_z^{(n)}\big) + Cg''_{zz} = 0$.

4°. Преобразование Мизеса

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad u(\xi,\eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y),$$

на единицу понижает порядок рассматриваемого уравнения. Формулы для вычисления производных:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = u\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(u\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial y} = u\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

11.4.2. Уравнения общего вида, содержащие $\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}$ и $\dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}$

1. $F\Big(x, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}; \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\Big) = 0.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = Ae^{\lambda y}\varphi(x),$$

где A, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$F\big(x, \varphi'_x/\varphi, \ldots, \varphi_x^{(n)}/\varphi; \lambda, \ldots, \lambda^m\big) = 0.$$

2. $F\Big(x, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}; \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^{2m} w}{\partial y^{2m}}\Big) = 0.$

1°. Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = Ae^{\lambda y}\varphi(x),$$
$$w(x,y) = \big[A\operatorname{ch}(\lambda y) + B\operatorname{sh}(\lambda y)\big]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$F\big(x, \varphi'_x/\varphi, \ldots, \varphi_x^{(n)}/\varphi; \lambda^2, \ldots, \lambda^{2m}\big) = 0.$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \big[A\cos(\lambda y) + B\sin(\lambda y)\big]\varphi(x),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$F\big(x, \varphi'_x/\varphi, \ldots, \varphi_x^{(n)}/\varphi; -\lambda^2, \ldots, (-1)^m\lambda^{2m}\big) = 0.$$

3. $F_1\left(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + F_2\left(y, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\right) = kw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$F_1\big(x, \varphi'_x, \ldots, \varphi^{(n)}_x\big) - k\varphi = C,$$
$$F_2\big(y, \psi'_y, \ldots, \psi^{(m)}_y\big) - k\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

4. $F_1\left(x, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + w^k F_2\left(y, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\right) = 0.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi^{-k} F_1\big(x, \varphi'_x/\varphi, \ldots, \varphi^{(n)}_x/\varphi\big) = C,$$
$$\psi^{k} F_2\big(y, \psi'_y/\psi, \ldots, \psi^{(m)}_y/\psi\big) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

5. $F_1\left(x, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + e^{\lambda w} F_2\left(y, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\right) = 0.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$e^{-\lambda\varphi} F_1\big(x, \varphi'_x, \ldots, \varphi^{(n)}_x\big) = C,$$
$$e^{\lambda\psi} F_2\big(y, \psi'_y, \ldots, \psi^{(m)}_y\big) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

6. $F_1\left(x, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^n w}{\partial x^n}\right) + F_2\left(y, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\right) = k\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$F_1\big(x, \varphi'_x/\varphi, \ldots, \varphi^{(n)}_x/\varphi\big) - k\ln\varphi = C,$$
$$F_2\big(y, \psi'_y/\psi, \ldots, \psi^{(m)}_y/\psi\big) - k\ln\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

7. $F\left(ax + by,\ w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n},\ \dfrac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\right) = 0.$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \quad \xi = ax + by,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\xi,\ w,\ aw'_\xi, \ldots, a^n w^{(n)}_\xi,\ bw'_\xi, \ldots, b^m w^{(m)}_\xi\big) = 0.$$

8. $F\left(ax + by,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^n w}{\partial x^n},\ \dfrac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial^m w}{\partial y^m}\right) = 0.$

Точное решение:

$$w = \varphi(\xi) + Cx, \quad \xi = ax + by,$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\varphi(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\big(\xi,\ a\varphi'_\xi + C,\ a^2\varphi''_{\xi\xi}, \ldots, a^n\varphi^{(n)}_\xi,\ b\varphi'_\xi, \ldots, b^m\varphi^{(m)}_\xi\big) = 0.$$

9. $$\bigl[a_1x+b_1y+f(w)\bigr]\frac{\partial^n w}{\partial x^n}+\bigl[a_2x+b_2y+g(w)\bigr]\frac{\partial^n w}{\partial y^n}= \\ =\Phi\Bigl(w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\dots,\frac{\partial^m w}{\partial x^m},\ \frac{\partial w}{\partial y},\dots,\frac{\partial^k w}{\partial y^k}\Bigr).$$

Точные решения ищем в виде

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$A^n a_1+B^n a_2=A,\qquad A^n b_1+B^n b_2=B.$$

Искомая функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl[\xi+A^n f(w)+B^n g(w)\bigr]w_\xi^{(n)}=\Phi\bigl(w,\ Aw'_\xi,\dots,A^m w_\xi^{(m)},\ Bw'_\xi,\dots,B^k w_\xi^{(k)}\bigr).$$

Замечание. Отметим, что m и k могут быть больше n.

10. $$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\Bigl\{\bigl[a_1x+b_1y+f(w)\bigr]\frac{\partial^m w}{\partial x^m}\Bigr\}+\frac{\partial^n}{\partial y^n}\Bigl\{\bigl[a_2x+b_2y+g(w)\bigr]\frac{\partial^m w}{\partial y^m}\Bigr\}=0.$$

Точные решения ищем в виде

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$A^{n+m}a_1+B^{n+m}a_2=A,\qquad A^{n+m}b_1+B^{n+m}b_2=B.$$

Искомая функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением m-го порядка

$$\bigl[\xi+A^{n+m}f(w)+B^{n+m}g(w)\bigr]w_\xi^{(m)}=C_0+C_1\xi+\ldots+C_{n-1}\xi^{n-1},$$

где C_0, C_1, …, C_{n-1} — произвольные постоянные.

Приложения

А. Методы обобщенного и функционального разделения переменных*

А.1. Введение

А.1.1. Предварительные замечания

Метод разделения переменных является самым распространенным методом решения линейных уравнений математической физики. Для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией w этот метод базируется на поиске точных решений в виде произведения функций разных аргументов

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{1}$$

Интегрирование отдельных классов нелинейных уравнений с частными производными первого порядка основано на поиске точных решений в виде суммы функций разных аргументов [см., например, Э. Камке (1966), D. Zwillinger (1989), А. П. Маркеев (1990), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Moussiaux (2002)]:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t). \tag{2}$$

Некоторые нелинейные уравнения математической физики второго и более высоких порядков также имеют точные решения вида (1) или (2). Подобные решения будем называть *решениями с обычным разделением переменных.*

В последнее десятилетие большое внимание уделялось поиску точных решений, имеющих более сложную структуру. В частности, в работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1989) и В. А. Галактионова, С. А. Посашкова, С. Р. Свирщевского (1995) были описаны некоторые типы параболических и гиперболических уравнений с квадратичной нелинейностью, допускающие точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t) + \chi(t), \tag{3}$$

и решения, соответствующие перестановке независимых переменных $x \rightleftarrows t$ в правой части (3). В частном случае $\chi(t) = 0$ решение (3) переходит в решение (1), а в случае $\psi(t) = 1$ — в решение (2). В работах С. С. Титова (1988), В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1994), V. A. Galaktionov (1995), S. R. Svirshchevskii (1995) приведены точные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие бóльшее число слагаемых, чем в (3). Результаты В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1994), V. A. Galaktionov (1995) основаны на отыскании конечномерных подпространств, инвариантных относительно соответствующих нелинейных дифференциальных операторов.

В работах A. M. Grundland, E. Infeld (1992), J. Miller (Jr.), L. A. Rubel (1993), R. Z. Zhdanov (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994) описаны все нелинейные уравнения теории волн и теории теплопроводности вида $\partial_{tt}w \mp \partial_{xx}w = f(w)$, которые допускают точные решения с функциональным разделением переменных вида

$$w(x,t) = F(z), \qquad \text{где} \qquad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{4}$$

В работе P. W. Doyle, P. J. Vassiliou (1998) рассматривались одномерные нестационарные уравнения теплопроводности $\partial_t w = \partial_x[f(w)\partial_x w]$, которые допускают решения вида (4).

---

* Разд. А.1–А.3 написаны совместно с А. И. Журовым.

В работах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1996), А. Д. Полянина, А. И. Журова (1998), А. Д. Полянина, А. В. Вязьмина, А. И. Журова, Д. А. Казенина (1998) A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, A. V. Vyazmin (2000), А. Д. Полянина (2001 *a, c, d*), описано много нелинейных уравнений математической физики разных типов и разных порядков, которые допускают решения с обобщенным и функциональным разделением переменных (особое внимание уделялось уравнениям общего вида, зависящим от произвольных функций).

В данном приложении описаны новые прямые методы построения точных решений нелинейных уравнений математической физики и механики с обобщенным и функциональным разделением переменных, основанные на исследовании соответствующих функциональных и функционально-дифференциальных уравнений (которые содержат неизвестные функции разных переменных). Даны примеры применения этих методов к уравнениям теории тепло- и массопереноса, теории волн и гидродинамики, а также к уравнениям математической физики общего вида.

Замечание. Точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных обычно не могут быть получены методами (классического) группового анализа.

А.1.2. Простейшие случаи разделения переменных в нелинейных уравнениях

В отдельных случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях проводится по той же схеме, что и в линейных уравнениях. Точное решение ищется в виде произведения или суммы функций разных аргументов. Подставив (1) или (2) в рассматриваемое уравнение и делая элементарные алгебраические операции, приходят к равенству двух выражений (для уравнений с двумя переменными), зависящих от разных аргументов. Такая ситуация возможна только в том случае, когда каждое из указанных выражений равно одной и той же постоянной величине. В результате получают обыкновенные дифференциальные уравнения для искомых величин.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

Пример 1. Уравнение теплопроводности со степенной нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^k \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{5}$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов. Подставив (1) в уравнение (5), приходим к выражению

$$\varphi\psi'_t = a\psi^{k+1}(\varphi^k\varphi'_x)'_x.$$

Разделяя переменные путем деления обеих частей на $\varphi\psi^{k+1}$, получим

$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = \frac{a(\varphi^k\varphi'_x)'_x}{\varphi}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от переменной t, а правая — только от x. Это возможно только при выполнении условий

$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = C, \qquad \frac{a(\varphi^k\varphi'_x)'_x}{\varphi} = C, \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная. Решив обыкновенные дифференциальные уравнения (6), получим решение уравнения (5) вида (1).

Процедура построения решения с разделяющимися переменными вида (1) нелинейного уравнения (5) полностью аналогична процедуре, используемой для решения линейных уравнений [в частности, для уравнения (5) при $k = 0$]. Случаи решений с подобным разделением переменных будем называть *простейшими.*

Пример 2. Волновое уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{7}$$

имеет точное решение в виде суммы функций разных аргументов. Подставим выражение (2) в уравнение (7). После деления обеих частей на $e^{\lambda\psi}$ приходим к равенству

$$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x,$$

левая часть которого зависит только от переменной t, а правая — только от x. Это возможно только при выполнении условий

$$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = C, \quad a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x = C, \tag{8}$$

где C — произвольная постоянная. Решив обыкновенные дифференциальные уравнения (8), получим решение уравнения (7) вида (2).

Пример 3. Уравнение теплопроводности в анизотропной среде с источником логарифмического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\Big] = aw\ln w \tag{9}$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$w = \varphi(x)\psi(y). \tag{10}$$

Подставим выражение (10) в уравнение (9). После деления на $\varphi\psi$ и перенесения отдельных слагаемых в разные части полученного равенства, получим

$$\frac{1}{\varphi}[f(x)\varphi'_x]'_x - a\ln\varphi = -\frac{1}{\psi}[g(y)\psi'_y]'_y + a\ln\psi.$$

Левая часть этого выражения зависит только от переменной x, а правая — только от y. Приравнивая их постоянной величине, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

⊙ *Литература к разд. А.1.2*: Л. В. Овсянников (1959), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996).

А.1.3. Примеры нетривиального разделения переменных в нелинейных уравнениях

Во многих случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях происходит иначе, чем в линейных уравнениях. Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

Пример 4. Рассмотрим уравнение с кубической нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 - aw^3, \tag{11}$$

где $f(t)$ — произвольная функция. Ищем точные решения в виде произведения функций разных аргументов. Подставим (1) в (11) и поделим обе части полученного равенства на $f(t)\varphi(x)\psi(t)$. В результате имеем

$$\frac{\psi'_t}{f\psi} = \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} + \frac{\psi^2}{f}[(\varphi'_x)^2 - a\varphi^2]. \tag{12}$$

В общем случае данное выражение нельзя представить в виде суммы функций разных аргументов. Это однако не означает, что уравнение (11) не имеет решений вида (1).

1°. Прямой проверкой можно убедится, что функционально-дифференциальное уравнение (12) при $a > 0$ имеет решение

$$\varphi(x) = C\exp(\pm x\sqrt{a}), \quad \psi(t) = \exp\Big[a\int f(t)\,dt\Big], \tag{13}$$

где C — произвольная постоянная. Решение (13) для φ обрашает в нуль выражение в квадратных скобках в (12), что позволяет разделить переменные.

2°. Имеется более общее решение функционально-дифференциального уравнения (12) при $a > 0$:

$$\varphi(x) = C_1\exp(x\sqrt{a}) + C_2\exp(-x\sqrt{a}),$$
$$\psi(t) = e^F\Big(C_3 + 8aC_1C_2\int e^{2F}\,dt\Big)^{-1/2}, \quad F = a\int f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Функция $\varphi = \varphi(x)$ такова, что обе комбинации велнчин в уравнении (12), которые зависят от x, одновременно будут равны некоторым постоянным:

$$\varphi''_{xx}/\varphi = \text{const}, \quad (\varphi'_x)^2 - a\varphi^2 = \text{const}.$$

Это обстоятельство и позволяет разделить переменные.

Отметим, что функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет уравнению Бернулли $\psi'_t = af(t)\psi - 4aC_1C_2\psi^3$.

3°. Имеется другое решение функционально-дифференциального уравнения (12) при $a<0$:

$$\varphi(x)=C_1\sin\bigl(x\sqrt{-a}\bigr)+C_2\cos\bigl(x\sqrt{-a}\bigr),$$

$$\psi(t)=e^F\Bigl[C_3+2a(C_1^2+C_2^2)\int e^{2F}\,dt\Bigr]^{-1/2},\quad F=a\int f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Функция $\varphi=\varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (12), зависящие от x, будут равны константам. Отметим, что функция $\psi=\psi(t)$ описывается уравнением Бернулли $\psi'_t=af(t)\psi-a(C_1^2+C_2^2)\psi^3$.

Пример 5. Рассмотрим уравнение третьего порядка с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=b\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+c\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \tag{14}$$

Будем искать точные решения уравнения (14) с разделяющимися переменными в виде суммы функций разных аргументов

$$w=f(x)+g(y). \tag{15}$$

Подставив (15) в (14), имеем

$$g'_y f''_{xx}+af'_x g''_{yy}=bf'''_{xxx}+cg'''_{yyy}. \tag{16}$$

Данное выражение нельзя представить в виде суммы двух функций разных аргументов.

Нетрудно догадаться, что функционально-дифференциальному уравнению (16) можно удовлетворить:

$$\text{если } g'_y=C_1 \implies g(y)=C_1y+C_2,\quad f(x)=C_3\exp(C_1x/b)+C_4x \quad \text{(первый случай)},$$

$$\text{если } f'_x=C_1 \implies f(x)=C_1x+C_2,\quad g(y)=C_3\exp(aC_1y/c)+C_4y \quad \text{(второй случай)},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. В указанных случаях два члена из четырех в (16) обращаются в нуль, что позволяет разделить переменные.

Уравнение (14) имеет также более сложное точное решение вида (15):

$$w=C_1e^{-a\lambda x}+\frac{c\lambda}{a}x+C_2e^{\lambda y}-ab\lambda y+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные. Механизм разделения здесь иной: оба нелинейных члена в левой части (16) содержат одинаковые по величине, но разные по знаку слагаемые, которые нельзя представить в виде суммы функций разных аргументов. При сложении нелинейных членов указанные слагаемые сокращаются, что в итоге и приводит к разделению переменных:

$$\begin{array}{rl} + \begin{array}{r} g'_y f''_{xx} \\ af'_x g''_{yy} \end{array} & \begin{array}{l} =\ C_1C_2a^2\lambda^3e^{\lambda y-a\lambda x}-C_1b(a\lambda)^3e^{-a\lambda x} \\ =-C_1C_2a^2\lambda^3e^{\lambda y-a\lambda x}+C_2c\lambda^3e^{\lambda y} \end{array} \\ \hline g'_y f''_{xx}+af'_x g''_{yy} & =-C_1b(a\lambda)^3e^{-a\lambda x}+C_2c\lambda^3e^{\lambda y}=bf'''_{xxx}+cg'''_{yyy} \end{array}$$

Пример 6. Рассмотрим уравнение второго порядка с кубической нелинейностью

$$(1+w^2)\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr)-2w\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2-2w\Bigl(\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2=aw(1-w^2). \tag{17}$$

Ищем точное решение уравнения (17) с разделяющимися переменными в виде произведения функций разных аргументов

$$w=f(x)g(y). \tag{18}$$

Подставив (18) в (17), получим соотношение

$$(1+f^2g^2)(gf''_{xx}+fg''_{yy})-2fg[g^2(f'_x)^2+f^2(g'_y)^2]=afg(1-f^2g^2), \tag{19}$$

которое нельзя представить в виде суммы двух функций разных аргументов. Тем не менее уравнение (17) имеет решения вида (18). Прямой проверкой можно убедиться, что функции $f=f(x)$ и $g=g(y)$, удовлетворяющие нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}(f'_x)^2&=Af^4+Bf^2+C,\\ (g'_y)^2&=Cg^4+(a-B)g^2+A,\end{aligned} \tag{20}$$

где A, B, C — произвольные постоянные, обращают функционально-дифференциальное уравнение (19) в тождество [надо использовать следствия уравнений (20): $f''_{xx}=2Af^3+Bf$, $g''_{yy}=2Cg^3+(a-B)g$].

Замечание. Уравнение (17) заменой $u=4\,\mathrm{arctg}\,w$ сводится к нелинейному уравнению теплопроводности с источником синусоидального вида $\Delta u=a\sin u$.

Рассмотренные примеры иллюстрируют некоторые особенности решений с разделяющимися переменными. В разд. A.2 и A.3 будут описаны достаточно общие методы построения таких и более сложных решений нелинейных уравнений с частными производными.

А.2. Методы обобщенного разделения переменных

А.2.1. Структура решений с обобщенным разделением переменных

А.2.1-1. Общий вид решений. Рассматриваемые классы нелинейных уравнений.

Для простоты изложения ограничимся здесь описанием случая уравнений математической физики с двумя независимыми переменными x, y и зависимой переменной w (одна из независимых переменных может играть роль времени).

Линейные уравнения математической физики с разделяющимися переменными допускают точные решения в виде сумм

$$w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(y), \qquad (1)$$

где $w_i = \varphi_i(x)\psi_i(y)$ — соответствующие частные решения. При этом функции $\varphi_i(x)$ [и функции $\psi_i(y)$] при разных значениях i не связаны друг с другом.

Многие нелинейные уравнения с частными производными с квадратичными и степенными нелинейностями вида

$$f_1(x)g_1(y)\Pi_1[w] + f_2(x)g_2(y)\Pi_2[w] + \dots + f_m(x)g_m(y)\Pi_m[w] = 0, \qquad (2)$$

где $\Pi_i[w]$ — дифференциальные формы, представляющие собой произведения целых неотрицательных степеней функции w и ее частных производных $\partial_x w$, $\partial_y w$, $\partial_{xx} w$, $\partial_{xy} w$, $\partial_{yy} w$, $\partial_{xxx} w$, $\dots$, также имеют точные решения вида (1). Такие решения будем называть *решениями с обобщенным разделением переменных*. Для нелинейных уравнений, в отличие от линейных, функции $\varphi_i(x)$ при различных значениях i обычно связаны друг с другом [и с функциями $\psi_j(y)$]. Примеры точных решений нелинейных уравнений вида (1) для наиболее простых случаев $n=1$ и $n=2$ (при $\psi_1=\varphi_2=1$) рассмотрены в разд. А.1.2 и А.1.3.

Замечание. Если в уравнении (2) все $f_s(x)=\mathrm{const}$, $g_s(y)=\mathrm{const}$, то можно искать решения более общего вида

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(\xi)\psi_m(\eta), \quad \xi = a_1x + a_2y, \quad \eta = b_1x + b_2y,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — постоянные.

А.2.1-2. Общий вид функционально-дифференциальных уравнений.

В общем случае после подстановки выражения (1) в дифференциальное уравнение (2) для определения функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(y)$ получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \dots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0, \qquad (3)$$

где функционалы $\Phi_j(X)$ и $\Psi_j(Y)$ зависят соответственно от переменных x и y:

$$\begin{aligned}\Phi_j(X) &\equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''\bigr),\\ \Psi_j(Y) &\equiv \Psi_j\bigl(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \dots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''\bigr).\end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь, для наглядности, формулы выписаны для случая уравнения второго порядка (2); для уравнений старших порядков в правые части формул (4) войдут соответствующие старшие производные функций φ_i и ψ_j.

Далее в разд. А.2.2, А.2.3 будет описано два различных метода решения функционально-дифференциальных уравнений вида (3), (4).

Замечание. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений в уравнение (3)–(4) входят несколько функций (и их производных), зависящих от разных аргументов.

А.2.2. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом дифференцирования

А.2.2-1. Описание метода дифференцирования.

Процедура решения функционально-дифференциальных уравнений состоит из трех последовательных этапов.

1°. Предположим, что $\Psi_k \not\equiv 0$. Поделим уравнение (3) на Ψ_k и продифференцируем по y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов:

$$\widetilde{\Phi}_1(X)\widetilde{\Psi}_1(Y) + \widetilde{\Phi}_2(X)\widetilde{\Psi}_2(Y) + \cdots + \widetilde{\Phi}_{k-1}(X)\widetilde{\Psi}_{k-1}(Y) = 0,$$
$$\widetilde{\Phi}_j(X) = \Phi_j(X), \quad \widetilde{\Psi}_j(Y) = [\Psi_j(Y)/\Psi_k(Y)]'_y.$$

Продолжим аналогичную процедуру... В итоге приходим к двучленному уравнению с разделяющимися переменными

$$\widehat{\Phi}_1(X)\widehat{\Psi}_1(Y) + \widehat{\Phi}_2(X)\widehat{\Psi}_2(Y) = 0. \tag{5}$$

Теперь надо рассмотреть две ситуации.

Невырожденный случай: $|\widehat{\Phi}_1(X)| + |\widehat{\Phi}_2(X)| \not\equiv 0$, $|\widehat{\Psi}_1(Y)| + |\widehat{\Psi}_2(Y)| \not\equiv 0$. Тогда решения уравнения (5) определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\widehat{\Phi}_1(X) + C\widehat{\Phi}_2(X) = 0, \quad C\widehat{\Psi}_1(Y) - \widehat{\Psi}_2(Y) = 0,$$

где C — произвольная постоянная. Предельному случаю $C = \infty$ соответствуют уравнения $\widehat{\Phi}_2 = 0$, $\widehat{\Psi}_1 = 0$.

Два вырожденных случая:

$$\widehat{\Phi}_1(X) \equiv 0, \quad \widehat{\Phi}_2(X) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\Psi}_{1,2}(Y) \text{ — любые;}$$
$$\widehat{\Psi}_1(Y) \equiv 0, \quad \widehat{\Psi}_2(Y) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\Phi}_{1,2}(X) \text{ — любые.}$$

2°. Полученные решения двучленного уравнения (5) надо подставить в исходное функционально-дифференциальное уравнение (3), чтобы убрать «лишние» постоянные интегрирования [они появляются из-за того, что уравнение (5) получено из (3) путем дифференцирования].

3°. Случай $\Psi_k \equiv 0$ надо рассмотреть отдельно (поскольку уравнение на первом этапе делилось на Ψ_k). Аналогично следует исследовать все другие случаи тождественного обращения в нуль функционалов, на которые делились промежуточные функционально-дифференциальные уравнения.

Замечание 1. Функционально-дифференциальное уравнение (3) может не иметь решений.

Замечание 2. На каждом этапе число членов рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения можно понижать путем дифференцирования как по переменной y, так и по переменной x. На первом этапе, например, можно предположить, что $\Phi_k \not\equiv 0$. Поделив уравнение (3) на Φ_k и продифференцировав по x, получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов.

А.2.2-2. Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных.

Ниже даны конкретные примеры использования описанного метода для построения точных решений нелинейных уравнений с обобщенным разделением переменных.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}, \tag{6}$$

где $f(x)$ — произвольная функция. В частном случае $n = 3$, $f(x) = \text{const}$ оно совпадает с уравнением стационарного пограничного слоя на плоской пластине для функции тока.

Ищем точное решение уравнения (6) с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x), \tag{7}$$

Подставив (7) в (6) и сократив на φ, получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\varphi'_x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy}] - \chi'_x\psi''_{yy} = f(x)\psi^{(n)}_y. \tag{8}$$

Поделим обе части (8) на $f = f(x)$, затем продифференцируем по x. В результате имеем

$$(\varphi'_x/f)'_x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy}] - (\chi'_x/f)'_x\psi''_{yy} = 0. \tag{9}$$

Невырожденный случай. Разделяя в (9) переменные, получим

$$(\chi'_x/f)'_x = C_1(\varphi'_x/f)'_x,$$
$$(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - C_1\psi''_{yy} = 0.$$

Интегрируя, приходим к следующим выражениям:

$$\psi(y) = C_4 e^{\lambda y} - C_1, \quad \varphi(x) \text{ — любая}, \quad \chi(x) = C_1\varphi(x) + C_2 \int f(x)\,dx + C_3, \tag{10}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — постоянные интегрирования. Поставив (10) в (8), находим связь между константами $C_2 = -\lambda^{n-2}$. Учитывая сказанное и формулы (7) и (10), в итоге имеем решение уравнения (6) вида (7):

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2} \int f(x)\,dx + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C, λ — произвольные постоянные ($C = C_3$, $C_4 = 1$).

Вырожденный случай. Из уравнения (9) имеем

$$(\varphi'_x/f)'_x = 0, \quad (\chi'_x/f)'_x = 0, \quad \psi(y) \text{ — любая}. \tag{11}$$

Интегрируя дважды первые два уравнения (11), получим

$$\varphi(x) = C_1 \int f(x)\,dx + C_2, \quad \chi(x) = C_3 \int f(x)\,dx + C_4, \tag{12}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Подставив выражение (7) с учетом (12) в уравнение (8), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $\psi = \psi(y)$:

$$C_1(\psi'_y)^2 - (C_1\psi + C_3)\psi''_{yy} = \psi_y^{(n)}. \tag{13}$$

Формулы (7), (12) и уравнение (13) описывают точное решение уравнения (6).

Пример 2. Двумерные стационарные уравнения вязкой несжимаемой жидкости сводятся к одному нелинейному уравнению четвертого порядка для функции тока (Л. Г. Лойцянский, 1973):

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{14}$$

Будем искать точные решения уравнения (14) с разделяющимися переменными вида

$$w = \varphi(x) + \psi(y). \tag{15}$$

Подставив (15) в (14), имеем

$$\psi'_y\varphi'''_{xxx} - \varphi'_x\psi'''_{yyy} = \nu\varphi''''_{xxxx} + \nu\psi''''_{yyyy}. \tag{16}$$

Продифференцируем обе части (16) по x и y. В результате получим

$$\psi''_{yy}\varphi''''_{xxxx} - \varphi''_{xx}\psi''''_{yyyy} = 0. \tag{17}$$

Невырожденный случай. При $\varphi''_{xx} \not\equiv 0$ и $\psi''_{yy} \not\equiv 0$ разделяя в (17) переменные, приходим к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\varphi''''_{xxxx} = C\varphi''_{xx}, \tag{18}$$

$$\psi''''_{yyyy} = C\psi''_{yy}, \tag{19}$$

которые имеют решения различного вида в зависимости от величины константы интегрнрования C.

1°. Решение уравнений (18), (19) при $C = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3, \\ \psi(y) &= B_1 + B_2y + B_3y^2 + B_4y^3, \end{aligned} \tag{20}$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные ($k = 1,2,3,4$). Подставив (20) в (16), находим значения постоянных

$$\begin{aligned} &A_4 = B_4 = 0, && A_n, B_n \text{ — любые} && (n = 1,2,3); \\ &A_k = 0, && B_k \text{ — любые} && (k = 1,2,3,4); \\ &B_k = 0, && A_k \text{ — любые} && (k = 1,2,3,4). \end{aligned}$$

Первые два набора постоянных определяют два известных полиномиальных решения уравнення (14) второй и третьей степени относительно независимых переменных (Л. Г. Лойцянский, 1973):

$$\begin{aligned} w &= C_1x^2 + C_2x + C_3y^2 + C_4y + C_5, \\ w &= C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

2°. Решение уравнений (18), (19) при $C = \lambda^2 > 0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 e^{\lambda x} + A_4 e^{-\lambda x},\\ \psi(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 e^{\lambda y} + B_4 e^{-\lambda y}.\end{aligned} \tag{21}$$

Подставим (21) в (16). После сокращения на λ^3 и приведения подобных членов, получим

$$A_3(\nu\lambda - B_2)e^{\lambda x} + A_4(\nu\lambda + B_2)e^{-\lambda x} + B_3(\nu\lambda + A_2)e^{\lambda y} + B_4(\nu\lambda - A_2)e^{-\lambda y} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при экспонентах нулю, находим значения постоянных:

$$\begin{aligned}&A_3 = A_4 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda && \text{случай 1},\\ &A_3 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda && \text{случай 2},\\ &A_3 = B_4 = 0,\ A_2 = -\nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda && \text{случай 3}.\end{aligned}$$

(Остальные постоянные могут принимать произвольные значения.) Указанные наборы постоянных определяют три решения уравнения (14) вида (15):

$$\begin{aligned}w &= C_1 e^{-\lambda y} + C_2 y + C_3 + \nu\lambda x,\\ w &= C_1 e^{-\lambda x} + \nu\lambda x + C_2 e^{-\lambda y} - \nu\lambda y + C_3,\\ w &= C_1 e^{-\lambda x} - \nu\lambda x + C_2 e^{\lambda y} - \nu\lambda y + C_3,\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные.

3°. Решение уравнений (18), (19) при $C = -\lambda^2 < 0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 \cos(\lambda x) + A_4 \sin(\lambda x),\\ \psi(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 \cos(\lambda y) + B_4 \sin(\lambda y).\end{aligned} \tag{22}$$

Подстановка выражений (22) в (16) не дает новых действительных решений.

Вырожденные случаи. В случаях $\varphi''_{xx} \equiv 0$ и $\psi''_{yy} \equiv 0$ уравнение (17) обращается в тождество соответственно для любой функции $\psi = \psi(y)$ и любой функции $\varphi = \varphi(x)$. Эти случаи надо рассматривать отдельно. Например, при $\varphi''_{xx} \equiv 0$ имеем $\varphi(x) = Ax + B$, где A, B — любые. Подставив эту функцию в (16), приходим к уравнению $-A\psi'''_{yyy} = \nu\psi''''_{yyyy}$. Его общее решение описывается формулой $\psi(y) = C_1 \exp(-Ay/\nu) + C_2 y^2 + C_3 y + C_4$. В итоге имеем еще одно решение уравнения (14) вида (15):

$$w = C_1 e^{-\lambda y} + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 + \nu\lambda x \qquad (A = \nu\lambda,\ B = 0),$$

которое с помощью группового анализа было получено В. В. Пухначевым (1960).

Пример 3. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = aw\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c. \tag{23}$$

Ищем точные решения уравнения (23) с разделяющимися переменными вида

$$w = \varphi(t) + \psi(t)\theta(x). \tag{24}$$

Подставив (24) в (23), после элементарных преобразований имеем

$$\varphi'_t - c + \psi'_t\theta = a\varphi\psi\theta''_{xx} + \psi^2[a\theta\theta''_{xx} + b(\theta'_x)^2]. \tag{25}$$

Поделим обе части этого выражения на ψ^2, а затем продифференцируем по t и x. В результате получим

$$(\psi'_t/\psi^2)'_t\theta'_x = a(\varphi/\psi)'_t\theta'''_{xxx}.$$

Разделяя переменные, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям (K — произвольная постоянная)

$$\theta'''_{xxx} = K\theta'_x, \tag{26}$$

$$(\psi'_t/\psi^2)'_t = aK(\varphi/\psi)'_t. \tag{27}$$

Общее решение уравнения (26) дается формулами

$$\theta = \begin{cases} A_1 x^2 + A_2 x + A_3 & \text{при } K = 0,\\ A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3 & \text{при } K = \lambda^2 > 0,\\ A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x) + A_3 & \text{при } K = -\lambda^2 < 0,\end{cases} \tag{28}$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные. Интегрируя уравнение (27), находим (B — произвольная постоянная):

$$\begin{aligned}&\varphi(t)\text{ — любая},\quad \psi = \frac{B}{t + C_1} && \text{при } K = 0,\\ &\psi(t)\text{ — любая},\quad \varphi = B\psi + \frac{1}{aK}\frac{\psi'_t}{\psi} && \text{при } K \neq 0.\end{aligned} \tag{29}$$

Подставив решения (28) и (29) в (25), можно «убрать» лишние константы и определить функции φ и ψ. В итоге получим:

1°. Решение при $a \neq -b$, $a \neq -2b$:

$$w = \frac{c(a+2b)}{2(a+b)}(t+C_1) + C_2(t+C_1)^{-\frac{a}{a+2b}} - \frac{(x+C_3)^2}{2(a+2b)(t+C_1)} \qquad \text{(соответствует } K=0\text{)},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Решение при $b = -a$:

$$w = \frac{1}{a\lambda^2}\frac{\psi'_t}{\psi} + \psi(A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x}) \qquad \text{(соответствует } K=\lambda^2>0\text{)},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z''_{tt} = ac\lambda^2 + 4a^2\lambda^4A_1A_2e^{2Z}, \qquad \psi = e^Z,$$

решение которого можно представить в неявной форме. В частных случаях $A_1 = 0$ или $A_2 = 0$ имеем $\psi = C_1\exp\bigl(\frac{1}{2}ac\lambda^2t^2 + C_2t\bigr)$.

3°. Решение при $b = -a$:

$$w = -\frac{1}{a\lambda^2}\frac{\psi'_t}{\psi} + \psi[A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x)] \qquad \text{(соответствует } K=-\lambda^2<0\text{)}.$$

где функция $\psi = \psi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z''_{tt} = -ac\lambda^2 + a^2\lambda^4(A_1^2 + A_2^2)e^{2Z}, \qquad \psi = e^Z,$$

решение которого можно представить в неявной форме.

Замечание. Структуру решений уравнения (23) другим методом описал V. A. Galaktionov (1995).

⊙ *Литература к разд. А.2.2:* A. D. Polyanin (2001), А. Д. Полянин, А. И. Журов (2002).

А.2.3. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления

А.2.3-1. Предварительные замечания. Описание метода расщепления.

При уменьшении числа членов функционально-дифференциального уравнения (3) с помощью дифференцирования возникают «лишние» постоянные интегрирования, которые надо убирать на заключительном этапе. Кроме того, порядок полученного уравнения может быть выше порядка исходного. Чтобы избежать этих трудностей решение функционально-дифференциального уравнения удобно свести к последовательному решению линейного функционального уравнения стандартного вида и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т. е. исходная задача расщепляется на две более простых задачи). Ниже дано краткое описание основных этапов этого метода.

Случай четного числа слагаемых в уравнении (3), $k = 2s$.

1°. На первом этапе рассмотрим уравнение (3) как билинейное функциональное уравнение, зависящее от двух переменных X и Y, где $\Phi_i(X)$, $\Psi_j(Y)$ — искомые величины.

Можно показать (используя индукцию и метод дифференцирования или путем непосредственной проверки), что билинейное функциональное уравнение (3) имеет решение:

$$\begin{aligned} \Phi_i(X) &= C_{i1}\Phi_{s+1}(X) + C_{i2}\Phi_{s+2}(X) + \dots + C_{is}\Phi_{2s}(X) \qquad (i = 1, 2, \dots, s), \\ \Psi_{s+i}(Y) &= -C_{1i}\Psi_1(Y) - C_{2i}\Psi_2(Y) - \dots - C_{si}\Psi_s(Y) \qquad (i = 1, 2, \dots, s), \end{aligned} \tag{30}$$

которое содержит s^2 произвольных постоянных C_{ij}. Функции $\Phi_{s+1}(X)$, …, $\Phi_{2s}(X)$, $\Psi_1(Y)$, …, $\Psi_s(Y)$, стоящие в правых частях равенств (30) задаются произвольно. Существуют также вырожденные решения, зависящие от меньшего числа постоянных (см. разд. А.2.3-2, п. 2°).

2°. На втором этапе подставим в решение (30) зависимости $\Phi_i(X)$ и $\Psi_j(Y)$ из (4). В результате получим систему (обычно переопределенную) обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых функций $\varphi_p(x)$ и $\psi_q(y)$.

Случай нечетного числа слагаемых в уравнении (3), $k = 2s - 1$.

1°. Функциональное уравнение (3) в случае нечетного числа слагаемых $k = 2s - 1$ имеет два различных решения, зависящих от $s(s-1)$ произвольных постоянных. Первое из них можно получить из формул (30), положив $\Phi_{2s} \equiv 0$ и отбросив последнее выражение для Ψ_{2s}. Второе решение можно получить из первого с помощью переобозначений $\Phi_i(X) \rightleftarrows \Psi_i(Y)$.

2°. Дальнейший анализ проводится для каждого из решений по той же схеме, что и для случая четного числа слагаемых в уравнении (3).

Замечание. Важно подчеркнуть, что используемое в методе расщепления билинейное функциональное уравнение (3) при фиксированном k является одним и тем же для разных классов исходных нелинейных уравнений математической физики.

А.2.3-2. Решения простейших функциональных уравнений и их применение.

Приведем решения двух простейших функциональных уравнений вида (3), которые понадобятся далее для решения конкретных нелинейных уравнений с частными производными.

1°. Функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 = 0 \tag{31}$$

где все Φ_i — функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i — функции другого аргумента, имеет два решения:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_3; \quad \Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2, \\ &\Psi_1 = A_1\Psi_3, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_3, \quad \Phi_3 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2, \end{aligned} \tag{32}$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные. Функции в правых частях равенств (32) считаются произвольными.

2°. Функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0, \tag{33}$$

где все Φ_i — функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i — функции другого аргумента, имеет решение

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3 + A_2\Phi_4, \qquad \Phi_2 = A_3\Phi_3 + A_4\Phi_4, \\ &\Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2, \quad \Psi_4 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2, \end{aligned} \tag{34}$$

зависящее от четырех произвольных постоянных A_m [см. решение (30) при $s = 2$, $C_{11} = A_1$, $C_{12} = A_2$, $C_{21} = A_3$, $C_{22} = A_4$]. Функции в правых частях равенств (34) считаются произвольными.

Уравнение (33) имеет также два других решения, зависящих от трех произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_4, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_4, \quad \Phi_3 = A_3\Phi_4, \quad \Psi_4 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2 - A_3\Psi_3; \\ &\Psi_1 = A_1\Psi_4, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_4, \quad \Psi_3 = A_3\Psi_4, \quad \Phi_4 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2 - A_3\Phi_3. \end{aligned} \tag{35}$$

Пример 4. Рассмотрим нелинейное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + f(t)w + g(t), \tag{36}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции. Ищем решение этого уравнения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t) + \chi(t). \tag{37}$$

Подставив (37) в (36), после элементарных операций получим

$$a\psi^2(\varphi\varphi'_x)'_x + a\psi\chi\varphi''_{xx} + (f\psi - \psi''_{tt})\varphi + f\chi + g - \chi''_{tt} = 0.$$

Это уравнение можно представить в виде функционального уравнения (33), где

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = (\varphi\varphi'_x)'_x, \quad \Phi_2 = \varphi''_{xx}, \quad \Phi_3 = \varphi, \qquad\quad \Phi_4 = 1, \\ &\Psi_1 = a\psi^2, \qquad\quad \Psi_2 = a\psi\chi, \quad \Psi_3 = f\psi - \psi''_{tt}, \quad \Psi_4 = f\chi + g - \chi''_{tt}. \end{aligned} \tag{38}$$

Подставив в решение (34) выражения (38), получим переопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$:

$$\begin{aligned} (\varphi\varphi'_x)'_x &= A_1\varphi + A_2, & \varphi''_{xx} &= A_3\varphi + A_4, \\ f\psi - \psi''_{tt} &= -A_1 a\psi^2 - A_3 a\psi\chi, & f\chi + g - \chi''_{tt} &= -A_2 a\psi^2 - A_4 a\psi\chi. \end{aligned} \tag{39}$$

Первые два уравнения (39) совместны только при

$$A_1 = 6B_2, \quad A_2 = B_1^2 - 4B_0B_2, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 2B_2, \tag{40}$$

где B_0, B_1, B_2 — произвольные постоянные, и имеют в этом случае решение

$$\varphi(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0. \tag{41}$$

Подставив выражения для коэффициентов (40) в два последних уравнения (39), получим систему для определения функций $\psi(t)$ и $\chi(t)$:

$$\begin{aligned} \psi''_{tt} &= 6aB_2\psi^2 + f(t)\psi, \\ \chi''_{tt} &= [2aB_2\psi + f(t)]\chi + a(B_1^2 - 4B_0B_2)\psi^2 + g(t), \end{aligned} \tag{42}$$

Формулы (37), (41) и система (42) определяют точное решение уравнения (36) с обобщенным разделением переменных. Первое уравнение (42) решается независимо; оно линейно в случае $B_2 = 0$ и интегрируется в квадратурах при $f(t) = \text{const}$. Второе уравнение (42) линейио относительно χ (при известном ψ).

При $\varphi \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$, $\chi \not\equiv 0$ и произвольных f и g уравнение (36) не имеет других решений вида (37).

Замечание. Можно показать (V. A. Galaktionov, 1995), что уравнение (36) имеет более общее решение вида

$$w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \psi_3(t), \qquad \varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = x, \tag{43}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи обозначают производные по t)

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= 6a\psi_1^2 + f(t)\psi_1, \\ \psi_2'' &= [6a\psi_1 + f(t)]\psi_2, \\ \psi_3'' &= [2a\psi_1 + f(t)]\psi_3 + a\psi_2^2 + g(t). \end{aligned} \tag{44}$$

Второе уравнение (44) имеет частное решение $\psi_2 = \psi_1$. Поэтому его общее решение можно запнсать в виде (В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001)

$$\psi_2 = C_1\psi_1 + C_2\psi_1 \int \frac{dt}{\psi_1^2}.$$

Частному случаю $C_2 = 0$ отвечает решение, полученное в примере 4.

Пример 5. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \tag{45}$$

которое встречается в гидродинамике (см. уравнение 9.2.3.1, п. 4°).

Ищем точные решения уравнеиия (45) вида

$$w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t). \tag{46}$$

Подставив (46) в (45), имеем

$$\varphi'_t\theta'_x - \varphi\psi\theta''_{xx} + \varphi^2\left[(\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx}\right] - \nu\varphi\theta'''_{xxx} = 0.$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно свести к функциональному уравненню (33), положив

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = \varphi'_t, \quad \Phi_2 = \varphi\psi, \quad \Phi_3 = \varphi^2, \quad \Phi_4 = \nu\varphi, \\ &\Psi_1 = \theta'_x, \quad \Psi_2 = -\theta''_{xx}, \quad \Psi_3 = (\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx}, \quad \Psi_4 = -\theta'''_{xxx}. \end{aligned} \tag{47}$$

Подставив эти выражения в (34), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= A_1\varphi^2 + A_2\nu\varphi, & \varphi\psi &= A_3\varphi^2 + A_4\nu\varphi, \\ (\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx} &= -A_1\theta'_x + A_3\theta''_{xx}, & \theta'''_{xxx} &= A_2\theta'_x - A_4\theta''_{xx}. \end{aligned} \tag{48}$$

Можно показать, что два последних уравнения (48) имеют совместные решения только при линейной связи между функцией θ и ее производной:

$$\theta'_x = B_1\theta + B_2. \tag{49}$$

Шесть постоянных B_1, B_2, A_1, A_2, A_3, A_4 должны удовлетворять трем условиям

$$\begin{aligned} B_1(A_1+B_2-A_3B_1)&=0,\\ B_2(A_1+B_2-A_3B_1)&=0,\\ B_1^2+A_4B_1-A_2&=0. \end{aligned} \tag{50}$$

Интегрируя уравнение (49), получим

$$\theta=\begin{cases} B_3\exp(B_1x)-\dfrac{B_2}{B_1} & \text{при } B_1\neq 0,\\ B_2x+B_3 & \text{при } B_1=0, \end{cases} \tag{51}$$

где B_3 — произвольная постоянная.

Из первых двух уравнений (48) находим функции φ и ψ:

$$\varphi=\begin{cases} \dfrac{A_2\nu}{C\exp(-A_2\nu t)-A_1} & \text{при } A_2\neq 0,\\ -\dfrac{1}{A_1t+C} & \text{при } A_2=0, \end{cases}\qquad \psi=A_3\varphi+A_4\nu, \tag{52}$$

где C — произвольная постоянная.

Формулы (51), (52) и соотношения (50) позволяют найти следующие решения уравнения (45) вида (46):

$$\begin{aligned} w&=\frac{x+C_1}{t+C_2}+C_3 && \text{при}\quad A_2=B_1=0,\ B_2=-A_1;\\ w&=\frac{C_1e^{-\lambda x}+1}{\lambda t+C_2}+\nu\lambda && \text{при}\quad A_2=0,\ B_1=-A_4,\ B_2=-A_1-A_3A_4;\\ w&=C_1e^{-\lambda(x+\beta\nu t)}+\nu(\lambda+\beta) && \text{при}\quad A_1=A_3=B_2=0,\ A_2=B_1^2+A_4B_1;\\ w&=\frac{\nu\beta+C_1e^{-\lambda x}}{1+C_2e^{-\nu\lambda\beta t}}+\nu(\lambda-\beta) && \text{при}\quad A_1=A_3B_1-B_2,\ A_2=B_1^2+A_4B_1, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, β, λ — произвольные постоянные (их можно выразить через A_k, B_k).

Исследование второго вырожденного решения (35) функционального уравнения (33) с учетом (47) приводит к двум решениям дифференциального уравнения (45):

$$w=\frac{x}{t+C_1}+\psi(t),$$

$$w=\varphi(t)e^{-\lambda x}-\frac{\varphi_t'(t)}{\lambda\varphi(t)}+\nu\lambda,$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, C_1, λ — произвольные постоянные.

⦿ *Литература к разд. А.2.3:* A. D. Polyanin (2001), А. Д. Полянин, А. И. Журов (2002).

А.2.4. Упрощенная схема построения точных решений уравнений с квадратичной нелинейностью

А.2.4-1. Описание упрощенной схемы построения точных решений.

Для построения точных решений уравнений вида (2) с квадратичной или степенной нелинейностью, которые не зависят явно от x (т. е. все $f_i=\text{const}$), можно использовать следующий упрощенный подход. Как и ранее решения ищутся в виде конечных сумм (1). Предположим, что система координатных функций $\varphi_i(x)$ описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Наиболее распространенные решения таких уравнений имеют вид

$$\varphi_i(x)=x^i,\quad \varphi_i(x)=e^{\lambda_i x},\quad \varphi_i(x)=\sin(\alpha_i x),\quad \varphi_i(x)=\cos(\beta_i x). \tag{53}$$

Конечные последовательности этих функций (в различных комбинациях) можно использовать для поиска точных решений с обобщенным разделением переменных вида (1), где λ_i, α_i, β_i рассматриваются как свободные параметры. Вторая система функций $g_i(y)$ определяется путем решения соответствующих нелинейных уравнений, получаемых подстановкой выражения (1) в рассматриваемое уравнение.

Указанный подход не имеет той общности, которой обладают методы, описанные в разд. А.2.2 и А.2.3. Однако явное задание одной системы координатных функций $\varphi_i(x)$ резко упрощает процедуру построения точных решений [при этом отдельные решения вида (1) могут быть потеряны]. Важно отметить, что подавляющее большинство известных к настоящему времени точных решений (с обобщенным разделением переменных) уравнений с частными производными с квадратичной нелинейностью, задаются координатными функциями вида (53) (обычно при $n = 2$).

Замечание. В работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1994), V. A. Galaktionov (1995) использовался метод построения точных решений, основанный на отыскании конечномерных подпространств, инвариантных относительно соответствующих нелинейных дифференциальных операторов. При этом система координатных функций по одной из переменных задавалась априорно, а затем применялся метод неопределенных коэффициентов.

А.2.4-2. Примеры построения решений нелинейных уравнений старших порядков.

Рассмотрим конкретные примеры использования упрощенной схемы построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений старших порядков.

Пример 6. Уравнения ламинарного пограничного слоя на плоской пластине сводятся к одному нелинейному уравнению третьего порядка для функции тока (Л. Г. Лойцянский 1973, Г. Шлихтинг 1974):

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \tag{54}$$

Ищем точное решение этого уравнения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y) = x\psi(y) + \theta(y), \tag{55}$$

которое отвечает простейшей последовательности $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1$ при $n = 2$ в формуле (1). Подставив (55) в (54), после перегруппировки членов имеем

$$x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy}] + [\psi'_y\theta'_y - \psi\theta''_{yy} - \nu\theta'''_{yyy}] = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому равенству при любых значениях x надо приравнять нулю оба выражения в квадратных скобках. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\psi = \psi(y)$ и $\theta = \theta(y)$:

$$\begin{aligned} (\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy} &= 0, \\ \psi'_y\theta'_y - \psi\theta''_{yy} - \nu\theta'''_{yyy} &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет, например, точное решение

$$\psi = \frac{6\nu}{y + C_1}, \quad \theta = \frac{C_2}{y + C_1} + \frac{C_3}{(y + C_1)^2} + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

О других точных решениях уравнения ламинарного пограничного слоя (54) см. уравнение 9.2.1.1.

Пример 7. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}, \tag{56}$$

где $f(x)$ — произвольная функция. В частном случае $n = 3$, $f(x) = \nu = \text{const}$ оно совпадает с уравнением пограничного слоя (54).

Ищем точное решение уравнения (56) с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} + \theta(x), \tag{57}$$

которое отвечает последовательности $\psi_1(y) = e^{\lambda y}$, $\psi_2(y) = 1$ в формуле (1). Подставив (57) в (56), после элементарных алгебраических действий получим

$$\lambda^2 e^{\lambda y}\varphi[\theta'_x + \lambda^{n-2} f(x)] = 0.$$

Этому равенству можно удовлетворить при

$$\theta(x) = -\lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C, \quad \varphi(x) \text{ — произвольная функция,} \tag{58}$$

где C — произвольная постоянная. (Другой случай $\varphi = 0$, ψ — любое, малоинтересен.) Формулы (57)–(58) описывают точное решение уравнения (56):

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C, \tag{59}$$

содержащее произвольную функцию $\varphi(x)$ и две произвольные постоянные C и λ.

Пример 8. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\frac{\partial^n w}{\partial x^n}, \tag{60}$$

где $f(t)$ — произвольная функция. В частном случае $n = 3$ и $f(t) = \mathrm{const}$ оно совпадает с уравнением (45).

Ищем точные решения уравнения (60) вида

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t). \tag{61}$$

Подставив (61) в (60), имеем

$$\varphi'_t - \lambda\varphi\psi = \lambda^{n-1}f(t)\varphi.$$

Выразим отсюда ψ и подставим в (61). В результате получим решение уравнения (60):

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(t)} - \lambda^{n-2}f(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, λ — произвольная постоянная.

⦿ *Литература к разд. А.2.4:* A. D. Polyanin (2001), А. Д. Полянин, А. И. Журов (2002).

А.3. Методы функционального разделения переменных

А.3.1. Структура решений с функциональным разделением переменных

А.3.1-1. Решения с функциональным разделением переменных.

Нелинейные уравнения, полученные заменой $w = F(z)$ из линейных уравнений математической физики с разделяющимися переменными для функции $z = z(x,y)$, будут иметь точные решения вида

$$w(x,y) = F(z), \quad \text{где} \quad z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x)\psi_m(y). \tag{1}$$

Многие нелинейные уравнения с частными производными, которые не сводятся к линейным, также имеют точные решения вида (1). Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных*. В общем случае функции $\varphi_m(x)$, $\psi_m(y)$, $F(z)$ в (1) заранее неизвестны и подлежат определению.

Основная идея: дифференциально-функциональное уравнение, полученное в результате подстановки выражения (1) в рассматриваемое уравнение с частными производными, надо привести к стандартному билинейному функциональному уравнению (3) из разд. А.2.1-2 [или к дифференциально-функциональному уравнению вида (3)–(4) из разд. А.2.1-2].

Замечание 1. При функциональном разделении переменных поиск решений простейшего вида $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ и $w = F(\varphi(x)\psi(y))$ приводит к одинаковым результатам, поскольку справедливо представление $F(\varphi(x)\psi(y)) = F_1(\varphi_1(x) + \psi_1(y))$, где $F_1(z) = F(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln\varphi(x)$, $\psi_1(y) = \ln\psi(y)$.

Замечание 2. При построении решений с функциональным разделением переменных вида $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ считается, что $\varphi \neq \mathrm{const}$ и $\psi \neq \mathrm{const}$.

А.3.1-2. Возможные модификации.

Ниже указаны три более общие модификации решения (1), которые можно использовать для построения точных решений нелинейных уравнений математической физики:

$$w(x,y) = F(z), \quad z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(\xi)\psi_m(\eta), \quad \xi = a_1x + a_2y, \quad \eta = b_1x + b_2y; \tag{2}$$

$$w(x,y) = \theta_1(x)F(z) + \theta_2(x), \qquad z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x)\psi_m(y); \tag{3}$$

$$w(x,y) = \theta_1(y)F(z) + \theta_2(y), \qquad z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x)\psi_m(y). \tag{4}$$

Решения вида (1)–(4) содержат в себе как частные случаи все наиболее распространенные решения: решения типа бегущей волны, автомодельные решения и решения в виде суммы или произведения двух функций разных аргументов (а также многие инвариантные решения). В общем случае функции $\varphi_m(\xi), \psi_m(\eta), \varphi_m(x), \psi_m(y), F(z), \theta_m(x), \theta_m(y)$ заранее неизвестны и должны определяться в процессе решения.

Замечание. В работе J. Miller, L. A. Rubel (1993) рассматривались точные решения с функциональным разделением переменных иного вида (для стационарного уравнения теплопроводности с нелинейным источником). См. также работу P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989), где описан метод построения обобщенных автомодельных решений.

А.3.2. Решения с функциональным разделением переменных частного вида

А.3.2-1. Решения со сложным аргументом линейным по одной переменной.

Для упрощения анализа некоторые функции в (1) можно задавать априорно, а другие определять в процессе решения. Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных частного вида.*

Ниже указаны наиболее простые решения с функциональным разделением переменных частного вида (x и y можно поменять местами):

$w = F(z), \quad z = \psi_1(y)x + \psi_2(y)$ (аргумент z линеен по x);

$w = F(z), \quad z = \psi_1(y)x^2 + \psi_2(y)$ (аргумент z квадратичен по x);

$w = F(z), \quad z = \psi_1(y)e^{\lambda x} + \psi_2(y)$ (аргумент z содержит экспоненциальную функцию x).

В последней формуле вместо $e^{\lambda x}$ могут стоять также функции $\operatorname{ch}(ax+b), \operatorname{sh}(ax+b), \sin(ax+b)$.

После подстановки любого из указанных выражений в рассматриваемое уравнение надо исключить x с помощью выражения для z. В результате получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами y и z. Его решение в ряде случаев можно получить с помощью методов, описанных в разд. А.2.

Замечание. Решение с обобщенным разделением переменных (см. разд. А.2.1) является решением с функциональным разделением переменных частного вида, соответствующим случаю $F(z) = z$.

Рассмотрим примеры нелинейных уравнений, допускающих точные решения с функциональным разделением переменных частного вида, когда сложный аргумент z линеен или квадратичен по одной из независимых переменных.

Пример 1. Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathcal{F}(w). \tag{5}$$

Ищем точные решения уравнения (5) с функциональным разделением переменных частного вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t). \tag{6}$$

Требуется найти функции $w(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и правую часть уравнения $\mathcal{F}(w)$.

Подставив выражение (6) в (5) и поделив на w'_z, имеем

$$\varphi'_t x + \psi'_t = \varphi^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}. \tag{7}$$

Выразим в (6) x через z и подставим его в (7). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя переменными t и z:

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t - \frac{\varphi'_t}{\varphi}z + \varphi^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z} = 0,$$

которое можно рассматривать как функциональное уравнение (33) из разд. А.2, где

$$\Phi_1 = -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t, \quad \Phi_2 = -\frac{\varphi'_t}{\varphi}, \quad \Phi_3 = \varphi^2, \qquad \Phi_4 = 1,$$
$$\Psi_1 = 1, \qquad\qquad \Psi_2 = z, \qquad \Psi_3 = \frac{w''_{zz}}{w'_z}, \quad \Psi_4 = \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (34) из разд. А.2, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t = A_1\varphi^2 + A_2, \quad -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3\varphi^2 + A_4, \\ \frac{w''_{zz}}{w'_z} = -A_1 - A_3 z, \quad \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z} = -A_2 - A_4 z, \end{gathered} \tag{8}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Решение системы (8) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \pm\Big(C_1 e^{-2A_4 t} - \frac{A_3}{A_4}\Big)^{-1/2}, \\ \psi(t) &= -\varphi(t)\Big[A_1\int\varphi(t)\,dt + A_2\int\frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\Big], \\ w(z) &= C_3\int\exp\big(-\tfrac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\big)\,dz + C_4, \\ \mathcal{F}(w) &= -C_3(A_4 z + A_2)\exp\big(-\tfrac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\big), \end{aligned} \tag{9}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Зависимость $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w)$ задается двумя последними выражениями в параметрическом виде (z играет роль параметра).

В частном случае $A_3 = C_4 = 0$, $A_1 = -1$, $C_3 = 1$ правую часть уравнения можно записать в явном виде

$$\mathcal{F}(w) = -w(A_4 \ln w + A_2). \tag{10}$$

Решение соответствующего уравнения (5), (10) с помощью группового анализа получил В. А. Дородницын (1982).

При $A_3 \neq 0$ в (9) правая часть уравнения (5) выражается через элементарные функции и функцию обратную интегралу вероятностей.

Пример 2. Рассмотрим более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(t)\frac{\partial w}{\partial x} + c(t)\mathcal{F}(w),$$

содержащее произвольные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$. Решения ищем в виде (6). В этом случае в системе (8) изменятся только первые два уравнения, а функции $w(z)$ и $\mathcal{F}(w)$ будут описываться двумя последними формулами (9).

Пример 3. Нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\mathcal{G}(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + \mathcal{F}(w)$$

также имеет решения вида (6). Искомые величины описываются системой (8), в которой w''_{zz} надо заменить на $[\mathcal{G}(w)w'_z]'_z$. Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в (6) определяются двумя первыми формулами (9). Одна из двух функций $\mathcal{G}(w)$ или $\mathcal{F}(w)$ может быть задана произвольно, а другая находится в процессе решения. В частном случае $\mathcal{F}(w) = \mathrm{const}$ можно получить $\mathcal{G}(w) = C_1 e^{2kw} + (C_2 w + C_3)e^{kw}$.

Пример 4. Аналогичным образом рассматривается нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(t)\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + \mathcal{F}(w),$$

где $a(t)$ — произвольная функция. Как и ранее решения ищутся в виде (6). В этом случае в системе (8) величины φ^2 и w''_{zz} надо соответственно заменить на $a(t)\varphi^n$ и $w_z^{(n)}$. В частности, при $A_3 = 0$ помимо уравнения с логарифмической нелинейностью вида (10) получим и другие уравнения.

Пример 5. Для нелинейного уравнения n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{F}(w)\frac{\partial^n w}{\partial x^n} + \mathcal{G}(w)\frac{\partial w}{\partial x}$$

поиск точного решения вида (6) приводит к следующей системе уравнений для определения функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $w(z)$, $\mathcal{F}(w)$, $\mathcal{G}(w)$ (одна из двух последних функций может быть задана произвольно):

$$-\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' = A_1\varphi^n + A_2\varphi, \quad -\frac{\varphi_t'}{\varphi} = A_3\varphi^n + A_4\varphi,$$

$$\mathcal{F}(w)\frac{w_z^{(n)}}{w_z'} = -A_1 - A_3 z, \quad \mathcal{G}(w) = -A_2 - A_4 z,$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

При $n = 3$ и $\mathcal{F}(w) = 1$, положив $A_3 = 0$ и $A_1 > 0$, в частности можно получить $\mathcal{G}(w) = -A_2 - A_4 \arcsin(kw)$. Отметим, что другие точные решения рассматриваемого уравнения при $n = 3$ и $\mathcal{F}(w)$ были указаны в работе V. A. Galaktionov (1999).

Пример 6. Можно искать решения уравнения (5) с квадратичной зависимостью сложного аргумента по x:

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x^2 + \psi(t). \tag{11}$$

Подставим это выражение в (5). В результате приходим к уравнению, которое содержит члены с x^2 (и не содержит членов, линейных по x). Исключив из полученного уравнения x^2 с помощью (11), имеем

$$-\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' + 2\varphi - \frac{\varphi_t'}{\varphi}z + 4\varphi z\frac{w_{zz}''}{w_z'} - 4\varphi\psi\frac{w_{zz}''}{w_z'} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w_z'} = 0.$$

Для решения этого функционально-дифференциального уравнения с двумя аргументами применим метод расщепления, описанный в разд. А.2.3. Можно показать, что уравнение (5) с логарифмической нелинейностью (10) имеет решение вида (11).

Пример 7. Рассмотрим нелинейное уравнение m-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^{n-1}\frac{\partial^m w}{\partial y^m},$$

которое в частном случае $f(x) = \text{const}$, $m = 3$ описывает пограничный слой степенной жидкости на плоской пластине (w — функция тока, x и y — продольная и поперечная координаты, n — реологический параметр; значение $n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости). Поиск точного решения вида

$$w = w(z), \qquad z = \varphi(x)y + \psi(x),$$

приводит к равенству $\varphi_x'(w_z')^2 = f(x)\varphi^{2n+m-3}(w_{zz}'')^{n-1}w_z^{(m)}$, которое не зависит от функции ψ. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\varphi(x) = \Big[\int f(x)\,dx + C\Big]^{\frac{1}{4-2n-m}}, \quad \psi(x) \text{ — произвольна},$$

а функция $w = w(z)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения $(w_z')^2 = (4 - 2n - m)(w_{zz}'')^{n-1}w_z^{(m)}$.

◉ *Литература к разд. А.3.2-1*: A. D. Polyanin (2001), А. Д. Полянин, А. И. Журов (2002).

А.3.2-2. Некоторые обобщения. Решения уравнения осесимметричного пограничного слоя.

Уравнения с квадратичной и степенной нелинейностью могут иметь точные решения с функциональным разделением переменных вида (3) и (4). В простейшем случае сложный аргумент z можно выбирать линейным по одной из независимых переменных.

Пример 8. Рассмотрим уравнение осесимметричного стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя (см. уравнение 9.2.1.3)

$$\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \nu\frac{\partial}{\partial z}\Big(z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) + f(x). \tag{12}$$

Решение ищем в виде

$$w(x,z) = \nu\big[\alpha(x) + \beta(x)\varphi(\xi)\big], \quad \xi = \frac{z}{\gamma(x)} + q(x). \tag{13}$$

Подставив это выражение в уравнение (12), приходим к функционально-дифференциальному уравнению вида (2)–(3) (при $k = 6$) из разд. А.2.1-2:

$$(\beta\gamma_x' - \beta_x'\gamma)(\varphi_\xi')^2 + \alpha_x'\gamma\varphi_{\xi\xi}'' + \beta_x'\gamma\varphi\varphi_{\xi\xi}'' + \nu^{-2}(\gamma^3 f/\beta) + \gamma(\xi\varphi_{\xi\xi}'')_\xi' - q\gamma\varphi_{\xi\xi\xi}''' = 0. \tag{14}$$

Используем упрощенную схему построения точных решений. Положим

$$\begin{aligned}\beta\gamma'_x - \beta'_x\gamma &= A_1\gamma + B_1 q\gamma,\\ \alpha'_x\gamma &= A_2\gamma + B_2 q\gamma,\\ \beta'_x\gamma &= A_3\gamma + B_3 q\gamma,\\ \nu^{-2}(\gamma^3 f/\beta) &= A_4\gamma + B_4 q\gamma,\end{aligned}\tag{15}$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные. Подставим выражения (15) в (14) и соберем члены при γ и $q\gamma$ (считаем, что $q \neq \text{const}$). Приравнивая множители при γ и $q\gamma$ нулю, получим

$$A_1(\varphi'_\xi)^2 + A_2\varphi''_{\xi\xi} + A_3\varphi\varphi''_{\xi\xi} + A_4 + (\xi\varphi''_{\xi\xi})'_\xi = 0,\tag{16}$$

$$B_1(\varphi'_\xi)^2 + B_2\varphi''_{\xi\xi} + B_3\varphi\varphi''_{\xi\xi} + B_4 - \varphi'''_{\xi\xi\xi} = 0.\tag{17}$$

Случай 1. Положим

$$A_1 = A_3 = A_4 = 0, \quad A_2 = -n.\tag{18}$$

В этом случае решение уравнения (16) имеет вид

$$\varphi(\xi) = \frac{C_1}{n(n+1)}\xi^{n+1} + C_2\xi + C_3,\tag{19}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования. Решение (19) уравнения (16) является одновременно и решением уравнения (17) только при выполнении условий

$$n = -2, \quad B_1 = B_3, \quad C_1 = -4/B_1, \quad C_2^2 = -B_4/B_1, \quad C_3 = -B_2/B_1.\tag{20}$$

Подставим коэффициенты (18), (20) в систему (15). Интегрируя, получим

$$\alpha(x) = 2x - C_3\beta, \quad \gamma = \frac{\beta^2}{C_4}, \quad q = -\frac{C_1}{4}\beta'_x, \quad f = -(\nu C_2 C_4)^2\frac{\beta'_x}{\beta^3},\tag{21}$$

где $\beta = \beta(x)$ — произвольная функция.

Формулы (13), (19), (21) дают точное решение уравнения осесимметричного пограничного слоя (12).

Случай 2. При

$$B_1 = B_3 = B_4 = 0, \quad B_2 = -\lambda, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -A_1, \quad A_4 = -\lambda^2/A_1\tag{22}$$

совместное решение системы (16), (17) имеет вид

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{A_1}(Ce^{-\lambda\xi} + \lambda\xi - 3).\tag{23}$$

Решение системы (15) с коэффициентами (22) описывается формулами

$$\beta = -A_1x + K_1, \quad \gamma = K_2, \quad q = -\frac{1}{\lambda}\alpha'_x, \quad f = \frac{(\nu\lambda)^2}{A_1K_2^2}(A_1x - K_1),\tag{24}$$

где K_1, K_2 — произвольные постоянные, $\alpha = \alpha(x)$ — произвольная функция.

Формулы (13), (23), (24) дают точное решение уравнения слоя (12).

⊙ *Литература:* G. I. Burde (1994).

А.3.2-3. Решение путем сведения к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

В ряде случаев поиск решения в виде (1) удается провести в два этапа. Сначала ищется преобразование, сводящее исходное уравнение к уравнению с квадратичной (иногда степенной) нелинейностью. Затем решение полученного уравнения ищется методами, описанными в разд. А.2.

Уравнения с квадратичной нелинейностью иногда удается получить с помощью подстановок

$w(z) = z^\lambda$ (для уравнений со степенной нелинейностью),

$w(z) = \lambda \ln z$ (для уравнений с экспоненциальной нелинейностью),

$w(z) = e^{\lambda z}$ (для уравнений с логарифмической нелинейностью),

где λ — постоянная, подлежащая определению. Указанный подход эквивалентен априорному заданию вида функции $F(z)$ в выражении (1).

В работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1989, 1994), V. A. Galaktionov (1995) описано много нелинейных уравнений различного типа, сводящихся с помощью подходящих преобразований к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

Пример 9. Нелинейное уравнение теплопроводности с источником логарифмического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w\ln w + g(t)w$$

заменой $w = e^z$ сводится к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + f(t)z + g(t),$$

которое допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \psi_3(t),$$

где $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$, а функции $\psi_k(t)$ описываются соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

А.3.3. Метод дифференцирования

А.3.3-1. Основные идеи метода. Редукция к уравнению стандартного вида.

В общем случае подстановка выражения (1) в рассматриваемое нелинейное уравнение с частными производными приводит к функционально-дифференциальному уравнению с тремя аргументами (первые два аргумента x и y — обычные, а третий z — сложный). Во многих случаях полученное уравнение методом дифференцирования удается свести к функционально-дифференциальному уравнению стандартного вида с двумя аргументами (исключается переменная x или y). Для решения уравнения с двумя аргументами используются методы, описанные в разд. А.2.2 и А.2.3.

А.3.3-2. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных.

Рассмотрим конкретные примеры использования метода дифференцирования для построения точных решений нелинейных уравнений с функциональным разделением переменных.

Пример 10. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]. \tag{25}$$

Ищем точные решения вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{26}$$

Подставим (26) в (25). После деления на w'_z получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\psi'_t = \varphi''_{xx} f(w) + (\varphi'_x)^2 Q(z), \tag{27}$$

где

$$Q(z) = f(w)\frac{w''_{zz}}{w'_z} + f'_z(w), \qquad w = w(z). \tag{28}$$

Дифференцируя (27) по x, имеем

$$\varphi'''_{xxx} f(w) + \varphi'_x\varphi''_{xx}[f'_z(w) + 2Q(z)] + (\varphi'_x)^3 Q'_z = 0. \tag{29}$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными можно рассматривать как функциональное уравнение (31) из разд. А.2, которое имеет два различных решения. Поэтому надо рассмотреть два случая.

Случай 1. Решения функционально-дифференциального уравнения (29) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} f'_z + 2Q = 2A_1 f, \quad Q'_z = A_2 f, \\ \varphi'''_{xxx} + 2A_1\varphi'_x\varphi''_{xx} + A_2(\varphi'_x)^3 = 0, \end{gathered} \tag{30}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Первые два уравнения (30) линейны и не зависят от третьего уравнения. Их общее решение имеет вид

$$f = \begin{cases} e^{A_1 z}(B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz}) & \text{при } A_1^2 > 2A_2, \\ e^{A_1 z}(B_1 + B_2 z) & \text{при } A_1^2 = 2A_2, \\ e^{A_1 z}[B_1\sin(kz) + B_2\cos(kz)] & \text{при } A_1^2 < 2A_2, \end{cases} \quad Q = A_1 f - \tfrac{1}{2}f'_z, \quad k = \sqrt{|A_1^2 - 2A_2|}. \tag{31}$$

Подставим выражение для Q (31) в (28). Получим дифференциальное уравнение для определения функции $w = w(z)$. В результате интегрирования имеем

$$w = C_1 \int e^{A_1 z} |f(z)|^{-3/2} dz + C_2, \tag{32}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Выражение (31) для f вместе с выражением (32) задают зависимость $f = f(w)$ в параметрической форме.

Рассмотрим подробнее случай $A_2 = 0$, $A_1 \neq 0$. Из формул (31) и (32) получим

$$f(z) = B_1 e^{2A_1 z} + B_2, \quad Q = A_1 B_2, \quad w(z) = C_3 (B_1 + B_2 e^{-2A_1 z})^{-1/2} + C_2 \quad (C_1 = A_1 B_2 C_3). \tag{33}$$

Исключая z, имеем

$$f(w) = \frac{B_2 C_3^2}{C_3^2 - B_1 w^2}. \tag{34}$$

Первый интеграл последнего уравнения (30) при $A_2 = 0$ имеет вид $\varphi''_{xx} + A_1 (\varphi'_x)^2 = \text{const}$, а его общее решение описывается формулами

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1} \ln\left[\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(A_1 \sqrt{D_2}\, x + D_3\right)}\right] && \text{при} \quad D_1 > 0, \quad D_2 > 0;\\
&\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1} \ln\left[-\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\cos^2\left(A_1 \sqrt{-D_2}\, x + D_3\right)}\right] && \text{при} \quad D_1 > 0, \quad D_2 < 0;\\
&\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1} \ln\left[-\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(A_1 \sqrt{D_2}\, x + D_3\right)}\right] && \text{при} \quad D_1 < 0, \quad D_2 > 0;
\end{aligned} \tag{35}$$

где D_1, D_2, D_3 — постоянные интегрирования. Во всех трех случаях выполняются соотношения

$$(\varphi'_x)^2 = D_1 e^{-2A_1 \varphi} + D_2, \qquad \varphi''_{xx} = -A_1 D_1 e^{-2A_1 \varphi}. \tag{36}$$

Подставим выражения (33) и (36) в исходное функционально-дифференциальное уравнение (27). Учитывая вид переменной z (26), получим уравнение для функции $\psi = \psi(t)$:

$$\psi'_t = -A_1 B_1 D_1 e^{2A_1 \psi} + A_1 B_2 D_2.$$

Интегрируя, находим решение

$$\psi(t) = \frac{1}{2A_1} \ln \frac{B_2 D_2}{D_4 \exp(-2A_1^2 B_2 D_2 t) + B_1 D_1}, \tag{37}$$

где D_4 — произвольная постоянная.

Формулы (26), (33) (для w), (35), (37) определяют три решения нелинейного уравнения (25) с функцией $f(w)$ вида (34) [напомним, что эти решения соответствуют частному случаю $A_2 = 0$ в (31) и (32)].

Случай 2. Решения функционально-дифференциального уравнения (29) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\varphi'''_{xxx} = A_1 (\varphi'_x)^3, \qquad \varphi'_x \varphi''_{xx} = A_2 (\varphi'_x)^3,\\
A_1 f + A_2 (f'_z + 2Q) + Q'_z = 0.
\end{gathered} \tag{38}$$

Первые два уравнения (38) совместны в двух случаях:

$$\begin{aligned}
&A_1 = A_2 = 0 && \Longrightarrow \quad \varphi(x) = B_1 x + B_2,\\
&A_1 = 2A_2^2 && \Longrightarrow \quad \varphi(x) = -\frac{1}{A_2} \ln|B_1 x + B_2|.
\end{aligned} \tag{39}$$

Первое решение в (39) в конечном итоге приводит к решению уравнения (25) типа бегущей волны $w = w(B_1 x + B_2 t)$, а второе решение (39) — к автомодельному решению вида $w = \widetilde{w}(x^2/t)$. В этих случаях функция $f(w)$ в уравнении (25) произвольна.

⊙ *Литература*: P. W. Doyle, P. J. Vassiliou (1998), A. D. Polyanin (2001).

Пример 11. Можно искать более сложные решения уравнения (25) с функциональным разделением вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(\xi) + \psi(t), \quad \xi = x + at \qquad (a = \text{const}).$$

Подставим эти выражения в (25). Поделим полученное функционально-дифференциальное уравнение на w'_z, а затем продифференцируем по x. В результате имеем

$$-a\varphi''_{\xi\xi} + \varphi'''_{\xi\xi\xi} f(w) + \varphi'_\xi \varphi''_{\xi\xi} [f'_z(w) + 2Q(z)] + (\varphi'_\xi)^3 Q'_z = 0,$$

где функция $Q = Q(z)$ определяется по формуле (28). Полученное функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными ξ и z можно рассматривать как функциональное уравнение (33) из разд. А.2. Его решение строится по формулам (34) из разд. А.2 и позволяет записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $f = f(w)$, $w = w(z)$, $\varphi = \varphi(\xi)$.

Пример 12. Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{F}(w). \tag{40}$$

Ищем точные решения уравнения (40) в виде

$$w = w(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{41}$$

Подставив выражение (41) в (40), получим

$$\psi''_{tt} - \varphi''_{xx} + \left[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\right] g(z) = h(z), \tag{42}$$

где

$$g(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad h(z) = \mathcal{F}\big(w(z)\big)/w'_z. \tag{43}$$

Продифференцировав уравнение (42) сначала по t, а затем по x, и разделив на $\psi'_t\varphi'_x$, имеем

$$2(\psi''_{tt} - \varphi''_{xx})\, g'_z + \left[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\right] g''_{zz} = h''_{zz}.$$

Исключая $\psi''_{tt} - \varphi''_{xx}$ из этого уравнения с помощью (43), получим

$$\left[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\right](g''_{zz} - 2gg'_z) = h''_{zz} - 2g'_z h. \tag{44}$$

Это равенство может выполняться только в двух случаях:

$$\begin{aligned} &g''_{zz} - 2gg'_z = 0, \quad h''_{zz} - 2g'_z h = 0 && \text{(случай 1)},\\ &\begin{cases} (\psi'_t)^2 = A\psi + B, \quad (\varphi'_x)^2 = -A\varphi + B - C, \\ h''_{zz} - 2g'_z h = (Az + C)(g''_{zz} - 2gg'_z), \end{cases} && \text{(случай 2)}, \end{aligned} \tag{45}$$

где A, B, C — произвольные постоянные. Рассмотрим эти случаи по порядку.

Случай 1. Первые два уравнения (45) позволяет найти $g(z)$ и $h(z)$. Интегрируя, из первого уравнения имеем $g'_z = g^2 + \text{const}$. Интегрируя далее, получим

$$g = k, \tag{33a}$$
$$g = -1/(z + C_1), \tag{33b}$$
$$g = -k\,\text{th}(kz + C_1), \tag{33c}$$
$$g = -k\,\text{cth}(kz + C_1), \tag{33d}$$
$$g = k\,\text{tg}(kz + C_1), \tag{33e}$$

где C_1 и k — произвольные постоянные.

Второе уравнение (45) имеет частное решение $h = g(z)$. Поэтому его общее решение определяется по формуле (В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001)

$$h = C_2 g(z) + C_3 g(z) \int \frac{dz}{g^2(z)}, \tag{47}$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Из соотношений (43) определяются функции $w(z)$ и $\mathcal{F}(w)$ в виде

$$w(z) = B_1 \int G(z)\, dz + B_2, \quad \mathcal{F}(w) = B_1 h(z) G(z), \quad \text{где} \quad G(z) = \exp\left[\int g(z)\, dz\right], \tag{48}$$

B_1 и B_2 — произвольные постоянные (функция $\mathcal{F}$ задана в параметрической форме).

Исследуем подробнее случай (33b). Согласно (47) находим

$$h = A_1(z + C_1)^2 + \frac{A_2}{z + C_1}, \tag{49}$$

где $A_1 = -C_3/3$, $A_2 = -C_2$ — любые. Подставляя выражения (33b) и (49) в (48), получим

$$w = B_1 \ln|z + C_1| + B_2, \quad \mathcal{F} = A_1 B_1 (z + C_1) + \frac{A_2 B_1}{(z + C_1)^2}.$$

Исключая из этих соотношений z, находим явный вид правой части уравнения (40):

$$\mathcal{F}(w) = A_1 B_1 e^u + A_2 B_1 e^{-2u}, \quad \text{где} \quad u = \frac{w - B_2}{B_1}. \tag{50}$$

Для наглядности далее полагаем $C_1 = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 0$ и введем обозначения $A_1 = a$, $A_2 = b$. Таким образом, имеем

$$w(z) = \ln|z|, \quad \mathcal{F}(w) = A_1 B_1 e^w + A_2 B_1 e^{-2w}, \quad g(z) = -1/z, \quad h(z) = az^2 + b/z. \tag{51}$$

ТАБЛИЦА A1

Нелинейные уравнения $\partial_{tt}w - \partial_{xx}w = \mathcal{F}(w)$, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида $w = w(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(t)$. Обозначения: A, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\sigma = 1$ при $z > 0$, $\sigma = -1$ при $z < 0$

№	Правая часть уравнения $\mathcal{F}(w)$	Решение $w(z)$	Уравнения для $\psi(t)$ и $\varphi(x)$
1	$aw\ln w + bw$	e^z	$(\psi'_t)^2 = C_1e^{-2\psi} + a\psi - \frac{1}{2}a + b + A$, $(\varphi'_x)^2 = C_2e^{-2\varphi} - a\varphi + \frac{1}{2}a + A$
2	$ae^w + be^{-2w}$	$\ln\lvert z\rvert$	$(\psi'_t)^2 = 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2$, $(\varphi'_x)^2 = -2a\varphi^3 + A\varphi^2 - C_1\varphi + C_2 + b$
3	$a\sin w + b\Bigl(\sin w \ln \operatorname{tg}\dfrac{w}{4} + 2\sin\dfrac{w}{4}\Bigr)$	$4\operatorname{arctg} e^z$	$(\psi'_t)^2 = C_1e^{2\psi} + C_2e^{-2\psi} + b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = -C_2e^{2\varphi} - C_1e^{-2\varphi} - b\varphi + A$
4	$a\operatorname{sh} w + b\Bigl(\operatorname{sh} w \ln \operatorname{th}\dfrac{w}{4} + 2\operatorname{sh}\dfrac{w}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{cth}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\psi'_t)^2 = C_1e^{2\psi} + C_2e^{-2\psi} - \sigma b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = C_2e^{2\varphi} + C_1e^{-2\varphi} + \sigma b\varphi + A$
5	$a\operatorname{sh} w + 2b\Bigl(\operatorname{sh} w \operatorname{arctg} e^{w/2} + \operatorname{ch}\dfrac{w}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\psi'_t)^2 = C_1\sin 2\psi + C_2\cos 2\psi + \sigma b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = -C_1\sin 2\varphi + C_2\cos 2\varphi - \sigma b\varphi + A$

Осталось определить функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$. Подставим выражения (51) в функционально-дифференциальное уравнение (42). Учитывая зависимость (41), после элементарных преобразований получим*

$$[\psi''_{tt}\psi - (\psi'_t)^2 - a\psi^3 - b] - [\varphi''_{xx}\varphi - (\varphi'_x)^2 + a\varphi^3] + (\psi''_{tt} - 3a\psi^2)\varphi - \psi(\varphi''_{xx} + 3a\varphi^2) = 0. \qquad (52)$$

Дифференцируя (52) по t и x, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$(\psi'''_{ttt} - 6a\psi\psi'_t)\varphi'_x - (\varphi'''_{xxx} + 6a\varphi\varphi'_x)\psi'_t = 0,$$

решение которого описывается автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\psi'''_{ttt} - 6a\psi\psi'_t = A\psi'_t,$$
$$\varphi'''_{xxx} + 6a\varphi\varphi'_x = A\varphi'_x,$$

где A — константа разделения. Каждое из этих уравнений можно два раза проинтегрировать:

$$(\psi'_t)^2 = 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = -2a\varphi^3 + A\varphi^2 + C_3\varphi + C_4, \qquad (53)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Исключая с помощью (53) производные из уравнения (52), находим связи между константами: $C_3 = -C_1$, $C_4 = C_2 + b$. Таким образом, функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$ описываются автономными уравнениями первого порядка с кубической нелинейностью

$$(\psi'_t)^2 = 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = -2a\varphi^3 + A\varphi^2 - C_1\varphi + C_2 + b.$$

Решения этих уравнений выражаются через эллиптические функции.

Для остальных случаев (46) исследование проводится аналогичным образом. Результаты анализа для случаев (33a)–(33e) сведены в итоговой табл. A1.

Случай 2. Интегрируя первые два уравнения (45) (для второго случая) имеем два решения:

$$\psi = \pm\sqrt{B}\,t + D_1, \qquad \varphi = \pm\sqrt{B - C}\,t + D_2 \qquad \text{при} \quad A = 0;$$
$$\psi = \frac{1}{4A}(At + D_1)^2 - \frac{B}{A}, \quad \varphi = -\frac{1}{4A}(Ax + D_2)^2 + \frac{B - C}{A} \quad \text{при} \quad A \neq 0; \qquad (54)$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные. В обоих случаях функция $\mathcal{F}(w)$ в уравнении (40) является произвольной. Первое решение (54) соответствует решению типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$, а второе приводит к решению вида $w = w(x^2 - t^2)$.

Замечание. В случае 2 уравнение (44) можно представить в виде функционального уравнения, рассматриваемого в разд. A.3.5-1.

---

* Для решения уравнения (52) проще всего использовать результаты решения функционального уравнения (33) из разд. A.2 [см. формулу (34)].

ТАБЛИЦА А2

Нелинейные уравнения $\partial_{xx}w + \partial_{yy}w = \mathcal{F}(w)$, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида $w = w(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

Обозначения: A, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\sigma = 1$ при $z > 0$, $\sigma = -1$ при $z < 0$

№	Правая часть уравнения $\Phi(w)$	Решение $w(z)$	Уравнения для $\varphi(x)$ и $\psi(y)$
1	$aw\ln w + bw$	e^z	$(\varphi'_x)^2 = C_1e^{-2\varphi} + a\varphi - \frac{1}{2}a + b + A$, $(\psi'_y)^2 = C_2e^{-2\psi} + a\psi - \frac{1}{2}a - A$
2	$ae^w + be^{-2w}$	$\ln\lvert z\rvert$	$(\varphi'_x)^2 = 2a\varphi^3 + A\varphi^2 + C_1\varphi + C_2$, $(\psi'_y)^2 = 2a\psi^3 - A\psi^2 + C_1\psi - C_2 - b$
3	$a\sin w + b\left(\sin w \ln \operatorname{tg}\frac{w}{4} + 2\sin\frac{w}{4}\right)$	$4\operatorname{arctg} e^z$	$(\varphi'_x)^2 = C_1e^{2\varphi} + C_2e^{-2\varphi} + b\varphi + a + A$, $(\psi'_y)^2 = C_2e^{2\psi} + C_1e^{-2\psi} + b\psi - A$
4	$a\operatorname{sh} w + b\left(\operatorname{sh} w \ln \operatorname{th}\frac{w}{4} + 2\operatorname{sh}\frac{w}{2}\right)$	$2\ln\left\lvert\operatorname{cth}\frac{z}{2}\right\rvert$	$(\varphi'_x)^2 = C_1e^{2\varphi} + C_2e^{-2\varphi} - \sigma b\varphi + a + A$, $(\psi'_y)^2 = -C_2e^{2\psi} - C_1e^{-2\psi} - \sigma b\psi - A$
5	$a\operatorname{sh} w + 2b\left(\operatorname{sh} w \operatorname{arctg} e^{w/2} + \operatorname{ch}\frac{w}{2}\right)$	$2\ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right\rvert$	$(\varphi'_x)^2 = C_1\sin 2\varphi + C_2\cos 2\varphi + \sigma b\varphi + a + A$, $(\psi'_y)^2 = C_1\sin 2\psi - C_2\cos 2\psi + \sigma b\psi - A$

⊙ *Литература*: A. M. Grundland, E. Infeld (1992), J. Miller (Jr.), L. A. Rubel (1993), R. Z. Zhdanov (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

Пример 13. Нелинейное уравнение теплопроводности (диффузии)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \mathcal{F}(w)$$

исследуется точно также, как и нелинейное уравнение Клейна — Гордона (см. пример 12). Основные результаты приведены в итоговой табл. А2 [опущено решение типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$ и решение вида $w = w(x^2 + y^2)$, которые имеются для любой $\mathcal{F}(w)$].

⊙ *Литература*: A. M. Grundland, E. Infeld (1992), J. Miller (Jr.), L. A. Rubel (1993), R. Z. Zhdanov (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

А.3.4. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению с двумя переменными

А.3.4-1. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению стандартного вида.

Общая процедура построения точных решений с функциональным разделением переменных, основанная на методе расщепления, состоит из нескольких этапов, кратко описанных ниже.

1°. Выражение (1) подставляется в рассматриваемое нелинейное уравнение с частными производными. В результате получается функционально-дифференциальное уравнение с тремя аргументами (первые два аргумента x и y — обычные, а третий z — сложный).

2°. Функционально-дифференциальное уравнение с помощью элементарных дифференциальных подстановок (основанных на выделении величин, содержащих искомые функции и их производные одного аргумента) сводится к чисто функциональному уравнению с тремя аргументами x, y, z.

3°. Функциональное уравнение с тремя аргументами методом дифференцирования сводится к функциональному уравнению стандартного вида с двумя аргументами (исключается переменная x или y), которое рассматривалось в разд. А.2.

4°. Строится решение функционального уравнения с двумя аргументами из п. 3° (используются формулы, приведенные в разд. А.2.3).

5°. Полученное в п. 4° решение вместе с использованными в п. 2° дифференциальными подстановками образует систему (обычно переопределенную) обыкновенных дифференциальных уравнений. Строится решение этой системы.

6°. Решение системы из п. 5° подставляется в исходное функционально-дифференциальное уравнение из п. 1°. В результате определяются связи между постоянными интегрирования и находятся все искомые величины.

7°. Отдельно рассматриваются возможные вырожденные случаи (возникающие при нарушении использованных при решении предположений).

Метод расщепления сводит решение функционально-дифференциального уравнения с тремя аргументами к решению чисто функционального уравнения с тремя аргументами (путем его сведения к стандартному функциональному уравнению с двумя аргументами) и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. исходная задача распадается на несколько более простых задач. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных методом расщепления рассмотрены в разд. А.3.5.

А.3.4-2. Функциональные уравнения с тремя аргументами специального вида.

Подстаиовка выражения (1) при $n = 2$ в нелинейные уравнения с частными производными во многих случаях приводит к функционально-дифференциальным уравнениям вида

$$\begin{gathered}\Phi_1(x)\Psi_1(y,z)+\Phi_2(x)\Psi_2(y,z)+\cdots+\Phi_k(x)\Psi_k(y,z)\\ +\Psi_{k+1}(y,z)+\Psi_{k+2}(y,z)+\cdots+\Psi_n(y,z)=0,\end{gathered}\tag{55}$$

где функционалы $\Phi_j(x)$ и $\Psi_j(y,z)$ зависят соответственно от переменных x и y, z:

$$\Phi_j(x)\equiv\Phi_j\bigl(x,\varphi,\varphi'_x,\varphi''_{xx}\bigr),\qquad \Psi_j(y,z)\equiv\Psi_j\bigl(y,\psi,\psi'_y,\psi''_{yy},F,F'_z,F''_{zz}\bigr).\tag{56}$$

(Данные выражения соответствуют уравнению второго порядка).

Решение уравнения (55) целесообразно искать методом расщепления. На первом этапе будем рассматривать (55) как чисто функциональное уравнение, без учета зависимостей (56). Предположим, что $\Psi_1\not\equiv 0$. Поделим уравнение (55) на Ψ_1 и продифференцируем по y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов, содержащих функции Φ_m:

$$\Phi_2(x)\Psi_2^{(2)}(y,z)+\cdots+\Phi_k(x)\Psi_k^{(2)}(y,z)+\Psi_{k+1}^{(2)}(y,z)+\cdots+\Psi_n^{(2)}(y,z)=0,\tag{57}$$

где $\Psi_m^{(2)}=\dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(\dfrac{\Psi_m}{\Psi_1}\Bigr)+\psi'_y\dfrac{\partial}{\partial z}\Bigl(\dfrac{\Psi_m}{\Psi_1}\Bigr)$. Продолжая аналогичную процедуру в итоге можно получить уравнение, не зависящее явно от x:

$$\Psi_{k+1}^{(k+1)}(y,z)+\cdots+\Psi_n^{(k+1)}(y,z)=0,\tag{58}$$

где $\Psi_m^{(k+1)}=\dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(\dfrac{\Psi_m^{(k)}}{\Psi_k^{(k)}}\Bigr)+\psi'_y\dfrac{\partial}{\partial z}\Bigl(\dfrac{\Psi_m^{(k)}}{\Psi_k^{(k)}}\Bigr)$.

Уравнение (58) можно рассматривать как уравнение с двумя независимыми переменными y и z. Если $\Psi_m^{(k+1)}(y,z)=Q_m(y)R_m(z)$ для всех $m=k+1,\ldots,n$, то для решения уравнения (58) можно использовать результаты разд. А.2.

⦿ *Литература к разд. А.3.4*: A. D. Polyanin (2001).

А.3.5. Некоторые функциональные уравнения и их решения. Точные решения нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн

В этом разделе исследуются несколько функциональных уравнений с тремя аргументами, которые наиболее часто встречаются при функциональном разделении переменных в нелинейных уравнениях математической физики. Эти результаты использованы для построения точных решений некоторых классов нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн.

А.3.5-1. Функциональное уравнение $f(x)+g(y)=Q(z)$, где $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

Здесь одна из двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ задается, а другая ищется; одна из двух функций $g(y)$ и $\psi(y)$ задается, а другая ищется; функция $Q(z)$ ищется.*

* В подобных уравнениях со сложным аргументом считается, что $\varphi(x)\neq\text{const}$ и $\psi(y)\neq\text{const}$.

Дифференцируя уравнение по x и по y, получим $Q''_{zz} = 0$. Поэтому его решение имеет вид

$$f(x) = A\varphi(x) + B, \quad g(y) = A\psi(y) - B + C, \quad Q(z) = Az + C, \tag{59}$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

А.3.5-2. Функциональное уравнение $f(t)+g(x)+h(x)Q(z)+R(z) = 0$, где $z = \varphi(x)+\psi(t)$.

Дифференцируя уравнение по x, приходим к уравнению с двумя независимыми аргументами

$$g'_x + h'_x Q + h\varphi'_x Q'_z + \varphi'_x R'_z = 0. \tag{60}$$

Такие уравнения рассматривались в разд. А.2. Поэтому имеют место соотношения [их можно получить после переобозначений из формул (33) и (34), приведенных в разд. А.2]:

$$\begin{aligned} g'_x &= A_1 h\varphi'_x + A_2\varphi'_x, \\ h'_x &= A_3 h\varphi'_x + A_4\varphi'_x, \\ Q'_z &= -A_1 - A_3 Q, \\ R'_z &= -A_2 - A_4 Q, \end{aligned} \tag{61}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные. Интегрирование системы (61) и подстановка полученных решений в исходное функциональное уравнение дает приведенные ниже результаты.

Случай 1. Решение функционального уравнения, соответствующее значению $A_3 = 0$ в (61):

$$\begin{aligned} f &= -\tfrac{1}{2}A_1A_4\psi^2 + (A_1B_1 + A_2 + A_4B_3)\psi - B_2 - B_1B_3 - B_4, \\ g &= \tfrac{1}{2}A_1A_4\varphi^2 + (A_1B_1 + A_2)\varphi + B_2, \\ h &= A_4\varphi + B_1, \\ Q &= -A_1 z + B_3, \\ R &= \tfrac{1}{2}A_1A_4 z^2 - (A_2 + A_4B_3)z + B_4, \end{aligned} \tag{62}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, A_k, B_k — произвольные постоянные.

Случай 2. Решение функционального уравнения, соответствующее значению $A_3 \neq 0$ в (61):

$$\begin{aligned} f &= -B_1B_3 e^{-A_3\psi} + \Big(A_2 - \frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\psi - B_2 - B_4 - \frac{A_1A_4}{A_3^2}, \\ g &= \frac{A_1B_1}{A_3}e^{A_3\varphi} + \Big(A_2 - \frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\varphi + B_2, \\ h &= B_1 e^{A_3\varphi} - \frac{A_4}{A_3}, \\ Q &= B_3 e^{-A_3 z} - \frac{A_1}{A_3}, \\ R &= \frac{A_4B_3}{A_3}e^{-A_3 z} + \Big(\frac{A_1A_4}{A_3} - A_2\Big)z + B_4, \end{aligned} \tag{63}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, A_k, B_k — произвольные постоянные.

Случай 3. Функциональное уравнение имеет также вырожденное решение

$$f = A_1\psi + B_1, \quad g = A_1\varphi + B_2, \quad h = A_2, \quad R = -A_1 z - A_2 Q - B_1 - B_2, \tag{51a}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $Q = Q(z)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные; и вырожденное решение

$$f = A_1\psi + B_1, \quad g = A_1\varphi + A_2 h + B_2, \quad Q = -A_2, \quad R = -A_1 z - B_1 - B_2, \tag{51b}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $h = h(x)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Вырожденные решения (51a) и (51b) можно получить из исходного уравнения и его следствия (60) с помощью формул (35) из разд. А.2.

Пример 14. Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathcal{F}(w). \tag{65}$$

Ищем точные решения вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{66}$$

Подставим (66) в (65). После деления на w'_z получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\psi'_t = \varphi''_{xx} + (\varphi'_x)^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w(z))}{w'_z}.$$

Представим его в виде функционального уравнения A.3.5-2, где

$$f(t) = -\psi'_t, \quad g(x) = \varphi''_{xx}, \quad h(x) = (\varphi'_x)^2, \quad Q(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad R(z) = f(w(z))/w'_z. \tag{67}$$

Используем решения уравнения A.3.5-2. Подставив выражения (67) для g и h в (62)–(64), получим переопределенные системы уравнений для определения функции $\varphi = \varphi(x)$.

Случай 1. Система

$$\varphi''_{xx} = \tfrac{1}{2} A_1 A_4 \varphi^2 + (A_1 B_1 + A_2)\varphi + B_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = A_4 \varphi + B_1,$$

полученная из (62) и соответствующая значению $A_3 = 0$ в (61), имеет совместное решение в следующих случаях:

$$\begin{aligned} &\varphi = C_1 x + C_2 && \text{при} \quad A_2 = -A_1 C_1^2,\ A_4 = B_2 = 0,\ B_1 = C_1^2, \\ &\varphi = \tfrac{1}{4} A_4 x^2 + C_1 x + C_2 && \text{при} \quad A_1 = A_2 = 0,\ B_1 = C_1^2 - A_4 C_2,\ B_2 = \tfrac{1}{2} A_4, \end{aligned} \tag{68}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Первое решение (68) при $A_1 \neq 0$ соответствует правой части уравнения (65), которая содержит функцию обратную к интегралу вероятностей [вид правой части определяется из двух последних соотношений (62) и (67) для Q и R]. Второе решение (68) соответствует правой части уравнения (65) вида $\mathcal{F}(w) = k_1 w \ln w + k_2 w$. В обоих случаях первое соотношение (62) с учетом равенства $f = -\psi'_t$ представляет собой линейное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, решением которого является сумма экспоненциальной функции и константы.

Случай 2. Система

$$\varphi''_{xx} = \frac{A_1 B_1}{A_3} e^{A_3 \varphi} + \Big(A_2 - \frac{A_1 A_4}{A_3}\Big)\varphi + B_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = B_1 e^{A_3 \varphi} - \frac{A_4}{A_3},$$

полученная из (63) и соответствующая $A_3 \neq 0$ в (61), имеет совместное решение в следующих случаях:

$$\begin{aligned} &\varphi = \pm\sqrt{-A_4/A_3}\, x + C_1 && \text{при} \quad A_2 = A_1 A_4/A_3,\ B_1 = B_2 = 0, \\ &\varphi = -\frac{2}{A_3} \ln|x| + C_1 && \text{при} \quad A_1 = \tfrac{1}{2} A_3^2,\ A_2 = A_4 = B_2 = 0,\ B_1 = 4A_3^{-2} e^{-A_3 C_1}, \\ &\varphi = -\frac{2}{A_3} \ln\big|\cos\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{A_3 A_4}\, x + C_1\big)\big| + C_2 && \text{при} \quad A_1 = \tfrac{1}{2} A_3^2,\ A_2 = \tfrac{1}{2} A_3 A_4,\ B_2 = 0,\ A_3 A_4 > 0, \\ &\varphi = -\frac{2}{A_3} \ln\big|\operatorname{sh}\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{-A_3 A_4}\, x + C_1\big)\big| + C_2 && \text{при} \quad A_1 = \tfrac{1}{2} A_3^2,\ A_2 = \tfrac{1}{2} A_3 A_4,\ B_2 = 0,\ A_3 A_4 < 0, \\ &\varphi = -\frac{2}{A_3} \ln\big|\operatorname{ch}\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{-A_3 A_4}\, x + C_1\big)\big| + C_2 && \text{при} \quad A_1 = \tfrac{1}{2} A_3^2,\ A_2 = \tfrac{1}{2} A_3 A_4,\ B_2 = 0,\ A_3 A_4 < 0, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Эти решения соответствуют правой части уравнения (65), задаваемой в параметрической форме.

Случай 3. Вырожденным решениям функционального уравнения (51а) и (51b) соответствуют решения нелинейного уравнения теплопроводности (65) типа бегущей волны [функция $\mathcal{F}(w)$ — произвольна] и решения уравнения (65) с источником вида $\mathcal{F}(w) = k_1 w \ln w + k_2 w$.

Пример 15. Аналогичным образом рассматривается более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \mathcal{F}(w), \tag{69}$$

которое встречается в задачах конвективного тепло- и массообмена ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$), в задачах теплопереноса в анизотропных средах ($b = a'_x$), в пространственных задачах теплопроводности с осевой и центральной симметрией ($a = \text{const}$, $b = \text{const}/x$).

Поиск точных решений уравнения (69) вида (66) приводит к функциональному уравнению A.3.5-2, где

$$f(t) = -\psi'_t, \quad g(x) = a(x)\varphi''_{xx} + b(x)\varphi'_x(x), \quad h(x) = a(x)(\varphi'_x)^2, \quad Q(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad R(z) = f(w(z))/w'_z.$$

Подставляя эти выражения в (62)–(64), получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых величин.

Пример 16. Можно искать более сложные решения уравнения (65) с функциональным разделением вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(\xi) + \psi(t), \quad \xi = x + at.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (65) также приводит к функциональному уравнению А.3.5-2, в котором x надо переобозначить на ξ и положить

$$f(t) = -\psi'_t, \quad g(\xi) = \varphi''_{\xi\xi} - a\varphi'_\xi, \quad h(\xi) = (\varphi'_\xi)^2, \quad Q(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad R(z) = f(w(z))/w'_z.$$

Дальнейшая процедура построения решения проводится также как примере 14.

Замечание. В примерах 14–16 построение точных решений различных уравнений математической физики сводилось к одному и тому же функциональному уравнению. Это наглядно демонстрирует полезность выделения и независимого рассмотрения отдельных функциональных уравнений (и целесообразность разработки методов решения функциональных уравнений со сложным аргументом).

А.3.5-3. Функциональное уравнение $f(t) + g(x)Q(z) + h(x)R(z) = 0$, где $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

Дифференцируем уравнение по x. Получим функционально-дифференциальное уравнению с двумя переменными x и z:

$$g'_x Q + g\varphi'_x Q'_z + h'_x R + h\varphi'_x R'_z = 0, \tag{70}$$

которое с точностью до очевидных переобозначений совпадает с уравнением (33) из разд. А.2.

Невырожденный случай. Решение уравнения (70) можно получить с помощью формул (34) из разд. А.2. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} g'_x &= (A_1 g + A_2 h)\varphi'_x, \\ h'_x &= (A_3 g + A_4 h)\varphi'_x, \\ Q'_z &= -A_1 Q - A_3 R, \\ R'_z &= -A_2 Q - A_4 R, \end{aligned} \tag{71}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Решение системы (71) имеет вид

$$\begin{aligned} g(x) &= A_2 B_1 e^{k_1\varphi} + A_2 B_2 e^{k_2\varphi}, \\ h(x) &= (k_1 - A_1) B_1 e^{k_1\varphi} + (k_2 - A_1) B_2 e^{k_2\varphi}, \\ Q(z) &= A_3 B_3 e^{-k_1 z} + A_3 B_4 e^{-k_2 z}, \\ R(z) &= (k_1 - A_1) B_3 e^{-k_1 z} + (k_2 - A_1) B_4 e^{-k_2 z}, \end{aligned} \tag{72}$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 — произвольные постоянные, а k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$(k - A_1)(k - A_4) - A_2 A_3 = 0. \tag{73}$$

В вырожденном случае при $k_1 = k_2$ члены $e^{k_2\varphi}$ и $e^{-k_2 z}$ в (72) надо заменить соответственно на $\varphi e^{k_1\varphi}$ и $z e^{-k_1 z}$. В случае чисто мнимых или комплексных корней уравнения (73) в решении (72) надо выделить действительную (или мнимую) часть.

Подставив (72) в исходное функциональное уравнение А.3.5-3, получим условия, которым должны удовлетворять свободные коэффициенты и найдем функцию $f(t)$:

$$\begin{aligned} &B_2 = B_4 = 0 &&\Longrightarrow\quad f(t) = [A_2 A_3 + (k_1 - A_1)^2] B_1 B_3 e^{-k_1\psi}, \\ &B_1 = B_3 = 0 &&\Longrightarrow\quad f(t) = [A_2 A_3 + (k_2 - A_1)^2] B_2 B_4 e^{-k_2\psi}, \\ &A_1 = 0 &&\Longrightarrow\quad f(t) = (A_2 A_3 + k_1^2) B_1 B_3 e^{-k_1\psi} + (A_2 A_3 + k_2^2) B_2 B_4 e^{-k_2\psi}. \end{aligned} \tag{74}$$

В решения (72), (74) входят произвольные функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$.

Вырожденный случай. Функциональное уравнение А.3.5-3 имеет также вырожденное решение

$$f = B_1 B_2 e^{A_1\psi}, \quad g = A_2 B_1 e^{-A_1\varphi}, \quad h = B_1 e^{-A_1\varphi}, \quad R = -B_2 e^{A_1 z} - A_2 Q,$$

где $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(t)$, $Q=Q(z)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные; и вырожденное решение

$$f=B_1B_2e^{A_1\psi},\quad h=-B_1e^{-A_1\varphi}-A_2g,\quad Q=A_2B_2e^{A_1z},\quad R=B_2e^{A_1z},$$

где $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(t)$, $g=g(x)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Вырожденные решения можно получить из исходного уравнения и его следствия (70) с помощью формул (35) из разд. A.2.

Пример 17. Для нелинейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\mathcal{F}(w)\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2+\mathcal{G}(x)$$

поиск точных решений вида (66) приводит к функциональному уравнению A.3.5-3, где

$$f(t)=-\psi'_t,\ \ g(x)=(\varphi'_x)^2,\ \ h(x)=\mathcal{G}(x),\ \ Q(z)=\mathcal{F}(w)w'_z,\ \ R(z)=1/w'_z,\ \ w=w(z).$$

A.3.5-4. Уравнение $f_1(x)+f_2(y)+g_1(x)P(z)+g_2(y)Q(z)+R(z)=0,\quad z=\varphi(x)+\psi(y)$.

Дифференцируем уравнение по y. Полученное выражение делим на $\psi'_yP'_z$ и дифференцируем по y. В результате приходим к уравнению с двумя аргументами y и z, которое рассматривалось в разд. A.2 [см. уравнение (3) и его решение (30)].

Пример 18. Рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником

$$\frac{\partial}{\partial x}\Bigl[a(x)\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr]+\frac{\partial}{\partial y}\Bigl[b(y)\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr]=\mathcal{F}(w). \tag{75}$$

Поиск точных решений уравнения (75) вида $w=w(z)$, где $z=\varphi(x)+\psi(y)$ приводит к функциональному уравнению A.3.5-4, где

$$f_1(x)=a(x)\varphi''_{xx}+a'_x(x)\varphi'_x,\ \ f_2(y)=b(y)\psi''_{yy}+b'_y(y)\psi'_y,\ \ g_1(x)=a(x)(\varphi'_x)^2,\ \ g_2(y)=b(y)(\psi'_y)^2,$$
$$P(z)=Q(z)=w''_{zz}/w'_z,\ \ R(z)=-\mathcal{F}(w)/w'_z,\ \ w=w(z).$$

Не проводя полного анализа уравнения (75) ограничимся здесь изучением решений с обобщенным разделением переменных, которые существуют при произвольной правой части $\mathcal{F}(w)$.

Сделав замену $z=\zeta^2$, ищем решения уравнения (75) вида

$$w=w(\zeta),\qquad \zeta^2=\varphi(x)+\psi(y). \tag{76}$$

Учитывая соотношения $\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{\varphi'_x}{2\zeta}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{\psi'_y}{2\zeta}$, из (75) получим

$$\bigl[(a\varphi'_x)'_x+(b\psi'_y)'_y\bigr]\frac{w'_\zeta}{2\zeta}+\bigl[a(\varphi'_x)^2+b(\psi'_y)^2\bigr]\frac{\zeta w''_{\zeta\zeta}-w'_\zeta}{4\zeta^3}=\mathcal{F}(w),\qquad \mathcal{F}(w)=\mathcal{F}\bigl(w(\zeta)\bigr). \tag{77}$$

Для разрешимости этого функционального уравнения потребуем, чтобы выражения в квадратных скобках были функциями ζ:

$$(a\varphi'_x)'_x+(b\psi'_y)'_y=M(\zeta),\quad a(\varphi'_x)^2+b(\psi'_y)^2=N(\zeta).$$

Продифференцировав первое из этих равенств по x и по y, приходим к уравнению $(M'_\zeta/\zeta)'_\zeta=0$, общее решение которого имеет вид $M(\zeta)=C_1\zeta^2+C_2$. Аналогично находим $N(\zeta)=C_3\zeta^2+C_4$. Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. В итоге получим

$$(a\varphi'_x)'_x+(b\psi'_y)'_y=C_1(\varphi+\psi)+C_2,\quad a(\varphi'_x)^2+b(\psi'_y)^2=C_3(\varphi+\psi)+C_4.$$

Разделение переменных приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения функций $\varphi(x)$, $a(x)$, $\psi(y)$, $b(y)$:

$$\begin{aligned}&(a\varphi'_x)'_x-C_1\varphi-C_2=k_1, &&(b\psi'_y)'_y-C_1\psi=-k_1,\\ &a(\varphi'_x)^2-C_3\varphi-C_4=k_2, &&b(\psi'_y)^2-C_3\psi=-k_2.\end{aligned}$$

Эта система всегда интегрируется в квадратурах и может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned}&(C_3\varphi+C_4+k_2)\varphi''_{xx}+(C_1\varphi+C_2+k_1-C_3)(\varphi'_x)^2=0, && a=(C_3\varphi+C_4+k_2)(\varphi'_x)^{-2};\\ &(C_3\psi-k_2)\psi''_{yy}+(C_1\psi-k_1-C_3)(\psi'_y)^2=0, && b=(C_3\psi-k_2)(\psi'_y)^{-2},\end{aligned} \tag{78}$$

где уравнения для функций φ и ψ не зависят от a и b и могут решаться независимо. Не проводя полного исследования системы (78), отметим простой частный случай, когда она интегрируется в явном виде.

ТАБЛИЦА А3

Решения с обобщенным разделением переменных вида $w = w(\zeta)$, где $\zeta^2 = \varphi(x) + \psi(y)$, для уравнений теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником произвольного вида. Обозначения: C, α, β, μ, ν, n, k — свободные параметры ($C \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, $n \neq 2$, $k \neq 2$)

Уравнение теплопроводности	Функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$	Уравнение для $w = w(\zeta)$
$\frac{\partial}{\partial x}\bigl(\alpha x^n \frac{\partial w}{\partial x}\bigr) + \frac{\partial}{\partial y}\bigl(\beta y^k \frac{\partial w}{\partial y}\bigr) = \mathcal{F}(w)$	$\varphi = \frac{Cx^{2-n}}{\alpha(2-n)^2}$, $\psi = \frac{Cy^{2-k}}{\beta(2-k)^2}$	$w''_{\zeta\zeta} + \frac{4-nk}{(2-n)(2-k)}\frac{1}{\zeta}w'_\zeta = \frac{4}{C}\mathcal{F}(w)$
$\frac{\partial}{\partial x}\bigl(\alpha e^{\mu x} \frac{\partial w}{\partial x}\bigr) + \frac{\partial}{\partial y}\bigl(\beta e^{\nu y} \frac{\partial w}{\partial y}\bigr) = \mathcal{F}(w)$	$\varphi = \frac{C}{\alpha\mu^2}e^{-\mu x}$, $\psi = \frac{C}{\beta\nu^2}e^{-\nu y}$	$w''_{\zeta\zeta} - \frac{1}{\zeta}w'_\zeta = \frac{4}{C}\mathcal{F}(w)$
$\frac{\partial}{\partial x}\bigl(\alpha e^{\mu x} \frac{\partial w}{\partial x}\bigr) + \frac{\partial}{\partial y}\bigl(\beta y^k \frac{\partial w}{\partial y}\bigr) = \mathcal{F}(w)$	$\varphi = \frac{C}{\alpha\mu^2}e^{-\mu x}$, $\psi = \frac{Cy^{2-k}}{\beta(2-k)^2}$	$w''_{\zeta\zeta} + \frac{k}{2-k}\frac{1}{\zeta}w'_\zeta = \frac{4}{C}\mathcal{F}(w)$
$\frac{\partial}{\partial x}\bigl(\alpha x^2 \frac{\partial w}{\partial x}\bigr) + \frac{\partial}{\partial y}\bigl(\beta y^2 \frac{\partial w}{\partial y}\bigr) = \mathcal{F}(w)$	$\varphi = \mu \ln\lvert x\rvert$, $\psi = \nu \ln\lvert y\rvert$	Уравнение (77), оба выражения в квадратных скобках — константы
$\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\bigl(\beta y^2 \frac{\partial w}{\partial y}\bigr) = \mathcal{F}(w)$	$\varphi = \mu x$, $\psi = \nu \ln\lvert y\rvert$	Уравнение (77), оба выражения в квадратных скобках — константы

При $C_1 = C_2 = C_4 = k_1 = k_2 = 0$, $C_3 = C \neq 0$ имеем

$$a(x) = \alpha e^{\mu x}, \quad b(y) = \beta e^{\nu y}, \quad \varphi(x) = \frac{Ce^{-\mu x}}{\alpha\mu^2}, \quad \psi(y) = \frac{Ce^{-\nu y}}{\beta\nu^2},$$

где α, β, μ, ν — произвольные постоянные. Подставив эти выражения в (77) и учитывая вид переменной ζ (76), получим уравнение для функции $w(\zeta)$:

$$w''_{\zeta\zeta} - \frac{1}{\zeta}w'_\zeta = \frac{4}{C}\mathcal{F}(w).$$

Система (78) имеет также другие решения, приводящие к различным выражениям для функций $a(x)$ и $b(y)$. В табл. А3 указаны случаи, когда эти функции могут быть выражены в явном виде [использованы результаты В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1996), А. Д. Полянина, А. И. Журова (1998)]; опущено решение типа бегущей волны, соответствующее $a = \text{const}$, $b = \text{const}$. В общем случае решение системы (77) приводит к функциям $a(x)$ и $b(y)$, которые записываются в параметрической форме.

⊙ *Литература к разд. А.3.5*: A. D. Polyanin (2001).

B. Преобразования уравнений математической физики

B.1. Точечные преобразования

Пусть x, y — независимые переменные, а $w = w(x, y)$ — функция этих переменных. В общем случае точечное преобразование задается формулами

$$x = X(\xi, \eta, u), \quad y = Y(\xi, \eta, u), \quad w = W(\xi, \eta, u), \tag{1}$$

где ξ, η — новые независимые переменные, $u = u(\xi, \eta)$ — новая зависимая переменная, X, Y, W — некоторые (заданные или искомые) функции.

Точечные преобразования не только сохраняют порядок уравнения, к которому применяются, но и не изменяют радикально структуру уравнения, так как производные новых переменных линейно зависят от производных исходных переменных.

Преобразование (1) обратимо, если

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Bigl(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr) = 0 \tag{2}$$

с помощью обратимого точечного преобразования (1) приводится к виду

$$G\Bigl(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Bigr) = 0. \tag{3}$$

Если $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (3), то формулы (1) определяют соответствующее решение уравнения (2) в параметрическом виде.

Точечные преобразования используются для упрощения уравнений и приведения их к известным. Иногда они позволяют свести нелинейные уравнения к линейным.

Пример 1. Уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m \frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + [xf(t) + g(t)] \frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w$$

с помощью преобразования

$$w(x,t) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^2(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции F и H определяются формулами

$$F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr], \quad H(t) = \exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],$$

приводится к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Bigl(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Bigr).$$

Пример 2. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + f(x,t)$$

заменой $u = \exp(aw)$ приводится к линейному уравнению для функции $u = u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + af(x,t)u.$$

В.2. Преобразование годографа

Для упрощения нелинейных уравнений и систем уравнений с частными производными иногда используется преобразование годографа.

1°. Для уравнения с двумя независимыми переменными x, y и искомой функцией $w = w(x, y)$ преобразование годографа заключается в том, что решение ищется в неявном виде (x и t можно поменять местами)

$$x = x(w, t), \tag{1}$$

т. е. w, t принимаются за независимые переменные, а x — за зависимую переменную. Преобразование годографа (1) не меняет порядок уравнения и является частным случаем точечного преобразования (его можно записать в эквивалентном виде: $t = \widetilde{t}$, $x = \widetilde{w}$, $w = \widetilde{x}$).

2°. Для системы двух уравнений с двумя независимыми переменными x, y и зависимыми переменными $w = w(x, y)$, $v = v(x, y)$ преобразование годографа заключается в том, что w, v принимаются за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные, т. е. ищутся функции

$$x = x(w, v), \qquad y = y(w, v). \tag{2}$$

Преобразование годографа применяется в газовой динамике и теории струй для линеаризации соответствующих уравнений и решения некоторых краевых задач.

Рассмотрим конкретные примеры использования преобразования годографа для решения уравнений математической физики.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = f(t, w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Ищем решение в неявном виде. Дифференцируя выражение (1) по обеим переменным как неявную функцию с учетом зависимости $w = w(x, t)$, получим

$$\begin{aligned} &1 = x_w w_x && \text{(дифференцирование по } x\text{)},\\ &0 = x_w w_t + x_t && \text{(дифференцирование по } t\text{)},\\ &0 = x_{ww} w_x^2 + x_w w_{xx} && \text{(дифференцирование по } x \text{ дважды)}, \end{aligned}$$

где индексы снизу обозначают соответствующие частные производные. Из этих соотношений выразим «старые» производные через «новые»:

$$w_x = \frac{1}{x_w}, \quad w_t = -\frac{x_t}{x_w}, \quad w_{xx} = -\frac{w_x^2 x_{ww}}{x_w} = -\frac{x_{ww}}{x_w^3}.$$

Подставив эти выражения в (3), приходим к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, w)\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}.$$

Пример 2. Уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = 0 \tag{4}$$

представим в виде системы уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -f(w)\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5}$$

Используем преобразование годографа (2): примем w, v за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные. Дифференцируя каждое выражение (2) по x и по y (как сложные функции), и исключая из полученных соотношений частные производные x_w, x_v, y_w, y_v, имеем

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{где } J = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6}$$

Исключая из (5) с помощью (6) производные w_x, w_y, v_x, v_y, приходим к системе

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial w}, \quad -f(w)\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial w}. \tag{7}$$

Почленно продифференцируем первое уравнение по w, а второе — по v, и исключим смешанную производную y_{wv}. В результате для функции $x = x(w, v)$ получим линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + f(w)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \tag{8}$$

Аналогичным образом из системы (7) для функции $y = y(w, v)$ имеем другое линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{f(w)}\frac{\partial y}{\partial w}\right] = 0. \tag{9}$$

Взяв некоторое частное решение уравнения (8) $x = x(w, v)$ и подставив его в систему (7), простым интегрированием можно найти $y = y(w, v)$. Исключив из равенств (5) переменную v, получим точное решение $w = w(x, y)$ нелинейного уравнения (4).

3°. Уравнение (8) при произвольном $f(w)$ имеет простое частное решение

$$x = C_1 wv + C_2 w + C_3 v + C_4, \tag{10}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Подставив его в систему (7), получим

$$\frac{\partial y}{\partial v} = C_1 v + C_2, \qquad \frac{\partial y}{\partial w} = -(C_1 w + C_3)f(w). \tag{11}$$

Интегрируя первое уравнение (11), находим $y = \frac{1}{2}C_1 v^2 + C_2 v + \varphi(w)$. Подставив это решение во второе уравнение (11), определяем функцию $\varphi(w)$. В результате получим

$$y = \tfrac{1}{2}C_1 v^2 + C_2 v - \int (C_1 w + C_3) f(w)\, dw + C_5. \tag{12}$$

Формулы (11)–(12) определяют точное решение уравнения (4) в параметрической форме (v — параметр).

2°. Аналогичным путем можно получить более сложное решение уравнения (4), заданное в параметрической форме:

$$x = C_1 v^2 + C_2 wv + C_3 v + C_4 w - 2C_1 \int_a^w (x - t) f(t)\, dt + C_5,$$
$$y = \tfrac{1}{2}C_2 v^2 + C_4 v - 2C_1 v \int f(w)\, dw - \int (C_2 w + C_3) f(w)\, dw + C_6.$$

3°. Используя частное решение уравнения (9) можно получить другое точное уравнения (4):

$$x = -\tfrac{1}{2}C_1 v^2 - C_2 v + C_1 \int F(w)\, dw + C_3 w + C_4,$$
$$y = (C_1 v + C_2)F(w) + C_3 v + C_5, \qquad F(w) = \int f(w)\, dw.$$

См. также уравнение 5.4.4.8, где рассмотрено более общее уравнение и приведены другие решения.

Пример 3. Рассмотрим систему нелинейных уравнений газодинамического типа

$$f_1(w,v)\frac{\partial w}{\partial x} + f_2(w,v)\frac{\partial w}{\partial y} + f_3(w,v)\frac{\partial v}{\partial x} + f_4(w,v)\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$g_1(w,v)\frac{\partial w}{\partial x} + g_2(w,v)\frac{\partial w}{\partial y} + g_3(w,v)\frac{\partial v}{\partial x} + g_4(w,v)\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Примем w, v за независимые переменные, а x и y за зависимые переменные. В результате приходим к линейной системе уравнений (все выкладки проводятся как в первом примере):

$$f_1(w,v)\frac{\partial y}{\partial v} - f_2(w,v)\frac{\partial x}{\partial v} - f_3(w,v)\frac{\partial y}{\partial w} + f_4(w,v)\frac{\partial x}{\partial w} = 0,$$
$$g_1(w,v)\frac{\partial y}{\partial v} - g_2(w,v)\frac{\partial x}{\partial v} - g_3(w,v)\frac{\partial y}{\partial w} + g_4(w,v)\frac{\partial x}{\partial w} = 0.$$

⊙ *Литература к разд. В.2*: Р. Курант (1962, стр. 426), Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе (1963), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 33–34), Г. Г. Черный (1988, стр. 253–269), P. A. Clarkson, A. S. Fokas, M. J. Ablowitz (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *b*).

B.3. Преобразование Лежандра

Для решения нелинейных уравнений с частными производными первого и второго порядков иногда используется преобразование Лежандра.

Пусть $w = w(x, y)$ — искомая функция. Преобразование Лежандра задается формулами

$$w(x,y) + u(\xi,\eta) = x\xi + y\eta, \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{1}$$

где u — новая зависимая переменная, а ξ и η — новые независимые переменные.

Из формул (1) (используются два следствия первого выражения, полученные путем его дифференцирования по ξ и η) можно получить:

$$x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial \eta}. \tag{2}$$

С помощью формул (1)–(2) находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = J\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

где

$$J = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2, \quad \frac{1}{J} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2.$$

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{3}$$

с помощью преобразования Лежандра (1) (при $J \neq 0$) приводится к виду

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} - u, \xi, \eta, J\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, -J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) = 0. \tag{4}$$

Иногда уравнение (4) бывает проще, чем уравнение (3).

Пусть $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (4). Тогда формулы

$$w = \xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} - u(\xi,\eta), \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

определяют соответствующее решение уравнения (3) в параметрическом вида.

Замечание. Использование преобразования Лежандра может привести к потере решений, удовлетворяющих условию $J = 0$.

Пример. Нелинейное уравнение

$$f\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + h\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

преобразованием Лежандра (1) сводится к линейному уравнению с переменными коэффициентами

$$f(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - g(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + h(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

B.4. Контактные преобразования

Обобщением преобразования Лежандра являются контактные преобразования. Общим их свойством является зависимость исходных переменных от новых переменных и их первых производных. Однако эта зависимость выбирается так, что первые производные исходных переменных также зависят только от преобразованных переменных и их производных не выше первого порядка. Поэтому контактное преобразование не повышает порядка уравнения, к которому применяется.

Пусть $w = w(x, y)$ — искомая функция. Рассмотрим преобразование

$$\begin{aligned} x &= X(\xi,\eta,u,p,q), \\ y &= Y(\xi,\eta,u,p,q), \\ w &= W(\xi,\eta,u,p,q), \end{aligned} \tag{1}$$

где ξ, η — новые независимые переменные, $u = u(\xi,\eta)$ — новая зависимая переменная, а функции $p = p(\xi,\eta)$, $q = q(\xi,\eta)$ будут определены далее.

Функции X, Y, W не являются произвольными, на них накладывается условие сохранения касания первого порядка

$$dw - \frac{\partial W}{\partial X}\,dx - \frac{\partial W}{\partial Y}\,dy = \rho(du - p\,d\xi - q\,d\eta), \tag{2}$$
$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy, \quad du = \frac{\partial u}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,d\eta,$$

где $\rho = \rho(\xi,\eta,u,p,q)$ — некоторый коэффициент пропорциональности.

Преобразование (1), удовлетворяющее условию (2), будет называться контактным, если функции p и q задаются как частные производные

$$p = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial \eta}. \tag{3}$$

Из выражений (2) и (3) получим

$$dw - \frac{\partial W}{\partial X}\,dx - \frac{\partial W}{\partial Y}\,dy = 0,$$
$$du - p\,d\xi - q\,d\eta = 0.$$

Отсюда следует, что первые производные новых переменных зависят только от первых производных исходных переменных, и не зависят от старших производных.

Покажем, как найти соотношения между функциями X, Y, W. Дифференцируя первое и второе выражения (1) по x и y по правилу дифференцирования неявных функций [считается, что $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$], получим четыре соотношения:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial u}p + \frac{\partial X}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial u}q + \frac{\partial X}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1,$$
$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial u}p + \frac{\partial Y}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial u}q + \frac{\partial Y}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial u}p + \frac{\partial X}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial u}q + \frac{\partial X}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial u}p + \frac{\partial Y}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial u}q + \frac{\partial Y}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1.$$

Первая пара равенств представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, вторая — относительно $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$. Решив эти системы, можно найти производные $\frac{\partial \xi}{\partial x} = A$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = B$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = C$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = D$, а затем продифференцировав третье соотношение (1) по x и y, можно выразить величины $U = \frac{\partial w}{\partial x}$, $V = \frac{\partial w}{\partial y}$ через новые переменные:

$$U = A\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial u}p + \frac{\partial W}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}p_\eta\right) + B\left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial u}q + \frac{\partial W}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}q_\eta\right),$$
$$V = C\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial u}p + \frac{\partial W}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}p_\eta\right) + D\left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial u}q + \frac{\partial W}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}q_\eta\right).$$

При этом следующие из (2) условия — отсутствие зависимости от вторых производных

$$\frac{\partial U}{\partial p_\xi} = \frac{\partial V}{\partial p_\xi} = \frac{\partial U}{\partial p_\eta} = \frac{\partial V}{\partial p_\eta} = \frac{\partial U}{\partial q_\eta} = \frac{\partial V}{\partial q_\eta} = 0, \quad (p_\eta \equiv q_\xi)$$

задают дополнительные соотношения между функциями X, Y, W.

В итоге контактное преобразование можно записать так:

$$\begin{aligned} x &= X(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),\\ y &= Y(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),\\ w &= W(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),\\ w_x &= U(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),\\ w_y &= V(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta). \end{aligned} \tag{4}$$

Вторые производные w по «старым» переменным выражаются через вторые (и первые) производные u по «новым» переменным.

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0 \tag{5}$$

с помощью контактного преобразования (4) приводится к виду

$$G\Big(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Big) = 0. \tag{6}$$

Иногда уравнение (6) бывает проще, чем уравнение (5). Если $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (6), то первые три формулы (4) определяют соответствующее решение уравнения (5) в параметрическом виде.

Пример. Преобразование Эйлера определяется соотношениями

$$x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \eta, \quad w = \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - u, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Вычисление вторых производных дает

$$w_{xx} = \frac{1}{u_{\xi\xi}}, \quad w_{xy} = -\frac{u_{\xi\eta}}{u_{\xi\xi}}, \quad w_{yy} = \frac{u_{\xi\eta}^2 - u_{\xi\xi} u_{\eta\eta}}{u_{\xi\xi}}.$$

Например, уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f\Big(y, \frac{\partial w}{\partial x}\Big)$$

преобразованием Эйлера линеаризуется:

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = -f(\eta, \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

⊙ *Литература к разд. В.4*: М. Г. Куренский (1934), Н. Х. Ибрагимов (1983).

В.5. Преобразования Беклунда. Дифференциальные подстановки

1°. Пусть $w = w(x, y)$ — решение уравнения

$$F_1\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0, \tag{1}$$

а $u = u(\xi, \eta)$ — решение уравнения

$$F_2\Big(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) = 0. \tag{2}$$

Говорят, что уравнения (1) и (2) связаны преобразованием Беклунда

$$\begin{aligned} \Phi_1\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big) = 0, \\ \Phi_2\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

если из совместности пары (1) и (3) следует уравнение (2), а из совместности пары (2) и (3) следует (1). Если для некоторого конкретного решения $u = u(\xi, \eta)$ уравнения (2) удается разрешить уравнения (3) относительно $w = w(x, y)$, то функция $w = w(x, y)$ будет решением уравнения (1). Соотношения (3) называют также дифференциальной связью.

Преобразования Беклунда могут сохранять инвариантным вид уравнения (это дает возможность «размножать» решения) или связывать решения разных уравнений (это позволяет из решений одного уравнения получать решения другого).

2°. Помимо преобразований Беклунда в математической физике используются также дифференциальные подстановки. Для уравнений второго порядка дифференциальные подстановки имеют вид

$$w = \Psi\Big(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big).$$

Дифференциальная подстановка повышает порядок уравнения (если она подставляется в уравнение для w) и позволяет с помощью решений одного уравнения получать решения другого. Связь между решениями этих уравнений, вообще говоря, необратима и носит односторонний характер. Дифференциальные подстановки могут быть следствием преобразования Беклунда (хотя это и необязательно).

3°. Для двух эволюционных уравнений вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F_1\Big(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_2\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big)$$

преобразование Беклунда часто записывается в форме дифференциальной связи

$$\Phi\Big(x, w, \frac{dw}{dx}, \ldots, \frac{d^m w}{dx^m}, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^k u}{dx^k}\Big) = 0,$$

содержащей производные только по одной переменной x (вторая переменная t входит неявно через функции w, u). Эта связь может рассматриваться как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно одной из зависимых переменных.

Пример 1. Уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4}$$

связано с линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5}$$

преобразованием Беклунда

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}uw = 0,\\ &\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial (uw)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Исключая из (6) w, приходим к уравнению (5).

Обратно: пусть $u(x,t)$ — ненулевое решение уравнения теплопроводности (5). Разделив (5) на u и вычислив частную производную по x от обеих частей полученного выражения, с учетом равенства $(u_t/u)_x = (u_x/u)_t$ имеем

$$\Big(\frac{u_x}{u}\Big)_t = \Big(\frac{u_{xx}}{u}\Big)_x.$$

Подставим сюда следствия первого соотношения (6) (см. первую и последнюю формулу в цепочке равенств):

$$\frac{u_x}{u} = \frac{w}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{u_{xx}}{u} - \Big(\frac{u_x}{u}\Big)^2 = \frac{w_x}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{u_{xx}}{u} = \frac{w_x}{2} + \frac{1}{4}w^2.$$

В результате приходим к уравнению Бюргерса (5).

Замечание. Первое соотношение (6) можно записать как дифференциальную подстановку (преобразование Хопфа — Коула)

$$w = \frac{2u_x}{u}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (4), получим уравнение

$$\frac{2u_{tx}}{u} - \frac{2u_t u_x}{u^2} = \frac{2u_{xxx}}{u} - \frac{2u_x u_{xx}}{u^2},$$

которое можно преобразовать к следующему виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{1}{u}\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)\Big] = 0.$$

Таким образом, всякие решение уравнения линейного уравнения теплопроводности (5) формулой (7) переводится в решение уравнения Бюргерса (4). Обратное неверно — решение уравнения (4) порождает, вообще говоря, решение более общего уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)u,$$

где $f(t)$ — некоторая функция t.

Пример 2. Нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + |w|^2 w = 0,$$

где функция w — комплексная функция действительных переменных x и t ($i^2 = -1$), инвариантно относительно преобразования Беклунда

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x} &= iaf_1 - \frac{i}{2} f_2 g_1, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} &= \frac{1}{2} g_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x} \right) - ag_2 + \frac{i}{4} f_1 \left(|f_1|^2 + |f_2|^2 \right). \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения

$$f_1 = w - \widetilde{w}, \quad f_2 = w + \widetilde{w}, \quad g_1 = i\varepsilon\left(b - 2|f_1|^2\right)^{1/2}, \quad g_2 = i\left(af_1 - \tfrac{1}{2} f_2 g_1\right),$$

где a, b — произвольные действительные постоянные, $\varepsilon = \pm 1$.

Пример 3. Уравнение Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 6w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$$

и модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

связаны преобразованием Беклунда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon(w + u^2), \quad \varepsilon = \pm 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial}{\partial x}(uw). \end{aligned} \tag{8}$$

Первое выражение (8) представляет собой преобразование Миуры, которое можно записать в виде дифференциальной подстановки, разрешив (8) относительно w.

⊙ *Литература к разд. В.5*: G. L. Lamb (1974), A. S. Fokas, R. L. Anderson (1979), Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 151–154), М. Абловиц, Х. Сигур (1987, стр. 179–181), N. H. Ibragimov (1994).

C. Тест Фукса — Ковалевской — Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики*

C.1. Подвижные особенности решений обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Взаимосвязь вида обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями их решений была установлена более ста лет назад. Особенности решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений точно соответствуют особенностям коэффициентов уравнений. Поскольку их положение не меняется с изменением постоянных интегрирования, то такие особенности именуют неподвижными. В случае нелинейных уравнений появляются также подвижные особенности решений, положение которых зависит от начальных условий (от постоянных интегрирования).

Ниже приведены простейшие примеры обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их решений с подвижными особенностями.

Уравнение	*Решение*	*Тип особенности решения*
$u'_z = -u^2$	$u = 1/(z - z_0)$	подвижный полюс
$u'_z = 1/u$	$u = 2\sqrt{z - z_0}$	алгебраическая точка ветвления
$u'_z = e^{-u}$	$u = \ln(z - z_0)$	логарифмическая точка ветвления
$u'_z = -u \ln^2 u$	$u = \exp[1/(z - z_0)]$	существенно особая точка

Алгебраические точки ветвления, логарифмические точки ветвления и существенно особые точки решений называются «критическими особыми точками».

2°. В 1884 году Л. Фукс (L. Fuchs) показал, что нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

$$u'_z = R(z, u)$$

с рациональной по второму и аналитической по первому аргументу функцией R обладают решениями без подвижных критических точек (т. е. только с подвижными полюсами) лишь в случае общего уравнения Риккати $u'_z = A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2$.

3°. Классификация (на комплексной плоскости) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$u''_{zz} = R(z, u, u'_z),$$

где $R = R(z, u, w)$ — функция рациональная по u и w и аналитическая по z, была проведена П. Пенлеве (P. Painlevé, 1900) и Б. Гамбье (B. Gambier, 1910). Они показали, что все уравнения данного вида, решения которых не имеют подвижных критических точек (допустимыми считаются неподвижные особые точки и подвижные полюса) сводятся к 50 классам уравнений. Из них 44 класса интегрируются в квадратурах или допускают понижение порядка. Остальные 6 классов являются неприводимыми, их называют уравнениями Пенлеве (а их решения — трансцендентными функциями Пенлеве или трансцендентами Пенлеве).

4°. Первое уравнение Пенлеве (в канонической форме) имеет вид

$$u''_{zz} = 6u^2 + z.$$

---

* Разд. C.1–C.3 написали В. Г. Байдулов, В. А. Городцов.

В окрестности подвижного полюса z_0 его решения представимы в виде ряда

$$u = \frac{1}{(z-z_0)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$
$$a_2 = -\tfrac{1}{10} z_0, \quad a_3 = -\tfrac{1}{6}, \quad a_4 = C, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \tfrac{1}{300} z_0^2,$$

где z_0 и C — произвольные постоянные; коэффициенты a_n ($n \geqslant 7$) однозначно определяются через z_0 и C.

Второе уравнение Пенлеве (в канонической форме) имеет вид

$$u''_{zz} = 2u^3 + zu + a.$$

В окрестности подвижного полюса z_0 его решения допускают следующие разложения:

$$u = \frac{m}{z-z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^n,$$
$$b_1 = -\tfrac{1}{6} m z_0, \quad b_2 = -\tfrac{1}{4}(m+\alpha), \quad b_3 = C, \quad b_4 = \tfrac{1}{72} z_0 (m + 3\alpha),$$
$$b_5 = \tfrac{1}{3024}\left[(27 + 81\alpha^2 - 2z_0^3)m + 108\alpha - 216 C z_0\right],$$

где $m = \pm 1$; z_0 и C — произвольные постоянные; коэффициенты b_n ($n \geqslant 6$) однозначно определяются через z_0 и C.

Более подробную информацию об уравнениях Пенлеве можно найти в литературе, цитируемой в конце разд. С.1. Отметим только, что решение четвертого уравнения Пенлеве имеет подвижный полюс, а решения третьего, пятого и шестого уравнений Пенлеве имеют неподвижные логарифмические точки ветвления.

Замечание. В 1888 году С. В. Ковалевской удалось проинтегрировать уравнения движения недеформируемого твердого тела с закрепленной точкой под действием силы тяжести в неизвестном до нее случае. Был выполнен анализ решений системы шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. При этом решение искалось в виде разложений всех неизвестных величин в ряды с полюсными подвижными особенностями

$$u = (z-z_0)^{-n}\left[a_0 + a_1(z-z_0) + \dots\right].$$

Общность решения обеспечивалась нужным (соответствующим порядку системы) числом произвольных коэффициентов разложений и свободным параметром z_0.

Важно отметить, что исследования С. В. Ковалевской предшествовали работам П. Пенлеве по классификации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, который использовал разложения аналогичного вида.

⊙ *Литература к разд. С.1:* В. В. Голубев (1950), G. M. Murphy (1960), A. R. Its, V. Yu. Novokshenov (1986), В. И. Громак, Н. А. Лукашевич (1990), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *а*).

С.2. Решения уравнений с частными производными, имеющие подвижный полюс. Описание метода

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями решения уравнений с частными производными можно искать в виде разложений, содержащих особенность типа подвижного полюса. Положение полюса задается с помощью произвольной функции.

Для простоты изложения далее будем рассматривать уравнения математической физики с двумя независимыми переменными x, t и зависимой переменной w, которые не зависят явно от x и t.

1°. *Простейшая схема.* Решение ищется в окрестности сингулярного многообразия $x - x_0(t) = 0$ в виде разложения (M. Jimbo, M. D. Kruskal, T. Miwa, 1982):

$$w(x,t) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \varepsilon^n, \qquad \varepsilon = x - x_0(t). \tag{1}$$

Здесь показатель α — целое положительное число, что обеспечивает полюсной характер подвижной особенности решения. Функция $x_0(t)$ считается произвольной.

Выражение (1) подставляется в рассматриваемое уравнение. Сначала из баланса ведущих сингулярных членов определяются показатель α и главный член разложения $u_0(t)$. Затем собираются члены при одинаковых степенях ε. Приравнивая полученные выражения (при одинаковых степенях ε) нулю, приходят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_n(t)$.

Полученное решение будет общим, если в разложение (1) войдут произвольные функции, причем число этих функций равно порядку рассматриваемого уравнения.

2°. *Общая схема. Тест Фукса — Ковалевской — Пенлеве.* Решение уравнения в частных производных ищут в окрестности сингулярного многообразия $\varepsilon(x,t)=0$ в виде обобщенного разложения симметричного по независимым переменным (J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevalle, 1983):

$$w(x,t)=\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}w_n(x,t)\varepsilon^n,\qquad \varepsilon=\varepsilon(x,t),\tag{2}$$

где $\varepsilon_t\varepsilon_x\neq 0$. Здесь и далее нижние индексы x и t обозначают соответствующие частные производные.

Разложение (1) является частным случаем разложения (2), когда уравнение сингулярного многообразия разрешено относительно переменной x.

Требование отсутствия подвижных критических точек подразумевает, что α — положительное целое число. Решение будет общим, если степень функционального произвола в коэффициентных функциях $w_n(x,t)$ и функции разложения $\varepsilon(x,t)$ будет совпадать с порядком уравнения (в полном соответствии с теоремой Коши — Ковалевской).

Подставляя выражение (2) в уравнение и выделяя (а затем приравниваю нулю) члены при одинаковых степенях ε, получим рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения

$$P_N(n)w_n=f_n(w_0,w_1,\ldots,w_{n-1},\varepsilon_t,\varepsilon_x,\ldots).$$

Здесь $P_N(n)$ — полиномы степени N с целочисленным аргументом n вида

$$P_N(n)=(n+1)(n-j_1)(n-j_2)\ldots(n-j_{N-1}),$$

где N — порядок рассматриваемого уравнения.

Если корни полинома $j_1,j_2,\ldots,j_{N-1}$, именуемые резонансами, оказываются целыми неотрицательными числами, и выполнены условия совместности

$$f_{n=j_k}=0\qquad (k=1,2,\ldots,N-1),$$

то говорят о выполнении теста Фукса — Ковалевской — Пенлеве* для рассматриваемого уравнения. Уравнения, обладающие указанным свойством, часто относят к классу интегрируемых (что подтверждается приводимостью таких уравнений к линейным уравнениям во многих известных случаях).

3°. Для первоначальной проверки выполнения теста Фукса — Ковалевской — Пенлеве для конкретного уравнения удобно пользоваться упрощенной схемой, основанной на разложении (1). Важные технические упрощения по сравнению с разложением (2) обусловлены выполнением равенств $(w_n)_x=0$, $\varepsilon_x=1$.

Разложение общего вида (2), подразумевающее более громоздкие, но вместе с этим более информативные выкладки, полезно использовать на втором этапе исследования после установления свойства Фукса — Ковалевской — Пенлеве. Это позволяет выяснять многие важные свойства уравнений и их решений и найти вид преобразования Беклунда, линеаризующего исходное уравнение.

⊙ *Литература к разд. С.2*: M. Jimbo, M. D. Kruskal, T. Miwa (1982), J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevalle (1983), J. Weiss (1983, 1984, 1985), R. Conte (1989), R. Conte, M. Musette (1989, 1993), M. Musette (1998).

* В зарубежной литературе обычно используется термин «Painlevé test».

С.3. Примеры применения теста Фукса — Ковалевской — Пенлеве

В этом разделе рассматриваются примеры конкретных уравнений математической физики. Для их анализа сначала будет использоваться простейшая, а затем общая схема применения теста Фукса — Ковалевской — Пенлеве, которые основаны на разложениях (1) и (2) из разд. С.2.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

1°. Подставив в уравнение главный член разложения (1), имеем

$$\frac{w_0'}{(x-x_0)^\alpha} + \frac{\alpha w_0 x_0'}{(x-x_0)^{\alpha+1}} - \frac{\alpha w_0^2}{(x-x_0)^{2\alpha+1}} = \frac{\nu\alpha(\alpha+1)w_0}{(x-x_0)^{\alpha+2}},$$

где $x_0 = x_0(t)$, $w_0 = w_0(t)$, штрих обозначает производную по t. Из баланса ведущих сингулярных членов (соответствуют «отбрасыванию» слева двух первых слагаемых), находим

$$\alpha = 1, \quad w_0 = -2\nu \qquad (n = 0).$$

Уравнение Бюргерса после подстановки разложения (1) и выделения членов при одинаковых степенях $\varepsilon = x - x_0(t)$ принимает вид

$$w_t + ww_x - \nu w_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(t)\varepsilon^{n-3} = 0, \quad \text{где} \quad E_n(t) = -(n+1)(n-2)\nu w_n + \dots$$

Здесь в выражении для $E_n(t)$ опущены слагаемые, содержащие последующие члены разложения $w_0, \dots, w_{n-1}$ и функцию $x_0(t)$.

Видно, что имеется один резонанс $n = 2$, для которого удовлетворяется соотношение совместности (обращается в нуль сумма членов с низшими коэффициентами в рекуррентном соотношении), и функция $w_2(t)$ остается произвольной. Это ясно из вида младших рекуррентных соотношений (соотношение при $n = 2$ является следствием предыдущих и не содержит w_2):

$$\begin{aligned} -E_0/w_0 &= w_0 + 2\nu = 0 && (n = 0),\\ -E_1/w_0 &= w_1 + \varepsilon_t = 0 && (n = 1),\\ E_2 &= (w_0)_t = 0 && (n = 2). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение Бюргерса удовлетворяет тесту Фукса — Ковалевской — Пенлеве, а его *решение имеет требуемый произвол в две функции. Собирая члены, решение можно записать в виде*

$$w(x,t) = -\frac{2\nu}{x - x_0(t)} + x_0'(t) + w_2(t)[x - x_0(t)]^2 + \dots,$$

где $x_0(t)$, $w_2(t)$ — произвольные функции.

2°. Для дальнейшего анализа уравнения Бюргерса используем разложение общего вида (2), где $w_n = w_n(x,t)$, $\varepsilon = \varepsilon(x,t)$. Из баланса ведущих членов получим

$$\alpha = 1, \quad w_0 = -2\nu\varepsilon_x \qquad (n = 0).$$

Рекуррентные соотношения для последующих трех членов разложения имеют вид

$$\begin{aligned} w_1\varepsilon_x - \nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_t &= 0 \quad (n = 1),\\ (w_1\varepsilon_x - \nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_t)_x &= 0 \quad (n = 2),\\ (w_1)_t - \nu(w_1)_{xx} + w_1(w_1)_x + \big[(w_0w_2)_x + (\varepsilon_t - \nu\varepsilon_{xx})w_2 -&\\ -2\nu\varepsilon_x(w_2)_x + \varepsilon_x(w_1w_2 + w_0w_3) - 2\nu\varepsilon_x^2 w_3 &= 0 \quad (n = 3). \end{aligned}$$

Полагая в этих формулах $w_2 = w_3 = 0$, получим согласованный обрыв разложения (2) с нулевыми высшими коэффициентами ($w_k = 0$ при $k \geqslant 2$). Оставшиеся равенства позволяют представить решение в виде

$$w = \frac{w_0}{\varepsilon} + w_1, \qquad w_0 = -2\nu\varepsilon_x,$$
$$\varepsilon_t + w_1\varepsilon_x = \nu\varepsilon_{xx}, \quad (w_1)_t + w_1(w_1)_x = \nu(w_1)_{xx}.$$

Эти соотношения представляют собой преобразование Беклунда и позволяют строить по одним решениям уравнения Бюргерса $w_1 = w_1(x,t)$ другие решения $w = w(x,t)$. Если выбрать за исходное решение $w_1 = 0$, то получим известное преобразование Коула — Хопфа

$$w = -2\nu\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon},$$

сводящее решение нелинейного уравнения Бюргерса к решению линейного уравнения теплопроводности

$$\varepsilon_t = \nu\varepsilon_{xx}.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$$

1°. Подставив в уравнение главный член разложения (1), получим

$$\frac{w_0'}{(x-x_0)^\alpha} + \frac{\alpha w_0 x_0'}{(x-x_0)^{\alpha+1}} - \frac{\alpha w_0^2}{(x-x_0)^{2\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)w_0}{(x-x_0)^{\alpha+3}} = 0,$$

где $x_0 = x_0(t)$, $w_0 = w_0(t)$. Из баланса старших сингулярных членов (учитываются два последних слагаемых), находим

$$\alpha = 2, \quad w_0 = -12 \qquad (n = 0).$$

Уравнение Кортевега — де Фриза после подстановки разложения (1) можно представить в виде

$$w_t + ww_x + w_{xxx} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(t)\varepsilon^{n-5} = 0, \quad \text{где} \quad E_n(t) = (n+1)(n-4)(n-6)w_n + \ldots$$

Из выражения для $E_n(t)$ следует, что имеются два резонанса $n = 4$, $n = 6$. Выписав в явном виде первые семь уравнений для коэффициентов разложения (1) нетрудно убедиться в выполнении условий совместности для резонансов:

$$\begin{aligned} w_0 + 12 &= 0 && (n=0),\\ w_1 &= 0 && (n=1),\\ \varepsilon_t + w_2 &= 0 && (n=2),\\ w_3 &= 0 && (n=3),\\ (w_1)_t &= 0 && (n=4),\\ \varepsilon_{tt} + 6w_5 &= 0 && (n=5),\\ (w_3)_t + w_3^2 + 2w_1w_5 &= 0 && (n=6). \end{aligned}$$

Соотношения при $n = 4$ и $n = 6$ являются следствиями предыдущих и не содержат w_4, w_6. Следовательно, уравнение Кортевега — де Фриза удовлетворяет тесту Фукса — Ковалевской — Пенлеве. Три произвольных функции $w_4(t)$, $w_6(t)$, $x_0(t)$ обеспечивают требуемый произвол решения уравнения третьего порядка.

2°. Теперь получим следствие общего разложения, используя сразу возможность обрыва ряда (2). После подстановки в уравнение Кортевега — де Фриза оборванного ряда с $w_3 = w_4 = \ldots = 0$ приходим к преобразованию Беклунда

$$\begin{aligned} &w = \frac{w_0}{\varepsilon^2} + \frac{w_1}{\varepsilon} + w_2 = 12(\ln\varepsilon)_{xx} + w_2,\\ &\varepsilon_t\varepsilon_x + w_2\varepsilon_x^2 + 4\varepsilon_x\varepsilon_{xxx} - 3\varepsilon_{xx}^2 = 0,\\ &\varepsilon_{xt} + w_2\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xxx} = 0,\\ &(w_2)_t + w_2(w_2)_x + (w_2)_{xxx} = 0. \end{aligned}$$

Исключив w_2 из второго и третьего уравнений, можно вывести уравнение для функции ε, которое с помощью нескольких преобразований сводится к системе линейных уравнений.

⊙ *Литература*: J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevalle (1983), J. Weiss (1993).

Пример 3. Рассмотрим уравнение Кадомцева — Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right) + a\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

которое представляет собой пример интегрируемого обобщения уравнения Кортевега — де Фриза большей размерности и более высокого порядка.

1°. В многомерных случаях используется аналог разложения (1):

$$w(x,y,t) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} w_n(y,t)\varepsilon^n, \quad \varepsilon = x - x_0(y,t). \tag{3}$$

Баланс ведущих сингулярных членов для уравнения Кадомцева — Петвиашвили дает такой же результат, как и в случае уравнения Кортевега — де Фриза

$$\alpha = 2, \quad w_0 = -12 \qquad (n = 0).$$

В результате подстановки разложения (3) в исходное уравнение получим

$$w_{tx} + ww_{xx} + w_x^2 + w_{xxxx} + aw_{yy} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n-6} E_n(y,t) = 0,$$
$$E_n(y,t) = (n+1)(n-4)(n-5)(n-6)w_n + \ldots$$

Видно, что имеется три резонанса: $n = 4,\ 5,\ 6$. Для проверки теста Фукса — Ковалевской — Пенлеве запишем рекуррентные соотношения для первых семи членов разложения

$$E_0 = 10w_0(w_0+12) = 0 \qquad (n=0),$$
$$E_1 = 12w_1(w_0+2) = 0 \qquad (n=1),$$
$$E_2 = 3[2(\varepsilon_t + a\varepsilon_y^2 + w_2)w_0 + w_1^2] = 0 \qquad (n=2),$$
$$E_3 = a(w_1)_{yy} - 2(w_0)_t - 4a(w_0)_y\varepsilon_y - 2[aw_0\varepsilon_{yy} - (\varepsilon_t + a\varepsilon_y^2 + w_2)w_1 - w_3w_0] = 0 \qquad (n=3),$$
$$E_4 = a(w_0)_{yy} - (w_1)_t - 2a(w_1)_y\varepsilon_y - aw_1\varepsilon_{yy} = 0 \qquad (n=4),$$
$$E_5 = a(w_1)_{yy} = 0 \qquad (n=5),$$
$$E_6 = a(w_2)_{yy} + \big\{(w_3)_t + 2a(w_3)_y\varepsilon_y + aw_3\varepsilon_{yy})+$$
$$+ 2[(\varepsilon_t + a\varepsilon_y^2 + w_2w_4 + \tfrac{1}{2}w_3^2 + w_5w_1 + (w_0+12)w_6]\big\} = 0 \quad (n=6).$$

Три последних соотношения (которые соответствуют резонансам) в силу предыдущих соотношений выполняются тождественно и не содержат w_4, w_5, w_6. Полученный произвол в четыре функции (ε, w_4, w_5, w_6) решения рассматриваемого уравнения четвертого порядка указывает на выполнение свойства Фукса — Ковалевской — Пенлеве.

2°. Использование разложения общего вида с условием обрыва ряда $w_n = 0$ при $n > 2$ приводит к преобразованию Беклунда (для упрощения полагаем $a = 1$)

$$w = 12(\ln\varepsilon)_{xx} + w_2,$$
$$\varepsilon_t\varepsilon_x + 4\varepsilon_x\varepsilon_{xxx} - 3\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_y^2 + w_2\varepsilon_x^2 = 0,$$
$$\varepsilon_{xt} + \varepsilon_{xxxx} + \varepsilon_{yy} - w_2\varepsilon_{xx} = 0,$$
$$(w_2)_{tx} + w_2(w_2)_{xx} + (w_2)_x^2 + (w_2)_{xxxx} + (w_2)_{yy} = 0.$$

Исключив w_2 из второго и третьего уравнений, можно получить уравнение для функции ε, которое в свою очередь позволяет перейти к решению системы линейных уравнений. которое в свою очередь позволяет перейти к решению системы линейных уравнений.

Пример 4. Рассмотрим модельную систему уравнений (В. А. Городцов, 1998, 2000)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial (wc)}{\partial x} = \chi\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

которая описывает конвективный перенос активной примеси в вязкой жидкости, когда она оказывает обратное влияние на течение через давление, квадратично зависящее от концентрации примеси. Такими уравнениями описывается также одномерное течение электропроводной жидкости в магнитном поле с большим магнитным давлением.

1°. По аналогии с разложением (1) представим искомые величины в виде

$$w(x,t) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} w_n(t)\varepsilon^n, \quad c(x,t) = \frac{1}{\varepsilon^\beta}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\varepsilon^n, \quad \varepsilon \equiv x - x_0(t).$$

Из баланса ведущих сингулярных членов уравнений находим

$$\alpha = \beta = 1, \quad w_0 = -\chi, \quad c_0^2 = \chi(2\nu - \chi).$$

Рекуррентные соотношения для членов разложения запишем в матричном виде

$$\begin{bmatrix} -(n-2)(\chi + \nu(n-1)) & (n-2)c_0 \\ (n-2)c_0 & -(n-2)n\chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ g_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Величины f_{n-1}, g_{n-1} *зависят от функций* $w_0, \ldots, w_{n-1}, c_0, \ldots, c_{n-1}, x_0$. Условие однозначной разрешимости матричного уравнения относительно указанных старших коэффициентов нарушается при обращении в нуль характеристического определителя (случай вырожденной матрицы), и тогда эти коэффициенты могут оказаться произвольными. Тем самым резонансы определяются из условия

$$\nu\chi(n+1)(n-2)^2(n-2+\chi/\nu) = 0$$

и все оказываются целыми положительными (за исключением особого резонанса $n = -1$) только при единичном числе Прандтля $\mathrm{Pr} \equiv \nu/\chi = 1$. Причем один резонанс $n = 1$ — простой, а другой $n = 2$ — кратный, так что в итоге всех резонансов четыре.

Выписав первые три рекуррентных соотношения

$$\begin{array}{lll} c_0^2 + w_0(w_0 + 2\nu) = 0, & w_0 + \nu = 0 & (n = 0), \\ c_0 c_1 + w_0(\varepsilon_t + w_1) = 0, & w_0 c_1 + c_0(\varepsilon_t + w_1) = 0 & (n = 1), \\ (w_0)_t = 0, & (c_0)_t = 0 & (n = 2), \end{array}$$

убеждаемся, что для резонанса $n = 1$ выполняется условие совместности, поскольку два соотношения при $n = 1$ совпадают в силу выражений при $n = 0$. Кратный резонанс $n = 2$ также удовлетворяет условию совместности благодаря постоянству обоих коэффициентов w_0, c_0. Отсюда следует, что свойство Фукса — Ковалевской — Пенлеве для уравнений активной примеси оказывается выполненным (при $\nu/\chi = 1$).

2°. Используя общее разложение с обрывом рядов при $w_2 = w_3 = \ldots = 0$, $c_2 = c_3 = \ldots = 0$, получим преобразование Беклунда для уравнений активной примеси

$$w = \frac{w_0}{\varepsilon} + w_1, \quad c = \frac{c_0}{\varepsilon} + c_1,$$
$$w_0 = -\nu\varepsilon_x, \quad c_0 = \pm\nu\varepsilon_x, \quad \varepsilon_t + (w_1 \mp c_1)\varepsilon_x = \nu\varepsilon_{xx},$$
$$(w_1)_t + w_1(w_1)_x = -c_1(c_1)_x + \nu(w_1)_{xx}, \quad (c_1)_t + (w_1 c_1)_x = \nu(c_1)_{xx}.$$

Из сравнения с преобразованием Беклунда для уравнения Бюргерса легко видеть, что после перехода в выписанном преобразовании к разностным и суммарным переменным они совпадут. Действительно при использовании таких замен переменных в исходных уравнениях при единичном числе Прандтля получается пара раздельных уравнений Бюргерса:

$$s_t + s s_x = \nu s_{xx}, \quad s = w + c,$$
$$r_t + r r_x = \nu r_{xx}, \quad r = w - c,$$

каждое из которых, сводится к линейному уравнению теплопроводности (см. пример 1).

Многочисленными исследованиями установлено, что многие известные интегрируемые нелинейные уравнения математической физики обладают свойством Фукса — Ковалевской — Пенлеве. Были найдены также новые уравнения с таким свойством. При проверке более сложных уравнений и систем уравнений на тест Фукса — Ковалевской — Пенлеве могут появляться резонансы с высокими номерами. При этом трудности аналитического решения быстро нарастают. Однако в виду высокой алгоритмичности тест допускает успешное использование методов символьных вычислений. Например, с помощью системы Maple V удалось провести полную классификацию интегрируемых случаев уравнений мелкой воды с диссипацией и дисперсией низших порядков [см. Д. М. Климов, В. Г. Байдулов, В. А. Городцов (2001)].

⦿ *Литература к разд. С.3*: M. Jimbo, M. D. Kruskal, T. Miwa (1982), J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevalle (1983), J. Weiss (1983), R. Conte (1989), M. Musette (1998).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987. — 479 с.

Адлер В. Э., Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Симметрийный подход к проблеме интегрируемости. // Теор. и матем. физика, 2000, т. 125, № 3, с. 355–424.

Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. — Новосибирск: Наука, 1994. — 319 с.

Аристов С. Н. Периодические и локализованные точные решения уравнения $h_t = \Delta \ln h$. // Прикл. мех. и тех. физика, 1999, т. 40, № 1, с. 22 – 26.

Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход. В кн.: Современные проблемы математики, т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР) — М.: 1989, с. 3–83.

Байков В. А. Приближенный групповой анализ нелинейных моделей сплошной среды.// Авт. канд. дис. — М.: Инст. прикл. математики АН СССР, 1990.

Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Методы возмущений в групповом анализе. В кн.: Современные проблемы математики, т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). — М.: 1989, с. 85–147.

Бакирова М. И., Димова С. Н., Дородницын В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А., Свирщевский С. Р. Инвариантные решения уравнения теплопроводности, описывающие направленное распространение горения и спиральные волны в нелинейной среде. // Доклады АН СССР, 1988, т. 299, № 2, с. 346–350.

Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. // Прикл. матем. и механика, 1952, т. 16, № 1, с. 67 – 78.

Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — М.: Гидрометеоиздат, 1978. — 208 с.

Белоколос Е. Д. Общая формула для решений уравнения Sin-Gordon с начальными и граничными условиями. // Теор. и матем. физика, 1995, т. 103, № 3, с. 358–367.

Белоцерковский О. М., Опарин, А. М. Численный эксперимент в турбулентности. — М.: Наука, 2000.

Берман В. С., Данилов Ю. А. О групповых свойствах обобщенного уравнения Ландау — Гинзбурга. // Доклады АН СССР, 1981, т. 258, № 1, с. 67–70.

Братусь А. С., Волосов К. А. Теория Маслова и точные решения одной задачи оптимальной коррекции при случайных возмущениях. // В сб.: Новые информационные технологии. Материалы 5-го семинара. — М.: МГИЭМ, 2001 (www/miem.edu.ru/seminar5).

Буллаф Р., Кодри Ф. (ред.) Солитоны. — М.: Мир, 1983. — 408 с.

Бучнев А. А. Группа Ли, допускаемая уравнениями идеальной несжимаемой жидкости.// Динамика сплошной среды, вып. 7. — Новосибирск: Инст. гидродинамики АН СССР, 1971, с. 212–214.

Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967. — 312 с.

Векуа И. Н. Замечания о свойствах решений уравнения $\Delta u = -Ke^{2u}$. // Сиб. матем. журн., 1960, т. 1, вып. 3, с. 331–342.

Верещагина Л. И. Групповое расслоение уравнений пространственного нестационарного пограничного слоя. // Вестник ЛГУ, 1973, т. 13, вып. 3, с. 82–86.

Виноградов А. М., Красильщик И. С. (ред.). Симметрии и законы сохранения в математической физике. — М.: Факториал, 1997. — 464 с.

Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1985.

Воробьев Е. М., Игнатович Н. В., Семенова Е. О. Инвариантные и частично-инвариантные решения краевых задач. // Доклады АН СССР, 1989, т. 306, № 4, с. 836–840.

Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Квазилинейное уравнение теплопроводности: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. В кн.: Современные проблемы математики, т. 28 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). — М.: 1986, с. 95–206.

Галактионов В. А., Посашков С. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1989, т. 29, № 4, с. 497–506.

Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1994, т. 34, № 3, с. 374–383.

Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С. Р. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями. // Диф. уравнения, 1995, т. 31, № 2, с. 253–261.

Ганжа Е. И. Об одном аналоге преобразования Мутара для уравнения Гурса $\theta_{xy} = 2\sqrt{\lambda\theta_x\theta_y}$. // Теор. и матем. физика, 2000, т. 122, № 1, с. 50–57.

Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. — 436 с.

Городцов В. А. Теплоперенос и турбулентная диффузия в одномерной гидродинамике без давления. // Прикл. матем. и механика, 1998, т. 62, № 6, с. 1021–1028.

Городцов В. А. Эффект локального роста концентрации примеси в одномерной гидродинамике. // Прикл. матем. и механика, 2000, т. 64, № 4, с. 615–623.

Громак В. И., Лукашевич Н. А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. — Минск: Университетское, 1990. — 160 с.

Гурса Э. Курс математического анализа, т. 3, ч. 1. — М.-Л.: Гос. техн.-теор. издат., 1933. — 276 с.

Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 694 с.

Дородницын В. А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнений нелинейной теплопроводности с источником или стоком. — М.: Препринт № 57 Инст. прикл. математики АН СССР, 1979. — 32 с.

Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1982, т. 22, № 6, с. 1393–1400.

Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях. // Дифф. уравнения, 1983, т. 19, № 7, с. 1215–1223.

Дородницын В. А., Свирщевский С. Р. О группах Ли — Беклунда, допускаемых уравнением теплопроводности с источником. — М.: Препринт № 101 Инст. прикл. математики АН СССР, 1983. — 28 с.

Дрюма В. С. Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Вриза. // Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, № 7, с. 753–757.

Емец Ю. П., Таранов В. Б. Групповые свойства и инвариантные решения уравнений электрического поля при нелинейных законах Ома.// Прикл. мех. и техн. физика, 1973, № 3, с. 28–36.

Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. // Успехи мат. наук, 2001, т. 56, вып. 1, с. 64–104.

Журавлев В. М. Точные решения уравнения нелинейной диффузии $u_t = \Delta \ln u + \lambda u$ в двумерном координатном пространстве. // Теор. и матем. физика, 2000, т. 124, № 2, с. 265–278.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. — М.: Международная программа образования, 1996. — 496 с.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001 *a*. — 576 с.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Точные решения и преобразования нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн. // Доклады РАН, 2001 *b*, т. 381, № 1, с. 31–36.

Захаров В. Е. О стохастизации одномерных цепочек нелинейных осцилляторов. // Журн. экспер. и теор. физики, 1973, т. 65, с. 219–225.

Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега — де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система. // Функц. анализ и его прилож., 1971, т. 5, № 4, с. 18–27.

Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. // Журн. экспер. и теор. физики, 1971, т. 61, № 1, с. 118–134.

Захаров В. Е., Шабат А. Б. Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. // Функц. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 3, с. 43–53.

Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Полное описание решений «sin-Gordon» уравнения. // Доклады АН СССР, 1973, т. 219, № 6, с. 1334–1337.

Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. В кн.: Сборник, посв. 70-летию А. Ф. Иоффе. — М.: Изд. АН СССР, 1950, с. 61–71.

Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 688 с.

Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Теория режимов с обострением в сжимаемых средах. В кн.: Современные проблемы математики, т. 28 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). — М.: 1987, с. 3–94.

Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением. — М.: Препринт № 74 Инст. прикл. математики АН СССР, 1976. — 67 с.

Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

Игнатович Н. В. Нередуцируемые к инвариантам, частично инвариантные решения уравнений стационарного погранслоя. // Мат. заметки, 1993, т. 53, вып. 1, с. 140–143.

Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. — М.: Мир, 1985. — 472 с.

Камке Е. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966. — 260 с.

Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

Капцов О. В. Построение точных решений уравнения Буссинеска.// Прикл. мех. и техн. физика, 1998, т. 39, № 3, с. 74–78.

Капцов О. В., Шанько Ю. В. Многопараметрические решения уравнения Цицейки.// Дифф. уравнения, 1999, т. 35, № 12, с. 1660–1668.

Климов Д. М., Байдулов В. Г., Городцов В. А. Испытание Ковалевской — Пенлеве уравнеиий мелкой воды с использованием пакета Maple. // Доклады РАН, 2001, т. 376, № 5, с. 600–604.

Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. университета, 1995. — 432 с.

Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов И. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. // Бюллетень МГУ, секция А, 1937, т. 1, вып. 6, с. 1–25.

Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963.

Кричевер И. М. Аналог формулы Даламбера для уравнений главного поля и уравнения sine-Gordon. // Доклады АН СССР, 1980, т. 253, № 2, с. 288–292.

Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП). // Функц. анализ и его прилож., 1978, т. 12, № 4, с. 41–52.

Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

Куренский М. Г. Дифференциальные уравнения. Книга вторая: дифференциальные уравнения с частными производными. — Л.: Изд. Артиллерийской акад. РККА, 1934. — 334 с.

Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика. — М.: Квантум, 1996. — 336 с.

Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — 736 с.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.

Ленский Э. В. О групповых свойствах уравнения движения нелинейной вязко-пластической среды.// Вестник МГУ, сер. 1 (мат. и мех.), 1966, с. 116–125.

Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 848 с.

Лэмб Дж. Элементы теории солитонов. — М.: Мир, 1984.

Мамонтов Е. В. К теории нестационарных околозвуковых течений. // Доклады АН СССР, 1969, т. 185, № 3, с. 538–540.

Маркеев А. П. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990. — 414 с.

Мартинсон Л. К. Плоская задача конвективного теплопереноса в нелинейной среде. // Прикл. матем. и механика, 1980, т. 44, № 1, с. 181–185.

Мартинсон Л. К, Павлов К. Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. 12, № 4, с. 1048–1054.

Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. — М.: Наука, 1987. — 352 с.

Мелешко С. В., Пухначев В. В. Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье — Стокса.// Прикл. мех. и техн. физика, 1999, № 2, с. 24–33.

Михайлов А. В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода. // Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, № 7, с. 443–448.

Нестеров С. В. Примеры нелинейных уравнений Клейна — Гордона, разрешимых в элементарных функциях. В кн.: Прикладные вопросы математики (Труды Моск. Энергетического института). — М.: 1978, с. 68–70.

Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза // Функц. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 3, с. 54–66.

Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. — М.: Мир, 1989. — 326 с.

Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. // Доклады АН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 492–495.

Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962.

Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. // Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1961, т. 1, № 2, с. 280–294.

Полубаринова — Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977. — 664 с.

Полянин А. Д. Об интегрировании нелинейных нестационарных уравнений конвективного тепло- и массообмена. // Доклады АН СССР, 1980*a*, т. 251, № 4, с. 817–820.

Полянин А. Д. О решении некоторых нелинейных погранслойных задач нестационарной диффузии (теплопроводности). // Доклады АН СССР, 1980*b*, т. 254, № 1, с. 53–56.

Полянин А. Д. Неполное разделение переменных в нестационарных задачах механики и математической физики.// Доклады РАН, 2000, т. 375, № 4, с. 476–480.

Полянин А. Д. Преобразования и точные решения уравнений пограничного слоя, содержащие произвольные функции.// Доклады РАН, 2001 *a*, т. 379, № 3, с. 334–339.

Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001 *b*. — 576 с.

Полянин А. Д. Точные решения и преобразования уравнений стационарного ламинарного пограничного слоя.// Теор. основы хим. технол., 2001 *c*, т. 35, № 4, с. 339–348.

Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье — Стокса с обобщенным разделением переменных.// Доклады РАН, 2001 *d*, т. 380, № 4, с. 491–496.

Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. — М.: Факториал, 1998. — 368 с.

Полянин А. Д., Журов А. И. Точные решения нелинейных уравнений механики и математической физики. // Доклады РАН, 1998, т. 360, № 5, с. 640–644.

Полянин А. Д., Журов А. И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике. // Доклады РАН, 2002, т. 382, № 5.

Полянин А. Д., Журов А. И., Вязьмин А. В. О точных решениях нелинейных уравнений тепло- и массопереноса.// Теор. основы хим. технол., 2000, т. 34, № 5, с. 451–464.

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Уравнения нестационарного пограничного слоя: Общие преобразования и точные решения.// Теор. основы хим. технол., 2001, т. 34, № 6, с. 563–573.

Похожаев С. И. Об одной задаче Л. В. Овсянникова.// Прикл. мех. и техн. физика, 1989, № 2, с. 5–10.

Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье — Стокса в плоском случае.// Прикл. мех. и техн. физика, 1960, № 1, с. 83–90.

Пухначев В. В. Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии.// Прикл. мех. и техн. физика, 1995, т. 36, № 2, с. 23–31.

Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978. — 688 с.

Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975. — 288 с.

Рудых Г. А., Семенов Э. И. О новых точных решениях одномерного уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком). // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1998, т. 38, № 6, с. 971–977.

Рудых Г. А., Семенов Э. И. Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии. // Мат. заметки, 2000, т. 67, вып. 2, с. 250–256.

Сабитов И. Х. О решениях уравнения $\Delta u = f(x,y)e^{cu}$ в некоторых специальных случаях. // Мат. сборник, 2001, т. 192, № 6, с. 89–104.

Самарский А. А., Соболь И. М. Примеры численного расчета температурных волн. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1963, т. 3, № 4, с. 702–719.

Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 480 с.

Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966. — 448 с.

Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1972. — 440 с.

Слезкин Н. А. Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости. // Уч. записки МГУ, 1934, вып. 11, с. 89–90.

Титов С. С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики. // В сб.: Аэродинамика / Саратов: Саратовский ун-т, 1988, с. 104–110.

Титов С. С., Устинов В. А. Исследование многочленных решений уравнений фильтрации газа с целым показателем адиабаты. // Приближенные методы решения краевых задач механики сплошной среды: Сб. науч. трудов / АН СССР. Урал. отд-ние. Инст. математики и механики, 1985, с. 64–70.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 624 с.

Фаддеев Л. Д. (ред.). Математическая физика: Энциклопедия. — М.: Большая российская энциклопедия, 1998. — 691 с.

Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической технологии. — М.: Наука, 1987. — 502 с.

Хабиров С. В. Псевдогруппы Ли преобразований на плоскости и их дифференциальные инварианты. // Моделирование в механике. — Новосибирск: СО АН СССР, 1990, т. 4 (21), № 6, с. 151–160.

Хабиров С. В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа — Ампера. // Мат. сборник, 1990, т. 181, № 12, с. 1607–1622.

Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976. — 632 с.

Черноусько Ф. Л. Автономные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции случайных возмущений. // Прикл. матем. и механика, 1971, т. 35, № 2, с. 333–342.

Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1978. — 352 с.

Черный Г. Г. Газовая динамика. — М.: Наука, 1988. — 424 с.

Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.

Шульман З. П., Берковский Б. М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. — Минск: Наука и техника, 1966. — 240 с.

Ablowitz M. J., Clarkson P. A. Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.

Ablowitz M. J., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed. // Bull. Math. Biology, 1979, Vol. 41, pp. 835–840.

Ames W. F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Vol. 2. — New York: Academic Press, 1972.

Ames W. F., Lohner J. R., Adams E. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$. // Int. J. Nonlinear Mech., 1981, Vol. 16, № 5–6, p. 439.

Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J. Model equation for long waves in nonlinear dispersive systems. // Philos. Trans. R. Soc. London, 1972, Vol. 272A, p. 47.

Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls. // J. Appl. Physics, 1953, Vol. 24, № 9, pp. 1232–1235.

Bertsch M., Kersner R., Peletier L. A. Positivity versus localization in degenerate diffusion equations. // Nonlinear Analys., Theory, Meth. and Appl., 1985, Vol. 9, № 9, pp. 987–1008.

Bluman G. W., Cole J. D. Similarity Methods for Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1974. — 332 p.

Bluman G. W., Kumei S. On the remarkable nonlinear diffusion equation $[a(u+b)^{-2}u_x]_x - u_t = 0$. // J. Math. Phys., 1980, Vol. 21, № 5, pp. 1019–1023.

Bluman G. W., Kumei S. Symmetries and Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1989.

Burde G. I. The constraction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Steady flows. // Quart. J. Mech. Appl. Math., 1994, Vol. 47, № 2, pp. 247–260.

Burgan J. R., Munier A., Feix M. R., Fijalkow E. Homology and the nonlinear heat diffusion equation. // SIAM J. Appl. Math., 1984, Vol. 44, № 1, p. 11.

Calogero F. Universality and integrability of the nonlinear evolution PDE's describing N-wave interactions. // J. Math. Phys., 1989, Vol. 30, № 1, pp. 28–40.

Clarkson P. A., Kruskal M. D. New similarity reductions of the Boussinesq equation. // J. Math. Phys., 1989, Vol. 30, № 10, pp. 2201–2213.

Clarkson P. A., Fokas A. S., Ablowitz M. J. Hodograph transformations on linearizable partial differential equations. // SIAM J. Appl. Math., 1989, Vol. 49, pp. 1188–1209.

Cole J. D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. // Quart. Appl. Math., 1951, Vol. 9, № 3, pp. 225–236.

Conte R. Invariant Painlevé analysis for partial differential equations. // Phys. Lett. Ser. A, 1989, Vol. 140, № 7,8, pp. 383–390.

Conte R., Musette M. Painlevé analysis and Backlund transformation in the Kuramoto — Sivashinsky equation. // J. Phys. A, 1989, Vol. 22, pp. 169–177.

Conte R., Musette M. Linearity inside nonlinearity: Exact solutions to the complex Ginzburg — Landau equation. // Physica D, 1993, Vol. 69, № 1, pp. 1–17.

Crabtree F. L., Kuchemann D., Sowerby L. In: Laminar Boundary Layers (ed. Rosenhead). — Oxford: University Press, 1963.

Crank J. The Mathematics of Diffusion. — Oxford: Clarendon Press, 1975.

Doyle Ph. W. Separation of variables for scalar evolution equations in one space dimension. // J. Phys. A: Math. Gen., 1996, Vol. 29, pp. 7581–7595.

Doyle Ph. W., Vassiliou P. J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation. // Int. J. Non-Linear Mech., 1998, Vol. 33, № 2, pp. 315–326.

Fisher R. A. The wave of advanse of advantageneous genes. // Annals of Eugenics, 1937, Vol. 7, pp. 355–369.

Fokas A. S, Anderson R. L. Group theoretical nature of Backlund transformations. // Lett. Math. Phys., 1979, Vol. 3, p. 117.

Fujita H. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, Part II. // Textile Res., 1952, Vol. 22, p. 823.

Fushchich W. I., Serov N. I., Ahmerov T. K. On the conditional symmetry of the generalized KdV equation. // Rep. Ukr. Acad. Sci., 1991, A 12.

Galaktionov V. A. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications. // Differential and Integral Equations, 1990, Vol. 3, № 5, pp. 863–874.

Galaktionov V. A. Invariant subspace and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1995, Vol. 125A, № 2, pp. 225–448.

Galaktionov V. A. Ordered invariant sets for nonlinear evolution equations of KdV-type. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1999, т. 39, № 9, с. 1564–1570.

Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteveg — de Vries equation. // Phys. Rev. Lett., 1967, Vol. 19, № 19, pp. 1095–1097.

Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Korteveg — de Vries equation and generalizations. VI: Methods for exact solution. // Comm. Pure Appl. Math., 1974, Vol. 27, p. 97–133.

Gesztesy F., Weikard R. Elliptic algebro-geometric solutions of the KdV and AKNS hierarchies — an analytic approach. // Bull. AMS, 1998, Vol. 35, № 4, pp. 271–317.

Glassey R. T., Hunter J. K., Zheng Y. Singularities and oscillations in a nonlinear variational wave equation. — In book: Singularities and Oscillations (eds. J. Ranch, M. Taylor), Springer-Verlag, 1997.

Grauel A. Sinh-Gordon equation, Painlevé property and Backlund transformation. // Physica A, 1985, Vol. 132, pp. 557–568.

Grundland A. M., Infeld E. A family of non-linear Klein-Gordon equations and their solutions. // J. Math. Phys., 1992, Vol. 33, pp. 2498–2503.

Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solutions. // Phys. Rev. Lett., 1971, Vol. 27, p. 1192.

Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solutions. // J. Phys. Soc. Jpn., 1972, Vol. 33, № 3, p. 1455.

Hirota R. Exact N-solion solution of the wave equation of long waves in shallow water and in nonlinear lattice. // J. Phys. Phys., 1973, Vol. 14, pp. 810–814.

Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. // Comm. Pure and Appl. Math., 1950, Vol. 3, pp. 201–230.

Ibragimov N. H. (editor), CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. — Boca Raton: CRC Press, 1994. — 429 p.

Ibragimov N. H. (editor) CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, Vol. 2. Applications in Engineering and Physical Sciences. — Boca Raton: CRC Press, 1995. — 546 p.

Its A. R., Novokshenov V. Yu. The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1986.

Jimbo M., Kruskal M. D., Miwa T. Painlevé test for the self-dual Yang — Mills equation. // Phys. Lett. Ser. A, 1982, Vol. 92, № 2, pp. 59–60.

Kaliappan P. An exact solutions for travelling waves of $u_t = Du_{xx} + u - u^k$. // Physica D, 1984, Vol. 11, pp. 368–374.

Kawahara T., Tanaka M. Interactions of traveling fronts: an exact solution of a nonlinear diffusion equations. // Phys. Lett., 1983, Vol. 97, p. 311.

Kersner R. On some properties of weak solutions of quasilinear degenerate parabolic equations. // Acta Math. Academy of Sciences, Hung., 1978, Vol. 32, № 3–4, pp. 301–330.

King Y. R. Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equations. // Quart. J. Mech. Appl. Math., 1993, Vol. 46, № 3, pp. 419–436.

Kodama Y. A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions. // Phys. Lett. A, 1988, Vol. 129, № 4, pp. 223–226.

Kodama Y., Gibbons J. A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions. II.// Phys. Lett. A, 1989, Vol. 135, № 3, pp. 167–170.

Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems. // Progr. Theor. Phys., 1975, Vol. 54, No. 3, pp. 687–699.

Lamb G. L. Backlund transformations for certain nonlinear evolution equations. // J. Math. Phys., 1974, Vol. 15, pp. 2157–2165.

Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. // Comm. Pure Appl. Math., 1968, Vol. 21, № 5, pp. 467–490. (Русский перевод: Лэкс П. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. // Сб. Математика, 1969, т. 13, № 5, с. 128–150.)

Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid. // J. Math. Phys., 1948, Vol. 27, № 3, p. 220.

Lloyd S. P. The infinitesimal group of the Navier — Stokes equations. // Acta Mech., 1981, Vol. 38, pp. 85–98.

Martin M. N. The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere. // Canad. J. Math., 1953, Vol. 3, pp. 165–187.

Matsuno Y. Exact solutions for the nonlinear Klein — Gordon and Liouville equations in for dimensional Euclidean space. // J. Math. Physics, 1987, Vol. 28, № 10, pp. 2317–2322.

Melikyan A. A. Generalized Characteristics of First Order PDE's: Applications in Optimal Control and Differential Games. — Boston: Birkhauser, 1998. — 310 p.

Miller J. (Jr.), Rubel L. A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. // J. Phys. A, 1993, Vol. 26, pp. 1901–1913.

Miura R. M. Korteweg — de Vries equation and generalizations. I. A remarcable explisit nonlinear transformation. // J. Math. Phys., 1968, Vol. 9, № 8, pp. 1202–1203.

Munier A., Burgan J. R., Gutierres J., Fijalkow E., Feix M. R. Group transformations and the nonlinear heat diffusion equation. // SIAM J. Appl. Math., 1981, Vol. 40, № 2, p. 191.

Murphy G.M. Ordinary Differential Equations and Their Solutions. — New York: D. Van Nostrand, 1960.

Musette M. Painlevé analysis for nonlinear partial differential equationsInvariant Painlevé analysis for partial differential equations. / In: The Painlevé Property, One Centure Later (editor R. Conte). // CRM Series in Math. Phys. — Berlin: Springer-Verlag, 1998, pp. 1–48.

Nerney S., Schmahl E. J., Musielak Z. E. Analytic solutions of the vector Burgers' equation. // Quart. Appl. Math., 1996, Vol. LIV, № 1, pp. 63–71.

Palais R. S. The symmetries of solitons. // Bulletin of the American Mathematical Society, 1997, Vol. 34, № 4, pp. 339–403.

Peregrine D. N. Calculations of the development of an undular bore. // J. Fluid Mech., 1966, Vol. 25, p. 321.

Philip J. R. General method of exact solution of the concentration-dependent diffusion equation. // Australian J. Physics, 1960, Vol. 13, № 1, pp. 13–20.

Polyanin A. D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists (Supplement B: Methods of generalized and functional separation of variables in nonlinear equations of mathematical physics). — Boca Raton: Chapman & Hall — CRC Press, 2001. — 800 p.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Moussiaux A. Handbook of First Order Partial Differential Equations. — London: Taylor & Francis, 2002. — 520 p.

Polyanin A. D., Zhurov A. I., Vyazmin A. V. Generalized separation of variables in nonlinear heat and mass transfer equations. // J. Non-Equilibrium Thermodynamics, 2000, Vol. 25, № 3/4, pp. 251–267.

Rogers C., Shadwick W. F. Backlund Transformations and Their Applications. — New York: Academic Press, 1982.

Rogers C., Ruggeri T. A reciprocal Backlund transformation: application to a nonlinear hyperbolic model in heat conduction. // Lett. Nuovo Cimento, 1985, Vol. 44, p. 289.

Rogers C., Ames W. F. Nonlinear Boundary Value Problems in Science and Engineering. — New York: Academic Press, 1989.

Rosen G. Dilatation covariance and exact solutions in local relativistic field theories. // Phys. Rev., 1969, Vol. 183, pp. 1186–1191.

Shercliff J. A. Simple rotational flows. // J. Fluid Mech., 1977, Vol. 82, № 4, pp. 687–703.

Strampp W. Backlund transformations for diffusion equations. // Physica D, 1982, № 6, p. 113.

Svirshchevskii S. R. Lie–Backlund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations. // Phys. Lett. A, 1995, Vol. 199, pp. 344–348.

Ting A. S., Cheb H. H., Lee Y. C. Exact solutions of a nonlinear boundary value problem: the vortices of the two-dimensional sinh-Poisson equation. // Physica D, 1987, pp. 37–66.

Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid, Part 1. // Quart. Appl. Math., 1950, Vol. 7, p. 381.

Weiss J. The Painlevé property for partial differential equations. II: Backlund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative. // J. Math. Phys., 1983, Vol. 24, № 6, pp. 1405–1413.

Weiss J. The sine-Gordon equations: Complete and partial integrability. // J. Math. Phys., 1984, Vol. 25, pp. 2226–2235.

Weiss J. The Painlevé property and Backlund transformations for the sequence of Boussinesq equations. // J. Math. Phys., 1985, Vol. 26, pp. 258–269.

Weiss J., Tabor M., Carnevalle G. The Painlevé property for partial differential equations. // J. Math. Phys., 1983, Vol. 24, № 3, pp. 522–526.

Zaitsev V. F., Polyanin A. D. Discrete-Group Methods for Integrating Equations of Nonlinear Mechanics. — Boca Raton: Begell House — CRC Press, 1994. — 312 p.

Zhdanov R. Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. // J. Phys. A, 1994, Vol. 27, pp. L291–L297.

Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1989.